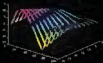


VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Э. ФИЛДРЕС, Р. ХАРБОР

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ



АВТОМАТИКА

FEEDBACK CONTROL SYSTEMS

Fourth Edition

Charles L. Phillips

*Professor Emeritus of Electrical Engineering
Auburn University
Auburn, Alabama*

Royce D. Harbor

*Professor Emeritus of Computer Science
University of West Florida
Pensacola, Florida*



**Prentice Hall
Upper Saddle River
New Jersey 07458**

ТЕХНИЧЕСКИЙ



УНИВЕРСИТЕТ

Ч. ФИЛЛИПС, Р. ХАРБОР

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

**Перевод с английского
Б. И. Копылова**



**Москва
Лаборатория Базовых Знаний
2001**

УДК 62-52
Ф 53
ББК 32.965

Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001 — 616 с.: ил.

В книге излагаются фундаментальные вопросы, традиционно изучаемые в рамках дисциплины «Теория автоматического управления» студентами технических вузов. Рассматриваются методы анализа и синтеза линейных непрерывных и дискретных систем автоматического управления, проблемы анализа переходных режимов, устойчивости замкнутых систем, аналитического проектирования наблюдателей состояния. Также в книге представлены методы анализа нелинейных систем.

Книга содержит большое количество примеров и задач, иллюстрирующих основной материал.

Студентам, преподавателям и аспирантам высших учебных заведений, а также инженерам, занимающимся проектированием систем управления.

По вопросам приобретения обращаться:
В Москве

«Лаборатория Базовых Знаний» (095) 955-03-98, e-mail: lbz@aha.ru

В Санкт-Петербурге

«Диалект» (812) 247-93-01, e-mail: dialect@sndlct.ioffe.rssi.ru

Издание на русском языке

© Лаборатория Базовых Знаний, 2001

Original English language title:

Feedback Control Systems, Fourth Edition

by Charles L. Phillips, Royce D. Harbor, © 2000

Опубликовано по соглашению

с издательством PRENTICE HALL, INC.,

a Pearson Education Company

ISBN 0-13-949090-6
ISBN 5-93208-039-6

Содержание

Предисловие	
--------------------	-------

1. Введение	
--------------------	-------

1.1. Проблема управления	
1.2. Примеры систем управления	
1.3. Краткая история управления	
Литература	

2. Модели физических систем	
------------------------------------	-------

2.1. Моделирование систем	
2.2. Электрические цепи	
2.3. Структурные схемы и графы	
2.4. Формула Мейсона	
2.5. Механические системы с линейным перемещением	
2.6. Механические системы с вращательным движением	
2.7. Электромеханические системы	
2.8. Датчики	
2.9. Система регулирования температуры	
2.10. Подобные системы	
2.11. Трансформаторы и зубчатые передачи	
2.12. Система управления роботом	
2.13. Идентификация систем	
2.14. Линеаризация	
2.15. Заключение	
Литература	
Задачи	

3. Модели в переменных состояниях	
--	-------

3.1. Моделирование в переменных состояниях	
3.2. Схемы моделирования	
3.3. Решение уравнений состояния	
3.4. Передаточные функции	
3.5. Преобразования подобия	
3.6. Цифровое моделирование	
3.7. Программное обеспечение	
3.8. Аналоговое моделирование	
3.9. Заключение	
Литература	
Задачи	

4. Временные и частотные характеристики систем	113
4.1. Временные характеристики систем первого порядка	114
4.2. Временные характеристики систем второго порядка	118
4.3. Требования к временным характеристикам при синтезе системы	121
4.4. Частотные характеристики систем	126
4.5. Масштабирование времени и частоты	132
4.6. Характеристики систем более высокого порядка	134
4.7. Понижение порядка моделей	138
4.8. Заключение	139
Литература	139
Задачи	139
5. Характеристики систем управления	145
5.1. Замкнутая система управления	146
5.2. Устойчивость	150
5.3. Чувствительность	153
5.4. Компенсация возмущений	157
5.5. Точность в установившемся режиме	162
5.6. Переходный процесс	170
5.7. Частотные характеристики замкнутой системы	171
5.8. Заключение	172
Литература	173
Задачи	173
6. Анализ устойчивости	181
6.1. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица	183
6.2. Корни характеристического уравнения	191
6.3. Исследование устойчивости путем моделирования	192
6.4. Заключение	193
Задачи	193
7. Анализ и синтез с помощью корневого годографа	199
7.1. Основы метода корневого годографа	199
7.2. Некоторые свойства корневого годографа	203
7.3. Дополнительные свойства корневого годографа	207
7.4. Некоторые особенности корневого годографа	220
7.5. Другие конфигурации	223
7.6. Синтез с помощью корневого годографа	225
7.7. Синтез регулятора с опережением по фазе	228
7.8. Аналитическое проектирование регулятора с опережением по фазе	229
7.9. Синтез регулятора с отставанием по фазе	234
7.10. Синтез ПИД-регулятора	238
7.11. Аналитическое проектирование ПИД-регулятора	241
7.12. Дополнительный корневой годограф	245

7.13. Реализация регулятора	
7.14. Заключение	
Литература	
Задачи	
8. Анализ в частотной области	
8.1. Частотные характеристики	
8.2. Диаграммы Боде	
8.3. Остальные составляющие.	
8.4. Критерий Найквиста	
8.5. Применение критерия Найквиста	
8.6. Относительная устойчивость и диаграмма Боде.	
8.7. Частотные характеристики замкнутых систем	
8.8. Заключение.	
Литература	
Задачи	
9. Синтез в частотной области.	
9.1. Требования к системе управления	
9.2. Коррекция.	
9.3. Коррекция путем изменения коэффициента усиления.	
9.4. Коррекция с отставанием по фазе.	
9.5. Коррекция с опережением по фазе	
9.6. Аналитический метод синтеза регулятора	
9.7. Коррекция с отставанием и опережением по фазе	
9.8. Синтез ПИД-регулятора.	
9.9. Аналитический метод синтеза ПИД-регулятора	
9.10. Реализация ПИД-регулятора	
9.11. Программные средства синтеза в частотной области	
9.12. Заключение	
Литература	
Задачи	
10. Проектирование систем с помощью современной теории управления	
10.1. Синтез путем размещения полюсов.	
10.2. Формула Аккермана.	
10.3. Оценка состояния	
10.4. Характеристики замкнутой системы	
10.5. Наблюдатели пониженного порядка	
10.6. Управляемость и наблюдаемость	
10.7. Системы при наличии входных воздействий	
10.8. Заключение.	
Литература	
Задачи	

11. Дискретные системы	426
11.1. Системы с дискретным временем	426
11.2. Методы преобразования	428
11.3. Теоремы z-преобразования	430
11.4. Решение разностных уравнений	433
11.5. Обратное z-преобразование	436
11.6. Схемы моделирования и графы.	438
11.7. Переменные состояния.	441
11.8. Решение уравнений состояния	443
11.9. Заключение	447
Литература	447
Задачи	447
12. Импульсные системы.	454
12.1. Представление данных в импульсной форме	454
12.2. Идеальный квантователь	456
12.3. Свойства преобразования со звездочкой	459
12.4. Восстановление данных	462
12.5. Импульсная передаточная функция.	465
12.6. Разомкнутые системы, содержащие цифровые фильтры	470
12.7. Замкнутые импульсные системы.	472
12.8. Передаточные функции замкнутых систем.	473
12.9. Переменные состояния в импульсных системах	478
12.10. Заключение	482
Литература	483
Задачи	483
13. Анализ и синтез цифровых систем управления	490
13.1. Два примера	490
13.2. Устойчивость дискретных систем	494
13.3. Критерий Джури	495
13.4. Отображение s -плоскости на z -плоскость.	497
13.5. Корневой годограф	501
13.6. Критерий Найквиста	503
13.7. Билинейное преобразование	508
13.8. Критерий Рауса-Гурвица	512
13.9. Диаграмма Боде.	512
13.10. Точность в установившемся режиме	515
13.11. Синтез цифровых систем управления	517
13.12. Синтез регулятора с отставанием по фазе	521
13.13. Синтез регулятора с опережением по фазе.	526
13.14. Цифровые ПИД-регуляторы	529
13.15. Синтез с помощью метода корневого годографа.	533
13.16. Заключение	536

Литература	
Задачи	
14. Анализ нелинейных систем	
14.1. Определения и свойства нелинейных систем	
14.2. Обзор критерия Найквиста	
14.3. Описывающая функция	
14.4. Вычисление описывающих функций	
14.5. Использование описывающей функции	
14.6. Устойчивость предельных циклов	
14.7. Синтез	
14.8. Применение к системам иного вида	
14.9. Линеаризация	
14.10. Состояния равновесия и устойчивость по Ляпунову	
14.11. Анализ систем методом фазовой плоскости	
14.12. Фазовые траектории линейных систем	
14.13. Заключение	
Литература	
Задачи	
Приложение А. Матрицы	
А.1. Алгебра матриц	
А.2. Другие матричные операции	
Литература	
Приложение Б. Преобразование Лапласа	
Б.1. Введение	
Б.2. Теоремы преобразования Лапласа	
Б.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции	
Литература	
Задачи	
Приложение В. Таблица преобразований Лапласа и z-преобразований	

Посвящается
Бобби, Элен, Пэт и Доуи (Ч. Л. Ф.)
Эддиджен (Р. Д. Х.)

Предисловие

В четвертом издании книги «Системы управления с обратной связью» сохранены структура и подход к изложению материала трех предыдущих изданий. Однако были учтены отзывы и пожелания наших коллег, использовавших первые три издания в учебном процессе. В частности, были уточнены некоторые определения, а также введен ряд новых примеров. Большинство задач, завершающих каждую главу, были либо скорректированы, либо полностью заменены.

Для иллюстрации методов анализа и синтеза линейных непрерывных и дискретных систем, а также нелинейных непрерывных систем предложен метод компьютерного моделирования с помощью программы SIMULINK™, входящей в состав интегрированной среды MATLAB™. Проверку различных вычислений, преобразований, решений дифференциальных уравнений и других операций также предложено проводить с помощью MATLAB. Учтены новые возможности MATLAB, и теперь большинство примеров содержат короткие программы MATLAB. Эти программы могут быть загружены непосредственно с сайта Интернета <ftp://ftp.mathworks.com/pub/books/harbor>. После этого студенты могут вносить в эти программы свои данные, что облегчит решение задач, предлагаемых в конце каждой главы.

Эта книга предназначена в первую очередь для студентов технических специальностей, а также для инженеров-практиков, имеющих недостаточный опыт в области анализа и проектирования систем управления. Чтобы извлечь из книги максимальную пользу, читатель должен обладать некоторыми навыками анализа линейных систем.

В основу книги положен материал лекций, прочитанных авторами в университетах Оберна (шт. Алабама) и Пенсаколы (шт. Флорида), а также на интенсивных краткосрочных курсах в США и Европе. На инженеров, посещавших эти курсы, материал оказал сильное влияние, поскольку в нем сделан акцент на практические аспекты анализа и проектирования систем управления. В частности, особо подчеркивается важность понимания различия между реальными физическими системами и их математическими моделями. И, хотя убедиться в этом можно только в результате практической деятельности, студент должен осознать, что подобное различие действительно имеет место.

Материал книги сгруппирован в три основных блока, охватывающих аналоговые (непрерывные) системы управления, цифровые системы управления и нелинейные непре-

рывные системы управления. Глава 1 представляет собой краткое введение и обзор материала книги. Здесь же приводятся некоторые примеры систем управления с целью познакомить читателя с типовыми практическими приложениями. Затем излагается краткая история создания систем управления с обратной связью. В главе 2 основное внимание уделяется математическим моделям типовых элементов систем управления.

Главы 3–10 посвящены анализу и синтезу линейных непрерывных систем. В главе 2 математическая модель линейной системы представлена в виде передаточной функции, то в главе 3 она основана на использовании переменных состояния.

В главе 4 рассматриваются основные характеристики линейных непрерывных систем, включая понятие частотных характеристик. Это понятие вводится на ранней стадии изложения материала, поскольку многие свойства замкнутых систем нельзя адекватно объяснить без использования частотных характеристик. Авторы считают, что частотные характеристики в анализе систем играют не менее важную роль, чем временные характеристики.

В главе 5 приводится ряд важных характеристик, понимание которых проясняет некоторые свойства замкнутых систем. В главе 6 вводится понятие устойчивости системы, в частности, дается формулировка критерия устойчивости Рауса–Гурвица. В главе 7 представлены методы анализа и синтеза с помощью корневого годографа, а в главах 8–9 рассмотрены процедуры анализа и синтеза в частотной области. Глава 10 посвящена временным методам проектирования систем управления, основанным на размещении полюсов передаточной функции и использовании наблюдателей состояния.

Материал глав 3–10 относится только к непрерывным системам; в последующих трех главах (11–13) рассматриваются цифровые системы управления, причем их анализ и синтез проводятся с помощью тех же методов, которые описаны в главах 3–9 применительно к непрерывным системам.

Глава 14 посвящена нелинейным системам. Здесь рассматриваются три основных метода анализа таких систем: метод гармонического баланса, метод линеаризации и метод фазовой плоскости.

Книга включает 3 приложения. Первое приложение даёт краткие сведения о матрицах, их свойствах и операциях с ними; во втором приложении описано преобразование Лапласа, а третье содержит таблицы преобразований Лапласа и z -преобразований.

Книга содержит множество примеров, причём сделана попытка с помощью каждого примера проиллюстрировать только одно какое-либо понятие. Разумеется, при таком подходе вне рассмотрения оказываются многие интересные свойства систем; однако поскольку эта книга предназначена для студентов, только начинающих изучать теорию систем управления с обратной связью, усложнение примеров привело бы к некоторому загромождению понятий.

Обычно во вводных курсах по теории управления нелинейные системы не рассматриваются. Однако многие важные свойства физических систем не поддаются объяснению с помощью линейной теории. Например, устойчивость систем с обратной связью часто зависит от амплитуды сигнала, поэтому для объяснения данного явления в главе 14 используется метод гармонической линеаризации (гармонического баланса). Здесь же с помощью первого метода А.М.Ляпунова показано, к каким неприятным последствиям может привести применение критерия устойчивости, разработанного для линейных систем.

Каждая глава книги построена так, что более сложный материал помещён ближе к концу главы. Тем самым преподаватели, занимающиеся со студентами по облегчённой программе, могут просто исключить его из учебного плана.

В целом содержание этой книги достаточно для односеместрового (по 3 часа в неделю) курса по непрерывным системам управления (главы 1–9) и для односеместрового (по 3 часа в неделю) курса по цифровым и нелинейным системам (главы 10–14). Материал может быть также последовательно изложен за 2 четверти (2 раза по 1/2 семестра) из расчёта приблизительно 5 часов в неделю на каждый курс. Если часть материала будет исключена из программы, то это, соответственно, потребует меньших затрат времени. Если же курс по цифровым системам управления читается без изучения первых 9 глав, то частичное знание материала этих глав всё же является необходимым (главы 11–13 базируются на этом материале).

Мы хотели бы выразить благодарность многим коллегам, студентам и руководству университетов в Оберне и Зап. Флориде, внесшим свой вклад в подготовку этой книги. Мы особенно признательны проф. Дж. Дэвиду Ирвину, заведующему кафедрой электротехники университета в Оберне, и проф. Т.Ф. Элберту, руководителю факультета системных исследований университета Зап. Флориды, за их помощь и поддержку. Выражаем благодарность также Питеру Дорато из университета Нью-Мексико и Ранджару Мукерджи из Мичиганского университета за рецензирование рукописи книги. Наконец, мы выражаем чувства любви и благодарности нашим семьям, без которых этот труд был бы невозможен.

Чарльз Л. Филлипс, университет Оберна,
Ройс Д. Харбор, университет Зап. Флориды.

1. Введение

Эта книга посвящена анализу и синтезу систем управления с обратной связью. В *с* *ча* *е* *а* *н* *а* *л* *и* *з* *а* *а* *н* *и* *з* *а* *д* *а* *н* *н* *о* *й* *с* *и* *с* *т* *е* *м* *ы* *с* *ч* *и* *т* *а* *е* *т* *с* *я* *е* *т* *с* *я* *з* *а* *д* *а* *н* *н* *о* *й*, а определению подлежат её характеристики и поведение в замкнутом состоянии. При *с* *и* *н* *т* *е* *з* *е* задаются желаемые характеристики и поведение системы, и мы должны определить её структуру таким образом, чтобы замкнутая система удовлетворяла выдвинутым требованиям к её качеству.

Мы определим замкнутую систему как систему, в которой некоторые из воздействующих на неё сигналов (называемых *входами*) зависят, хотя бы частично, от реакций системы на эти сигналы (так называемых *выходов*). Следовательно, входы системы являются функцией её выходов, и наоборот. Схема, иллюстрирующая функциональную связь сигналов в замкнутой системе, изображена на рис. 1.1.

Примером замкнутой системы является система регулирования температуры в жилом помещении. С помощью этой системы мы желаем автоматически поддерживать данное значение температуры в жилом помещении. Чтобы управлять какой-либо физической переменной, которую обычно называют *сигналом*, нам нужно знать значение этой переменной, т.е. мы должны её измерить. Устройство для измерения переменной называют *датчиком* (см. рис. 1.2). В нашем примере датчиком является термоэлемент, который сигнализирует о низкой температуре путём замыкания электрического реле, а о приемлемой температуре — путём его размыкания. Мы назовём *объектом* ту часть системы, которая подлежит управлению. В нашем примере предполагается, что температура повышается путём воздействия на газовую горелку. Следовательно, входной переменной объекта управления является сигнал, воздействующий на горелку, а выходным сигналом объекта является действительное значение температуры в жилом помещении. Объект управления изображён на рис. 1.2. В рассматриваемой нами системе выход каждого элемента соединён со входом другого, образуя в результате замкнутый контур. Однако в большинстве систем управления в этот контур вводится третий элемент, с помощью которого обеспечиваются приемлемые характеристики системы в целом. Этот дополнительный элемент называют *корректирующим устройством*, *регулятором*, или просто *фильтром*.



Рис. 1.1. Замкнутая система



Рис. 1.2. Элементы системы управления

Общий вид одноконтурной замкнутой системы управления показан на рис. 1.3. Входом системы является эталонный сигнал; обычно мы хотим, чтобы выход системы был равен этому входному сигналу. В примере управления температурой в помещении таким входом является уставка термозлемента. Если нам нужно изменить температуру, мы изменяем вход системы. Выход системы измеряется датчиком, и измеренное значение температуры сравнивается со входом (вычитается из него). Этот разностный сигнал называют *сигналом ошибки*, или просто ошибкой. Если выход равен входу, то ошибка равна нулю и на объект не поступает никакой сигнал. Следовательно, выход объекта сохраняет текущее значение. Если ошибка не равна нулю, то в надлежащем образом спроектированной системе этот сигнал заставляет объект реагировать таким образом, чтобы уменьшить величину ошибки. Корректирующее устройство играет роль фильтра для сигнала ошибки, т.к. если этот сигнал подать непосредственно на вход объекта, трудно ожидать удовлетворительной работы всей системы.

Системы управления иногда делят на два класса. Если целью системы является поддержание постоянного значения физической переменной при наличии возмущений, то её называют *системой регулирования*. Примером может служить система регулирования скорости генераторов переменного тока в компаниях-производителях электроэнергии. Такая система должна обеспечивать постоянное значение скорости генераторов, чтобы частота генерируемого напряжения была равна 60 Гц (стандарт США — прим. перев.) независимо от величины нагрузки. Другим примером системы регулирования является биологическая система, поддерживающая температуру человеческого тела на уровне приблизительно $36,6^{\circ}\text{C}$ в условиях изменяющейся температуры окружающей среды.

Ко второму классу систем управления относят *следящие системы*, или сервомеханизмы. Хотя первоначально этот термин относится к системам, которые управляли механическим перемещением или движением, теперь его используют применительно к любой системе, в которой физическая переменная должна отслеживать или воспроизводить некоторую заданную функцию времени. Примером может служить система автоматической посадки самолёта, когда последний отслеживает заданный угол снижения до точки касания с землёй. Другим примером является система управления роботом, когда его рука должна воспроизводить некоторую заданную траекторию в пространстве.

Всё сказанное выше даёт весьма упрощённое представление о замкнутой системе управления. Дальнейший материал книги позволит более глубоко проникнуть в суть вопроса. Чтобы выполнить процедуры анализа или синтеза, нам потребуется установить математическую зависимость между входом и выходом каждого блока системы управления, изображённой на рис. 1.3. Целью главы 2 является вывод этих математических соотношений для некоторых хорошо известных физических систем. В главе 3 приводится несколько отличный метод представления этих функциональных соотношений.

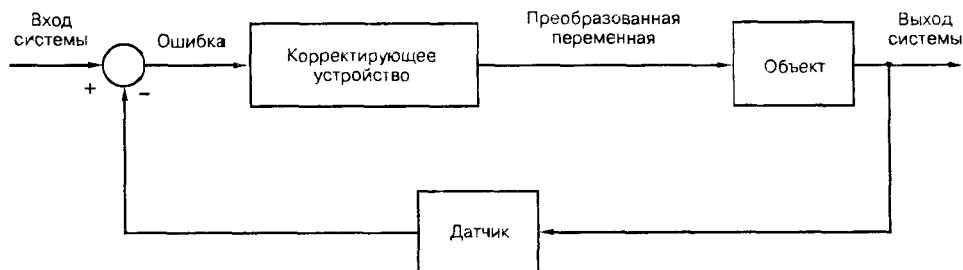


Рис. 1.3. Замкнутая система управления

1.1. Проблема управления

В главе 4 мы познакомимся с реакцией систем на типовые внешние воздействия. В главе 5 увидим, какими специфическими особенностями обладают системы управления. В главе 6 вводится понятие устойчивости и рассматриваются методы анализа устойчивости систем. Один из важных методов анализа и синтеза систем, метод корневого годографа, изучается в главе 7. В главах 8 и 9 представлен другой важный метод анализа и синтеза — метод частотных характеристик. Глава 10 представляет собой введение в альтернативный метод синтеза непрерывных систем управления, называемый современным методом проектирования.

В главах 2–9 предполагается, что ни один из сигналов не имеет импульсную форму, что в системе управления не используется цифровой компьютер. Такие системы называются *аналоговыми*, или *непрерывными*. В главах 11–13 рассматриваются системы, в которых имеет место квантование сигнала по времени. Такие системы называются *импульсными*. Если для целей управления в системе используется цифровой компьютер, то такая система называется *цифровой*. Импульсные и цифровые системы объединяются общим названием *дискретные системы*.

В главах 2–13 предполагается, что рассматриваемые в них системы являются *линейными* (линейность определяется в главе 2). Однако реальные физические системы не являются линейными, и это создаёт трудности при их анализе и синтезе. На протяжении всей книги мы обсуждаем проблемы неточного представления функциональных зависимостей, используемых при построении моделей физических систем. Однако для многих систем линейная модель обладает недостаточной точностью, и для повышения точности функциональных зависимостей модель должна быть дополнена определёнными нелинейностями. Некоторые типовые нелинейности и методы анализа нелинейных систем будут рассмотрены в главе 14.

При анализе линейных систем мы используем преобразование Лапласа, если система непрерывная, и z -преобразование, если система дискретная. В приложении Б приведены основные сведения, касающиеся преобразования Лапласа, а понятие z -преобразования, его теоремы и свойства рассматриваются в главе 11.

1.1. Проблема управления

Мы можем сформулировать проблему управления следующим образом. Дана физическая система или объект, и за счёт использования обратной связи, приводящей к образованию замкнутого контура, системой или объектом надо управлять надлежащим образом. Выходная переменная (реакция объекта управления) изменяется в нужном направлении с появлением сигнала ошибки. Этот сигнал является разностью между реакцией объекта, измеренной датчиком, и эталонным входным сигналом, определяющим желаемое значение выходной переменной системы.

В общем случае, для того чтобы система удовлетворяла определённым критериям качества, сигнал ошибки должен быть подвергнут некоторому преобразованию, которое осуществляется регулятором или корректирующим устройством, играющим роль фильтра. Критерии могут включать в себя следующие условия (но отнюдь не ограничиваясь ими):

1. Необходимость компенсации возмущений.
2. Ограничение на величину установившейся ошибки.

3. Желаемый вид переходных характеристик.
4. Ограничения на чувствительность к изменению параметров объекта управления.

Решение проблемы управления состоит из следующих этапов:

1. Выбор датчиков для измерения выходной переменной объекта управления.
2. Выбор исполнительных устройств для воздействия на объект управления.
3. Составление математических моделей (уравнений) объекта, датчика и исполнительного устройства.
4. Проектирование регулятора на основании разработанных моделей и критериев качества.
5. Оценка результатов синтеза системы аналитически, путём имитационного моделирования и, наконец, испытанием физической системы.
6. Если испытание физической системы даёт неудовлетворительные результаты, то повторение всех предыдущих этапов.

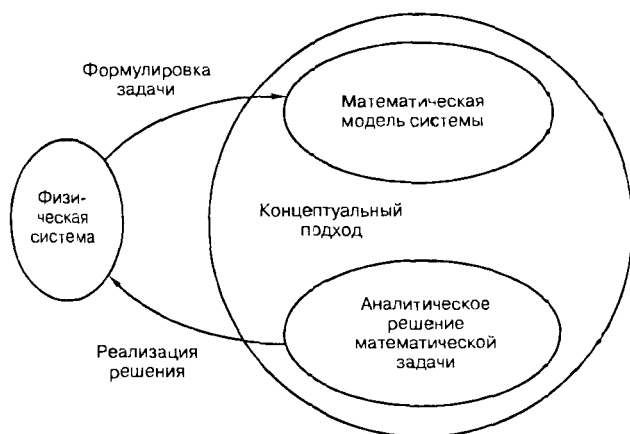
Как правило, вследствие неточности построения математических моделей, результаты испытания реальной системы управления не соответствуют желаемым. Поэтому инженер-проектировщик должен повторить процедуру синтеза, используя все доступные средства, чтобы добиться желаемых результатов. При этом очень важную роль играют интуиция и личный опыт, приобретённый в процессе исследования и эксплуатации реальных систем.

Взаимосвязь между математической процедурой анализа и синтеза и проектированием реальной физической системы изображена на рис. 1.4 [1]. В книге рассматриваются все звенья этой взаимосвязи, но акцент сделан на концептуальной части, а именно на применении математических понятий и методов к математическим моделям. На практике, однако, основные трудности возникают при математической формулировке задачи и при физической реализации полученного аналитического решения. Как было замечено выше, обычно требуется достаточно много раз повторять все процедуры, показанные на рис. 1.4.

В зависимости от типа системы и опыта проектировщика некоторые из перечисленных выше этапов могут быть опущены. В частности, многие системы управления создаются путём использования серийных промышленных регуляторов и экспериментальной настройки их параметров в процессе их пошагового тестирования совместно с физиче-

Рис. 1.4

Математическое решение
физических проблем



1.2. Примеры систем управления

ским объектом; при этом нет необходимости в разработке математических моделей. некоторых систем такой подход является приемлемым, а для других он совершенно пригоден. Например, система управления космическим аппаратом не может быть спроектирована подобным образом; она должна правильно выполнять свои функции сразу после начала эксплуатации.

В данной книге излагаются математические процедуры анализа и синтеза систем управления. О применимости всех этих методов (и их ценности) в отношении конкретной системы трудно сказать что-либо определённое. Однако в книге делается упор на применение промышленных регуляторов, в связи с чем все аналитические процедуры имеют целенаправленный характер и обосновывают целесообразность использования этих регуляторов в системах управления.

1.2. Примеры систем управления

Этот раздел имеет целью познакомить читателя с некоторыми типами систем управления, кроме того, дать более чёткое представление об основных элементах этих систем.

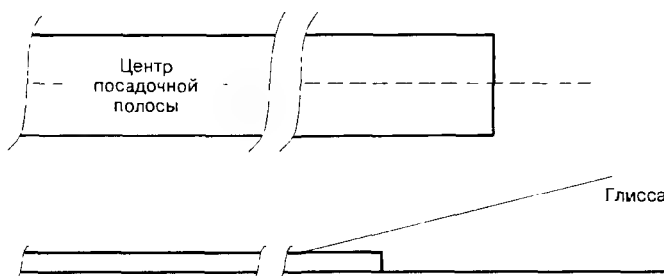
1.2.1. Системы посадки самолета

В качестве первого примера рассмотрим замкнутую систему управления посадкой самолёта. В данном случае пилот имеет три основных задачи. Во-первых, самолёт должен приближаться к аэродрому, выдерживая курс по центру посадочной полосы, как пока на рис. 1.5. На этом рисунке также показана и вторая задача пилота — соблюдение надлежащей глиссады. Третьей задачей является выдерживание правильной скорости.

Мы рассмотрим только одну из этих задач — задачу удержания самолёта по центру посадочной полосы (задачу управления горизонтальным положением самолёта). Функциональная схема системы, решающей данную задачу, приведена на рис. 1.6. Предполагая, что горизонтальное положение самолёта регулируется с помощью элеронов, специальных плоскостей в задней части каждого крыла. На самом деле для управления горизонтальным положением используется также руль поворота, но мы для простоты ограничимся только элеронами. Элероны в совокупности с механизмами, изменяющими угол наклона, образуют исполнительное устройство системы управления.

В данной системе пилот использует несколько датчиков для определения горизонтального положения самолёта. Он может сделать это с помощью прибора на панели управления в кабине самолёта. Кроме того, пилот обычно визуально наблюдает посадочную полосу и может оценить положение самолёта относительно её центра. Таким образом пилот знает желаемое горизонтальное положение самолёта и имеет информацию о дей-

Рис. 1.5
Приземление самолета



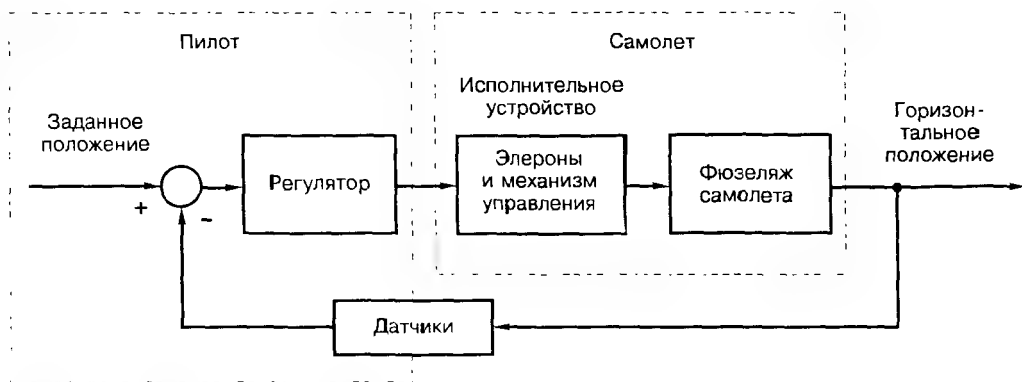


Рис. 1.6. Система посадки самолета

тельном положении. Он управляет элеронами так, чтобы самолёт занял желаемое горизонтальное положение. В терминах систем управления мы обычно разность между желаемым и действительным положением называем *ошибкой системы*.

Теперь нам осталось выяснить назначение регулятора на рис. 1.6. В данной системе функции регулятора выполняет пилот, который также выступает в качестве датчика и одновременно управляет элеронами. Оценивая положение самолёта, пилот управляет элеронами таким образом, чтобы свести ошибку к нулю. Качество выполнения пилотом этих действий определяется степенью его тренированности. Например, для большого пассажирского лайнера действия пилота должны быть совершенно иными, нежели для небольшого одномоторного самолёта. То есть, мы можем сказать, что функции регулятора заложены в сознании пилота и являются результатом интенсивной тренировки. Цель её в том, чтобы при каждой посадке при одних и тех же обстоятельствах предпринимались одни и те же действия.

Рассмотрим теперь автоматическую систему посадки самолёта, в которой пилот не принимает участия. Во многих аэропортах, например, большой пассажирский лайнер может быть заведён на посадку автоматически. Ещё более сложная система управления посадкой характерна для авианосцев [2].

Система автоматической посадки также может быть представлена схемой на рис. 1.6. Однако элеронами здесь управляет автопилот, который в свою очередь является замкнутой системой управления. Роль датчика обычно выполняет радар, который определяет положение самолёта относительно центра посадочной полосы. Функции регулятора выполняет цифровой компьютер, который решает систему уравнений и вырабатывает команды, подаваемые на автопилот. В системах автоматической посадки самолёта на авианосце обычно используется промышленный ПИД-регулятор, который детально будет рассмотрен ниже. Этот тип регулятора наиболее характерен для систем управления с обратной связью.

Отметим также, что очень часто человек, выполняющий определённые действия, является частью замкнутой системы управления. Когда мы управляем автомобилем, то постоянно контролируем его положение и направление движения. Если мы считаем, что эти параметры нас не удовлетворяют, то предпринимаем действия, чтобы исправить их. Иными словами, мы пытаемся устранить ошибку системы. Второй простой пример — это процесс рисования. Мы постоянно следим за положением карандаша на бумаге, пытаемся минимизировать разность между желаемым и действительным положением. (Если вы со-

1.3. Краткая история управления

мневаесть, что процесс рисования — разновидность управления с обратной связью (попытайтесь нарисовать что-нибудь с закрытыми глазами.) Ещё один пример: чтобы поймать летящий мяч, мы следим за его движением и управляем положением рук до тех пор, пока мяч не попадёт в них.

Ранее мы отметили, что примером биологической системы управления является тема регулирования температуры человеческого тела. Эта система стремится поддерживать постоянное значение температуры. Окружающая среда пытается повлиять на температуру и отклонить её от желаемого значения. Тело реагирует на отклонение (скачок) изменением ритма дыхания, ускорением или замедлением потока крови, дрожью и т.д. Эта система имеет одну особенность, не свойственную системам управления, создаваемым человеком: она обычно нормально функционирует более 70 лет. И наоборот логическая система имеет другую особенность, которая в равной мере присуща и системам управления, создаваемым человеком: если величина ошибки становится слишком большой, то работа системы нарушается.

1.2.2. Система регулирования температуры

Вторая система управления, которую мы рассмотрим в этом разделе — это система регулирования температуры в теплице. Учёные используют такую теплицу для изучения влияния температуры на рост растений [3]. Функциональная схема системы регулирования температуры приведена на рис. 1.7. Температура в теплице измеряется с помощью термистора (резистора, сопротивление которого зависит от температуры), включённого в один из плеч мостовой схемы [4]. Выходной сигнал измерительного моста имеет малую величину (милливольты), поэтому необходим усилитель, чтобы довести напряжение до приемлемого уровня. Вообще многие преобразователи характеризуются очень малым выходным напряжением, поэтому датчики систем управления очень часто укомплектовываются встроенными усилителями.

Желаемая температура в теплице также задаётся в виде напряжения. Разность между желаемой температурой (напряжение) и действительной температурой (тоже напряжение) есть сигнал ошибки. Кондиционер пытается поддержать температуру в теплице ниже желаемой, а напряжение, подаваемое на нагреватель (см. рис. 1.7), стремится увеличить температуру до желаемого значения. Таким образом увеличение напряжения приводит к увеличению температуры, а уменьшение напряжения — к уменьшению температуры. Напряжение, подаваемое на нагреватель, регулируется тиристором, который в свою очередь управляется сигналом ошибки, преобразованным в импульсную форму.

В данной системе, как и в случае автоматической посадки самолёта, используется ПИД-регулятор. Такой закон регулирования может быть реализован как с помощью цифрового компьютера (см. главу 13), так и в виде аналоговой схемы, состоящей из резисторов, конденсаторов и операционных усилителей (см. главу 9).

1.3. Краткая история управления

В этом разделе приводится краткая история эволюции систем автоматического управления с обратной связью [5-7]. Термин «автоматическое» подразумевает, что управление осуществляется без вмешательства человека. Термин *обратная связь* по-видимому впервые использован в 1920 г. персоналом компании Bell Telephone Laboratories.

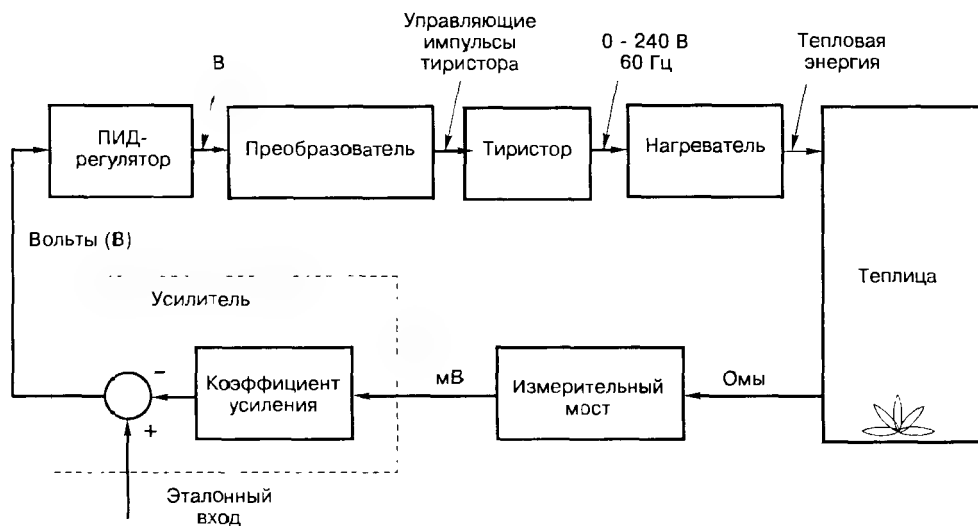


Рис. 1.7. Функциональная схема системы регулирования температуры в теплице

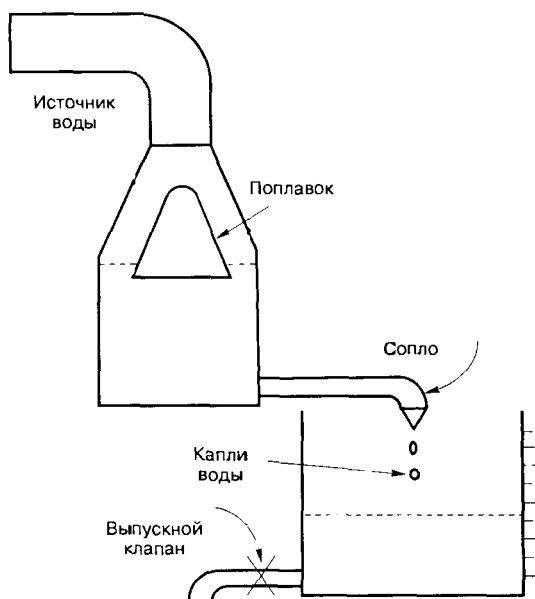
Самое раннее из известных устройств с обратной связью относится ко второму веку до нашей эры. Это так называемые водяные часы. Время измерялось с помощью капель воды, падающих с постоянной скоростью через сопло из резервуара. Чтобы обеспечить постоянную скорость истечения воды, необходимо было поддерживать постоянный уровень воды в резервуаре, а для этого требовалось автоматическое регулирование. Интересно, что задача поддержания постоянного уровня жидкости в сосуде до сих пор сохраняет актуальность, и мы занимаемся проектированием соответствующих систем регулирования.

Одна из возможных конструкций водяных часов показана на рис. 1.8. Плавающий клапан в верхнем сосуде, одновременно выполняющий роль датчика и исполнительного устройства системы регулирования, служит для поддержания постоянного уровня воды в этом сосуде. Когда уровень воды соответствует заданному значению, клапан закрывает питающую магистраль. Если же уровень меньше заданного, то клапан открывает магистраль, что приводит к повышению уровня. Обратите внимание, что действие этого механизма аналогично работе сливного бачка в туалете. Вода через сопло капает в нижний сосуд, снабжённый проградуированной шкалой. Уровень воды в нём точно указывает промежуток времени с того времени, когда сосуд был пуст. Фактически накопление воды в нижнем резервуаре является операцией интегрирования (суммирования). Аналогичная процедура (суммирование) используется при численном интегрировании в цифровых компьютерах. Эта процедура использовалась 22 столетия назад, и в наши дни данный принцип лежит в основе работы современных компьютеров. Действительно, здесь трудно изобрести что-то новое.

Голландский механик и химик Корнелиус Дреббель (1572-1633) изобрёл регулятор температуры, который он использовал в своих химических опытах и в инкубаторах для выведения цыплят. Этот регулятор содержал устройство, позволявшее выпускать нагретый воздух из камеры, когда температура в ней достигала желаемого значения. Его можно сравнить с уже известной нам системой автоматического регулирования температуры в жилом помещении; разница лишь в том, что в этой системе нагретый воздух начинал циркулировать, когда температура опускалась ниже заданного значения.

Рис. 1.8

Простейшие водяные часы



Американец Уильям Генри (1729–1786) изобрёл регулятор температуры, в котором использовалась заслонка, автоматически управлявшая сгоранием топлива и, следовательно, температурой. Принцип действия датчика температуры и исполнительного устройства был основан на давлении нагретого воздуха при его расширении. Расширение воздуха приводило к закрытию заслонки и уменьшению сгорания топлива, а сжатие воздуха — к открытию заслонки.

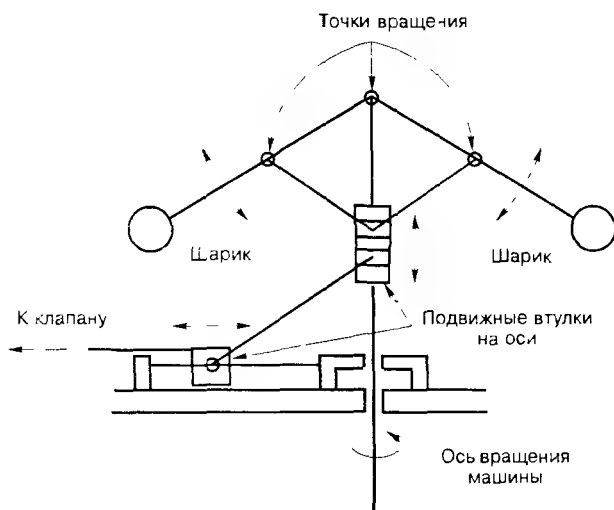
Многими изобретателями были внесены усовершенствования в конструкцию поплавковых регуляторов уровня жидкости. Это сделали Джеймс Бриндли в 1758 г., Сат Томас Вуд в 1784 г. (оба — в США) и И.И.Ползунов в 1763 г. в России. Усовершенствования регуляторов давления для паровых котлов сделали Дени Папен (1647–1712), Роберт Делап в 1799 г. и Мэтью Мюррей в 1799 г.

Главным изобретением в области управления скоростью ветряных мельниц и паровых машин был центробежный регулятор Томаса Мида (1787 г.). В 1788 г. Мэтью Болтон и Джеймс Уатт предложили конструкцию центробежного регулятора скорости, изображённую на рис. 1.9. При увеличении скорости вращения машины шарики за счёт центробежной силы расходились, что, в свою очередь, приводило к перемещению втулки вверх по оси машины. При этом с помощью клапана, управляемого рычажным механизмом, уменьшалась подача пара и, следовательно, скорость вращения. Уменьшение скорости вращения приводило к обратному эффекту.

Рассмотренные выше устройства работали приблизительно так, как было описано. Однако во многих случаях регулятор вместо того, чтобы поддерживать постоянное значение выходной переменной, позволял ей совершать небольшие колебания относительно заданного значения. Этот эффект часто называли «рысканием». Чтобы устранить эту неустойчивость, потребовалось создание математических моделей физических устройств, т.е. уравнений, решение которых описывало бы поведение этих устройств. В результате появились современные математические методы моделирования, анализа и синтеза систем управления. В разработку этих методов внесли свой вклад очень многие учёные. Пьер Симон Лаплас (1749–1827) изобрёл преобразование (названное в его честь).

Рис. 1.9

Регулятор скорости
вращения паровой машины



вии его именем), являющееся основой большинства методов анализа и синтеза систем управления. Из других учёных отметим Исаака Ньютона (1642–1727) — математическое моделирование и анализ; Брука Тейлора — математический анализ (ряды Тейлора); Джеймса Клерка Максвелла (1831–1879) — математическое моделирование и анализ; Эдварда Джона Рауса (1831–1907) — критерий Рауса; Оливера Хевисайда (1850–1925) — математический анализ; Чарльза П. Стейнметца (1865–1923) — анализ частотных характеристик с помощью комплексных переменных; Гарри Найквиста (1889–1976) — критерий Найквиста; Хендрика У. Боде (1905–1982) — диаграмма Боде; Гарольда С. Блэка (1898–1981) — усилители с отрицательной обратной связью; У. Р. Эванса — корневой годограф; и Джона фон Неймана (1903–1957) — принцип действия цифрового компьютера. Этот список ни в коей мере не является исчерпывающим как в персональном плане, так и в плане достижений в отдельных областях. Он лишь призван дать читателю сведения о том, какие идеи и в какое время разрабатывали перечисленные выше учёные. Список современных учёных, внёсших весомый вклад в развитие теории автоматического управления, был бы слишком длинным и, конечно, далеко не бесспорным.

Литература

1. W.A.Gardner. *Introduction to Random Processes*. New York: Macmillan, 1986.
2. R.F.Wigginton. «Evaluation of OPS-II Operational Program for the Automatic Carrier Landing System». Naval Electronic Systems Test and Evaluation Facility, Saint Inigoes, MD, 1971.
3. R.E.Wheeler. «A Digital Control for Plant Growth Chambers». MS thesis. Auburn University, Auburn, AL, 1980.
4. J.D.Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
5. M.E.El-Hawary. *Control System Engineering*. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1984.
6. W.A.Blackwell and L.L.Grigsby. *Introductory Network Theory*. Boston: PWS Engineering, 1985.
7. «Centennial Hall of Fame». *IEEE Spectrum*. April 1984.

2. Модели физических систем

В этой главе рассматривается проблема получения математических моделей физических систем. Под *математической моделью* мы понимаем соотношения, связывающие вход и выход системы. Возможно, одной из простейших моделей физической системы является закон Ома (правильнее его было бы называть моделью Ома), характеризующий сопротивление электрического сопротивления. Эта модель имеет вид уравнения

$$v(t) = i(t)R. \quad (2)$$

В данном уравнении $v(t)$ — это напряжение в вольтах, $i(t)$ — ток в амперах, а R — сопротивление в омах. Если сопротивление подключено к источнику напряжения известной величины, то это напряжение считается входом системы, а ток — её выходом (реакцией). В этой главе мы рассмотрим модели некоторых распространённых физических систем. Далее в книге они будут использованы при иллюстрации методов анализа и синтеза систем управления. Эти модели позволяют предсказать поведение системы при различных обстоятельствах без проведения испытаний реальной физической системы.

В главе 1 мы ввели понятие *линейной системы*. Теперь дадим ему определение. Система называется *линейной*, если к ней применим принцип суперпозиции. Предположим, например, что реакция системы на вход $r_1(t)$ есть $c_1(t)$, а реакция на вход $r_2(t)$ есть $c_2(t)$. Если система является линейной, то её реакция на вход $k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$ будет равна $k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)$, где k_1 и k_2 — произвольные константы.

2.1. Моделирование систем

В источнике [1] математическая модель определяется как набор уравнений, описывающих поведение физической системы. Следует отдавать себе отчёт, что никакая математическая модель физической системы не является точной. Мы можем повышать точность модели, увеличивая количество и сложность уравнений, но всё равно никогда не достигнем абсолютной точности. Обычно мы стремимся к тому, чтобы модель адекватно отражала поведение физической системы и в то же время была не слишком сложной. Установлено, что разработка моделей физических систем занимает от 80 до 90 процентов усилий, необходимых для анализа и синтеза систем управления.

В этой главе для разработки моделей простых физических систем мы воспользуемся основными законами физики. В дальнейшем с помощью этих моделей мы проиллюстрируем методы анализа и синтеза систем управления. Будем рассматривать только системы, которые описываются *линейными дифференциальными уравнениями с постоянными параметрами*. В соответствии с приложением Б, эти уравнения могут быть решены с помощью преобразования Лапласа; но, что ещё более важно, такие системы можно охарактеризовать *передаточной функцией*, и из этой характеристики вытекают все зависимости между входом и выходом системы.

Из предшествующего обсуждения мы должны сделать один принципиальный вывод. В процессе анализа и синтеза систем, рассматриваемых в данной книге, мы всегда используем *математическую модель* физической системы, и мы ни в коем случае не хотим смешивать эти два понятия. Модель в одних случаях может правильно отражать поведение реальной системы, а в других случаях она оказывается несостоятельной. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.1

Предположим, что мы имеем в распоряжении резистор номиналом 1 Ом с рассеиваемой мощностью 2 Вт, т.е. мы рассматриваем некую физическую систему. Если мы приложим к резистору постоянное напряжение величиной 1 В, то математическая модель (2-1) показывает, что через резистор будет протекать ток величиной 1 А. Если мы физически подключим резистор к источнику напряжения величиной 1 В, то величина тока через резистор составит примерно 1 А, в зависимости от истинного сопротивления, параметров источника напряжения и т.д. Так как мощность, рассеиваемая резистором, определяется выражением

$$p(t) = v^2(t)R, \quad (2-2)$$

то на нём будет рассеиваться приблизительно 1 Вт. Теперь предположим, что мы проводим тот же эксперимент, но уже с источником напряжения величиной 10 В. Из математической модели следует, что через резистор будет протекать ток величиной 10 А и что на нём будет рассеиваться мощность 100 Вт. Но, поскольку реальный резистор способен рассеивать мощность только 2 Вт, то он просто перегорит, если его подключить к источнику 10 В. Или, в зависимости от характеристик источника напряжения, может перегореть предохранитель. В любом случае ток не будет равен 10 А, как это следует из математической модели. Следовательно, характеристики резистора номиналом 1 Ом будут зависеть от величины приложенного к нему сигнала (напряжения).

Этот простой пример показывает, что модель физической системы, кроме всего прочего, зависит от величины входного сигнала. Она может также быть функцией температуры, влажности, скорости (например, самолёта) и т.д. Модель конкретной системы может быть адекватной при одних условиях и неадекватной при других. Строго говоря, только испытание физической системы может дать ответ на вопрос об адекватности. Эта проблема приводит к очень драматическим моментам на начальной стадии полёта самолётов, космических кораблей и т.п. К сожалению, дело иногда заканчивается катастрофой.

Предыдущие рассуждения имели целью подчеркнуть различие между физической системой и *некоторой* моделью этой системы. Поскольку у физической системы нет абсолютной модели, то не может быть и речи о том, что нам удалось создать *определённую* модель конкретной системы. Напомним, что мы всегда можем уточнять модель путём повышения её сложности, но никогда не достигнем идеального соответствия.

После всего сказанного мы уже не будем обращать особого внимания на языковые нюансы в отношении рассматриваемых систем. А именно, везде в этой книге, если речь идёт о *системе*, то мы подразумеваем её *математическую модель*. Когда же мы возвращаемся в реальный мир, то будем пользоваться термином *физическая система*.

2.2. Электрические цепи

В этом разделе мы покажем, как выглядят модели простейших электрических цепей [2]. Модель сопротивления, представленная уравнением (2-1), наряду с моделями индуктивности и ёмкости изображена на рис. 2.1. В короткозамкнутой цепи $v(t) = 0$, и ток $i(t)$ определя-

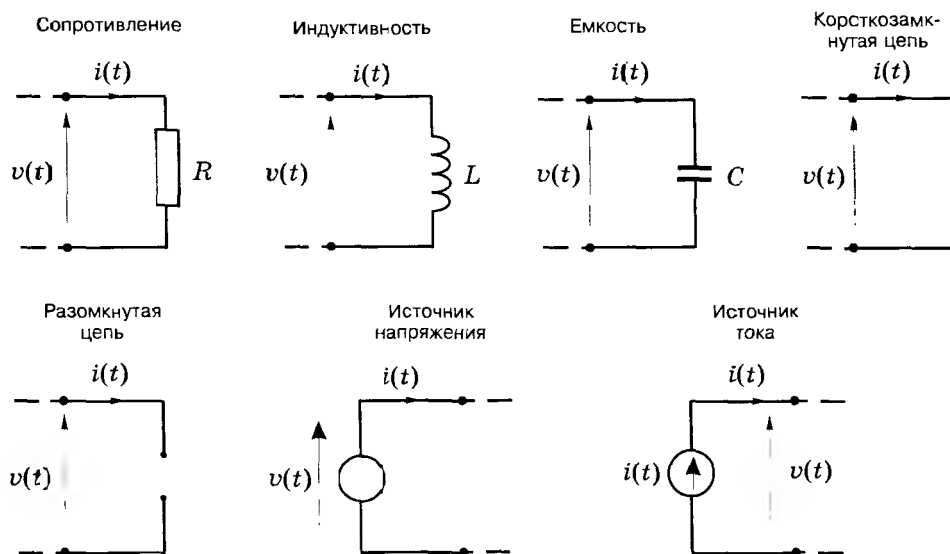


Рис. 2.1. Элементы электрических цепей

ется частью схемы, расположенной между клеммами слева от них. Для разомкнутой и $i(t) = 0$, и $v(t)$ определяется частью схемы между клеммами слева от них. На этом рисунке также приведены схемы идеального источника напряжения и идеального источника тока. Пунктирные линии указывают на то, что эти элементы являются частью более сложных цепей. Например, сопротивление должно входить в какую-то сложную цепь, так что даже напряжение $v(t)$ может быть тождественно равно нулю.

Идеальный источник напряжения определяют как источник, выходное напряжение которого не зависит от параметров подключенной к нему цепи. Ток $i(t)$, протекающий через этот источник, определяется только параметрами цепи. В случае же идеального источника тока, по определению, ток, протекающий через источник, не зависит от параметров подключенной к нему цепи. Напряжение $v(t)$ на выходе такого источника определяется только параметрами этой цепи.

Рассмотрим цепь, образованную элементами, изображенными на рис. 2.1. Модель цепи имеет вид уравнений, записанных в соответствии с законами Кирхгофа. Закон Кирхгофа для напряжений имеет следующую формулировку:

Алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре электрической цепи равна нулю.

Закон Кирхгофа для токов формулируется так:

Алгебраическая сумма токов для любого узла электрической цепи равна нулю.

Ниже приводятся простые примеры составления уравнений для электрических цепей.

Пример 2.2

Сначала рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.2. Будем считать напряжение $v_1(t)$ входным напряжением, а напряжение $v_2(t)$ — выходом схемы. Следовательно, нам нужно записать уравнения, решение которых будет определять $v_2(t)$ как функцию напряжения $v_1(t)$ или, что эквивалентно, i

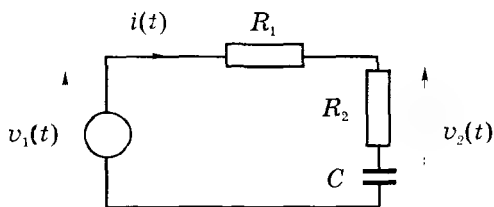


Рис. 2.2. Схема для примера 2.2

ражение по Лапласу $V_2(s)$ как функцию $V_1(s)$. В соответствии с законом Кирхгофа для напряжений, полагая начальное напряжение на конденсаторе равным нулю, запишем:

$$R_1 i(t) + R_2 i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_1(t),$$

$$R_2 i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_2(t).$$

Таким образом, эти два уравнения образуют математическую модель схемы на рис. 2.2. Мы можем также представить модель данной схемы, применив к последним двум уравнениям преобразование Лапласа:

$$R_1 I(s) + R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_1(s),$$

$$R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_2(s).$$

Таким образом, модель электрической схемы может быть представлена либо двумя дифференциальными уравнениями, либо, что эквивалентно, двумя уравнениями в области переменной s , являющейся аргументом преобразования Лапласа.

Рассмотрим теперь систему со входом $e(t)$ и выходом $c(t)$. Если $C(s)$ — изображение по Лапласу переменной $c(t)$, а $E(s)$ — изображение по Лапласу переменной $e(t)$, то передаточная функция системы $G(s)$ по определению равна

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}. \quad (2-3)$$

Передаточная функция может быть записана только для системы, модель которой имеет вид линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, причём начальные условия предполагаются нулевыми. В следующем примере мы определим передаточную функцию схемы, рассмотренной в примере 2.2.

Пример 2.3

Преобразовав по Лапласу первое уравнение, получим

$$R_1 I(s) + R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_1(s).$$

Выразим отсюда $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R_1 + R_2 + 1/sC}.$$

Преобразуем по Лапласу второе уравнение:

$$R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_2(s).$$

Подставим сюда найденное ранее выражение для $I(s)$:

$$V_2(s) = \frac{R_2 + (1/sC)}{R_1 + R_2 + (1/sC)} V_1(s).$$

Отсюда легко получить выражение для передаточной функции $G(s)$:

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}.$$

2.2. Электрические цепи

Таким образом, для схемы рис. 2.2 одинаковую силу имеют как дифференциальные уравнения, полученные в примере 2.2 (или те же уравнения, преобразованные по Лапласу), так и разностная функция, найденная в данном примере. Очевидно, всегда легко можно перейти одной формы уравнений к другой.

В предыдущих примерах был проиллюстрирован процесс получения математической модели электрической цепи. В реальных системах управления обычно присутствуют ещё один важный элемент — *операционный усилитель* (ОУ) [3]. Он используется для усиления слабых сигналов от датчиков, а также в корректирующих устройствах (см. раздел 7.13). На принципиальных схемах операционный усилитель изображается в виде рис. 2.3 (а). Вход, помеченный знаком «минус», называется *инвертирующим*, а помеченный знаком «плюс» — *неинвертирующим*. Положительное и отрицательное напряжения источника питания обозначены соответственно символами V^+ и V^- . На практике принято изображать ОУ без связи с источником питания [см. рис. 2.3 (б)]. На этом рисунке v_d — входное напряжение, а v_0 — выходное напряжение. Операционный усилитель имеет очень большое входное сопротивление, в силу чего токи i^- и i^+ очень малы. Коэффициент усиления ОУ достигает значения 10^5 и выше, поэтому усилитель работает в линейном диапазоне при очень малых входных сигналах.

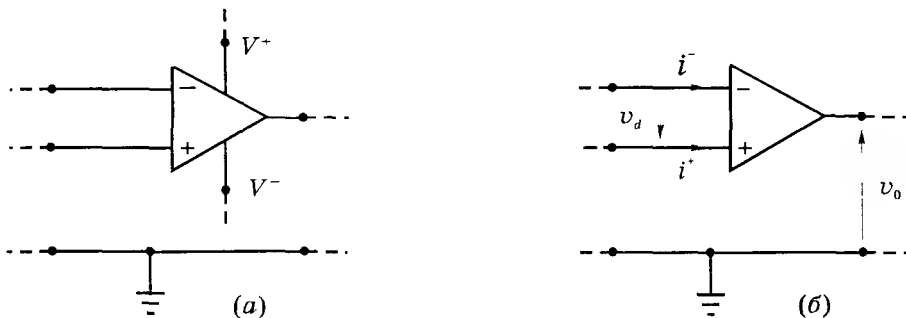


Рис. 2.3. Операционный усилитель

Заметим, что к схеме на рис. 2.3 (б) закон Кирхгофа для токов неприменим, т.к. в ней опущены два соединения.

При анализе работы ОУ предполагается, что он является идеальным, т.е. входные токи i^- и i^+ равны нулю. Кроме того, считают, что идеальный ОУ имеет в диапазоне линейности бесконечный коэффициент усиления, в силу чего входное напряжение v_d равно нулю. В большинстве практических случаев такая модель ОУ является приемлемой.

Поскольку ОУ имеет очень большой коэффициент усиления, то для обеспечения его устойчивой работы необходима обратная связь. Она реализуется путём соединения выхода ОУ с его инвертирующим входом; таким образом, обратная связь оказывается отрицательной, или стабилизирующей.

Пример практической схемы ОУ приведён на рис. 2.4. Эта схема используется для преобразования тока i_1 в напряжение v_0 . Поскольку

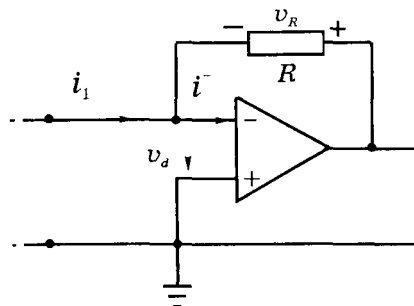


Рис. 2.4. Преобразователь тока в напряжение

ку $i^- = 0$, то весь входной ток i_1 должен протекать через резистор R и, следовательно,

$$v_r = -i_1 R.$$

Т.к. $v_i = 0$, то суммирование напряжений во внешнем контуре, включающем заземление, даёт результат

$$v_0 = v_R = -i_1 R.$$

Отсюда следует, что выходное напряжение равно входному току, умноженному на константу (R) с инверсией знака.

Следующий пример иллюстрирует ещё одно очень полезное применение операционного усилителя.

Пример 2.4

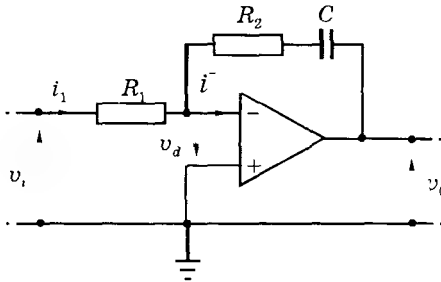


Рис. 2.5. Схема для примера 2.4

Рассмотрим схему, изображённую на рис. 2.5. По-прежнему мы предполагаем, что v_d и i^- равны нулю. Это означает, что ток i_1 протекает через R_2 и C и, считая начальные условия нулевыми, можно записать:

$$v_i = i_1 R_1,$$

$$v_0 = -i_1 R_2 - \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau.$$

Преобразование этих уравнений по Лапласу даёт:

$$V_i(s) = I_1(s) R_1,$$

$$V_0(s) = -\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right) I_1(s).$$

Решая первое уравнение относительно $I(s)$ и подставляя результат во второе, получим

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{sR_1 C}\right) = -\left(\frac{R_2 C s + 1}{R_1 C s}\right) = G(s),$$

т.е. данное выражение есть не что иное, как передаточная функция схемы, если v_i есть её вход, а v_0 — выход. Заметим, что если $R_2 = 0$, то мы получим передаточную функцию интегратора с коэффициентом усиления $-1/R_1 C$, т.е.

$$G(s) = \left(\frac{-1}{R_1 C}\right) \frac{1}{s}.$$

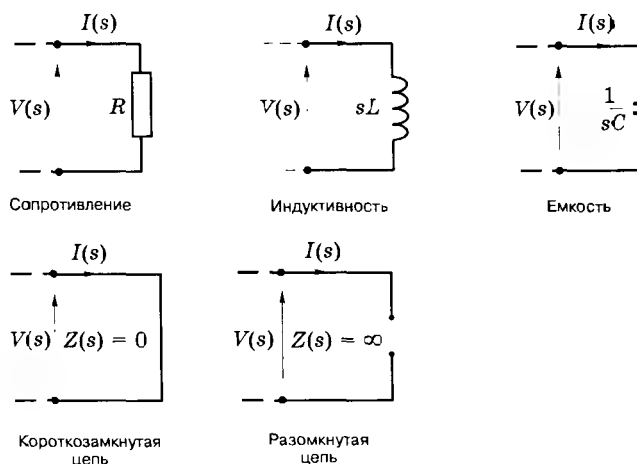
Если же, наоборот, закоротить конденсатор ($C \rightarrow \infty$), то схема превратится в обыкновенный усилитель с коэффициентом усиления $-R_2/R_1$. Обе эти схемы являются основными функциональными элементами аналоговых компьютеров, которые рассматриваются в разделе 3.8.

В заключительной части этого раздела мы рассмотрим метод анализа цепей, называемый *методом полного (операторного) сопротивления*. Заметим, однако, что этот метод применим только в случае нулевых начальных условий. То же самое, как мы видели, является необходимым требованием при определении передаточной функции. В последующих рассуждениях и примерах начальные условия всегда считаются нулевыми, если на этот счёт нет особых указаний.

Рассмотрим основные элементы электрических цепей, ещё раз воспроизведённые на рис. 2.6. Проиллюстрируем метод полного сопротивления на примере индуктивности, ко-

Рис. 2.6

Метод полного сопротивления



торая описывается уравнением

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (2.1)$$

Преобразование по Лапласу этого уравнения даёт

$$V(s) = LsI(s), \quad (2.2)$$

что можно записать в виде

$$V(s) = Z(s)I(s), \quad (2.3)$$

где, по определению, $Z(s)$ есть полное (операторное) сопротивление элемента. В общем случае полное сопротивление пассивной цепи (не содержащей источников электрической энергии) равно отношению изображения по Лапласу падения напряжения на этой цепи к изображению по Лапласу тока, протекающего через цепь. Полное сопротивление определяется всегда между двумя конкретными точками цепи. Полные сопротивления отдельных элементов указаны на рис. 2.6. Так, для резистора

$$Z(s) = R, \quad (2.4)$$

а для конденсатора

$$Z(s) = \frac{1}{sC}. \quad (2.5)$$

При последовательном соединении элементов их полные сопротивления складываются. При параллельном соединении элементов результирующее обратное полное сопротивление цепи равно сумме обратных полных сопротивлений этих элементов. Поясним это на примере.

Пример 2.5

Для схемы, изображённой на рис. 2.7, эквивалентное полное сопротивление $Z_p(s)$ параллельного соединения R и C равно

$$\frac{1}{Z_p(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/sC},$$

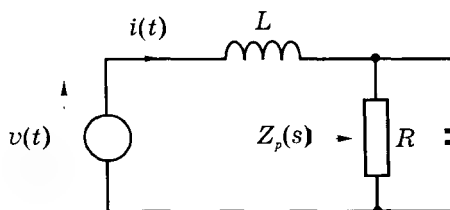


Рис. 2.7. Схема к примеру 2.5

или

$$Z_p(s) = \frac{R}{RCs + 1}.$$

Полное сопротивление всей цепи имеет вид

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL + Z_p(s) = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RCs + 1}.$$

Заметим, что метод полного сопротивления упрощает определение передаточных функций электрических цепей.

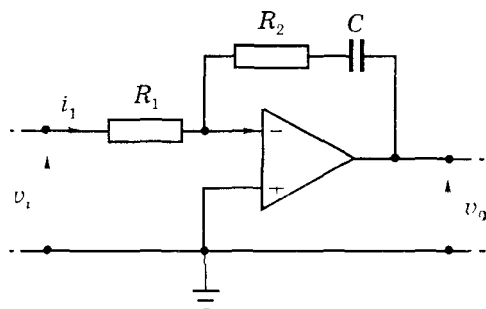


Рис. 2.8. Пример, иллюстрирующий метод полного сопротивления

Рассмотренный метод оказывается очень полезным при определении передаточных функций схем на операционных усилителях. Рассмотрим, например, схему на рис. 2.8 (это — та же схема, с которой мы встречались в примере 2.4). Для данной схемы мы можем записать уравнения

$$V_i(s) = R_1 I_1(s)$$

и

$$V_o(s) = -\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right) I_1(s).$$

Поделив левые и правые части этих уравнений, получим

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs},$$

что даёт ту же самую передаточную функцию, которая более длинным путём была получена в примере 2.4.

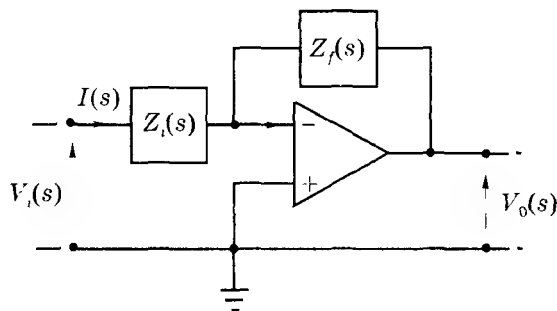


Рис. 2.9. Общий случай ОУ с отрицательной обратной связью

Здесь уместно получить общее выражение для передаточной функции схемы на операционном усилителе (рис. 2.9). На этой схеме $Z_i(s)$ — входное сопротивление, а $Z_f(s)$ — сопротивление цепи обратной связи. Уравнения, описывающие схему, имеют вид:

$$V_i(s) = Z_i(s) I(s)$$

и

$$V_o(s) = -Z_f(s) I(s).$$

Отношение этих двух уравнений даёт выражение для передаточной функции:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}. \quad (2-9)$$

Такая схема часто используется при реализации корректирующих устройств систем управления (к этому вопросу мы вернёмся в разделе 7.13).

2.3. Структурные схемы и графы

В предыдущем разделе было введено понятие передаточной функции линейной систем постоянными параметрами. По определению, передаточная функция — это отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной (при нулевых начальных условиях). Пусть $E(s)$ — входная переменная (в изображении по Лапласу), $C(s)$ — выходная переменная, а $G(s)$ — передаточная функция. Одним из способов графического представления соотношения

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (2)$$

является структурная схема, изображённая на рис. 2.10 (а). Для этой схемы выход определяется умножением передаточной функции (записанной в блоке) на вход. Вход и выход блока обозначаются стрелками, как показано на рисунке.

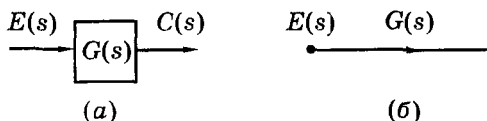


Рис. 2.10. Элементы структурной схемы и графа

Другой способ графического представления соотношения (2-10) связан с использованием графа. Такой граф изображён на рис. 2.10 (б), где каждый сигнал представлен узлом графа, а передаточная функция — ветвью со стрелкой, над которой записана передаточная функция. Сигнал, выходящий из ветви, равен передаточной функции этой ветви, умноженной на сигнал, входящий в ветвь.

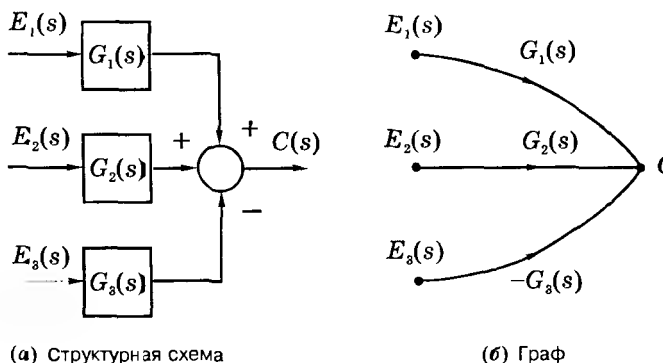
Следует сделать два важных замечания. Во-первых, структурная схема и граф несут одну и ту же информацию. Ни один вариант не имеет преимуществ перед другим; каждый читатель может выбрать любой из них, который покажется ему предпочтительным. Во-вторых, структурная схема (и это также относится к графу) в графической форме представляет уравнение или группу уравнений системы, поскольку она образуется на основе этих уравнений.

Для построения структурной схемы необходим ещё один дополнительный элемент — сумматор. Роль сумматора очевидна из рис. 2.11 (а), в графической форме изображающего уравнение вида

$$C(s) = G_1(s)E_1(s) + G_2(s)E_2(s) - G_3(s)E_3(s). \quad (2)$$

Сумматор на схеме изображён в виде окружности; его выходной сигнал равен алгебраической сумме входных сигналов. Знак каждого входного сигнала указывается у соответствующей стрелки. Заметим, что сумматор может иметь любое количество входов, но только один выход.

Рис. 2.11
Примеры
структурной схемы
и графа



(а) Структурная схема

(б) Граф

В графе функцию суммирования выполняет узел, как показано на рис. 2.11 (б). Сигнал в узле равен сумме сигналов ветвей, входящих в этот узел. Следующий пример иллюстрирует построение структурной схемы и графа.

Пример 2.6

Допустим, даны следующие уравнения:

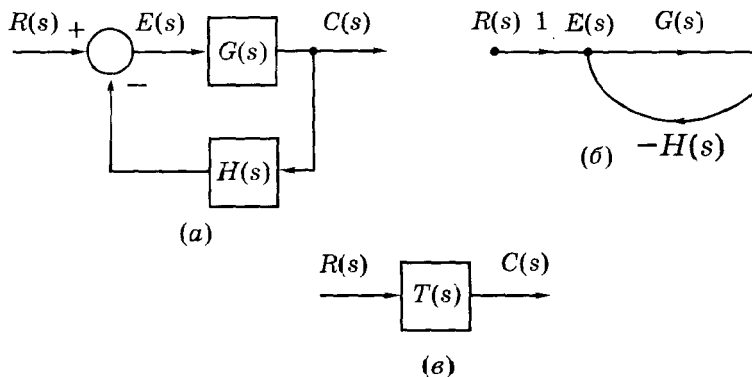
$$E(s) = R(s) - H(s)C(s),$$

$$C(s) = G(s)E(s).$$

Известно, что $R(s)$ и $C(s)$ — соответственно внешние входной и выходной сигналы, $E(s)$ — внутренний сигнал, а $G(s)$ и $H(s)$ — передаточные функции. Первое уравнение соответствует сумматору, а второе используется для завершения построения структурной схемы. Результат показан на рис. 2.12 (а). Рис. 2.12 (б) представляет собой те же уравнения, но в виде графа. Отметим, что топология структурной схемы и графа идентичны. Так будет всегда, если при построении используется один и тот же приём работы с уравнениями.

Рис. 2.12

Примеры представления системы



Заметим, что уравнения, приведённые в предыдущем примере, можно решить относительно $C(s)$. Действительно, подставляя первое уравнение во второе, получим:

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s). \quad (2)$$

Выражая из этого уравнения $C(s)$, одновременно получим передаточную функцию системы $T(s)$:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = T(s)R(s). \quad (2)$$

Таким образом, систему можно представить в виде одного блока, как показано на рис. 2.12 (е).

Рассмотренный выше метод удобен в применении, когда система описывается двумя или тремя уравнениями. В более сложных случаях целесообразно воспользоваться процедурой, основанной на правиле Крамера [4]. Этот метод требует, прежде всего, чтобы уравнения были записаны в векторно-матричной форме. Для последнего примера выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

что в общем виде записывается как

$$Ax = y, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} E(s) \\ C(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2-1)$$

В соответствии с матричными операциями (см. приложение А), уравнение (2-1) можно решить относительно $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}, \quad (2-1)$$

где через $\mathbf{A}^{-1}$ обозначена матрица, обратная $\mathbf{A}$. Применяя эту процедуру к уравнению (2-14), мы получим решение как для $E(s)$, так и для $C(s)$. Если нас интересует только $C(s)$, правило Крамера позволяет сделать это гораздо проще; его применение к уравнению (2-1) даёт решение в виде отношения двух определителей:

$$C(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R(s) \\ G(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{vmatrix}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = T(s)R(s). \quad (2-1)$$

Правило Крамера, применяемое к уравнению общего вида (2-15), заключается в следующем. Решение всегда представляет собой отношение двух определителей. Определитель в знаменателе — это определитель матрицы $\mathbf{A}$. Теперь предположим, что нас интересует решение для переменной в i -й строке вектора $\mathbf{x}$. В этом случае определитель в числителе дроби получается из определителя, стоящего в знаменателе, заменой в нём i -столбца на вектор $\mathbf{y}$. Обратите внимание, что в (2-18), в соответствии с правилом Крамера определитель в числителе дроби есть определитель матрицы $\mathbf{A}$, в котором второй столбец заменен на вектор $\mathbf{y}$ из (2-14) или (2-16).

Из всех предшествующих рассуждений мы можем заключить, что модели линейных стационарных систем имеют вид линейных дифференциальных уравнений, к которым применимо преобразование Лапласа. В этом случае искомое решение может быть получено путём исключения переменных, с помощью правила Крамера или с использованием матричных операций. Последние два метода предпочтительнее, т.к. при их применении проще избежать ошибок. В следующем разделе рассматривается несколько иной подход, известный как формула Мейсона. Данный метод, в частности, обладает определённым преимуществом при анализе простых систем, однако если будет допущена какая-либо ошибка, её очень трудно обнаружить.

2.4. Формула Мейсона

В этом разделе мы рассмотрим процедуру определения передаточной функции непосредственно по структурной схеме или по графу. Эта процедура получила название *формулы Мейсона* [5]. Несмотря на кажущуюся простоту данной процедуры, её следует применять чрезвычайно осторожно, т.к. можно очень легко упустить из виду некоторые члены в числителе или в знаменателе передаточной функции. К тому же не существует такого метода, который позволил бы обнаружить, что какие-то члены были «потеряны». Однако при наличии некоторого опыта формулой Мейсона можно уверенно пользоваться применительно к простым системам.

Здесь мы сформулируем правила применения формулы Мейсона в отношении графов. Такие же правила действуют, если анализируется структурная схема. Сначала на

дать определение для двух типов узлов графа — *источника* (входного узла) и *стока* (выходного узла).

Узел-источник — это узел, из которого сигналы только *вытекают*, т.е. на всех ветвях, связанных с этим узлом, стрелки направлены *от* узла.

Узел-сток — это узел, в который все сигналы только *втекают*.

Эти определения проиллюстрированы на рис. 2.13(а). На этом рисунке $R(s)$ — это узел-источник, а крайний правый узел $C(s)$ — узел-сток. Заметим, что к исходному узлу $C(s)$ искусственно добавлена ветвь с единичным коэффициентом для того, чтобы создать узел-сток. Это всегда можно сделать, поскольку данная операция не изменяет математическое выражение для $C(s)$. Однако в общем случае с помощью аналогичной операции (добавление ветви с единичным коэффициентом) нельзя образовать узел-источник, так это приведёт к изменению математического выражения для исходного узла. Чтобы убедиться в этом, запишем выражение для $E(s)$ на рис. 2.13(а):

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s).$$

Если мы теперь добавим ветвь с единичным коэффициентом, пытаясь сделать $E(s)$ узлом-источником, как показано на рис. 2.13(б), то выражение для $E(s)$ примет вид:

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) + E(s),$$

что, очевидно, принципиально отличается от предыдущего выражения. Из этого примера следует важный вывод: мы можем преобразовывать (изменять конфигурацию) граф и структурную схему только при условии, что это преобразование не изменяет исходные уравнения системы.

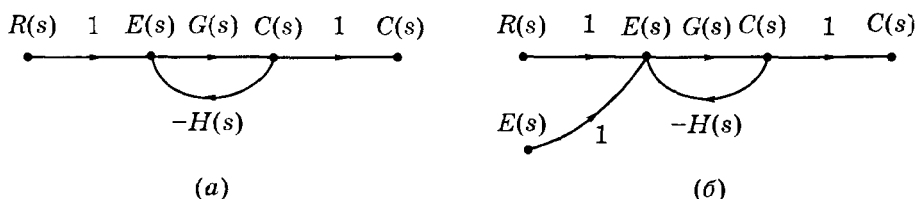


Рис. 2.13. Сигнальные графы

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые дополнительные определения.

Путь — это непрерывная последовательность ветвей от узла к узлу, причём стрелки на всех ветвях направлены в одну и ту же сторону, т.е. все сигналы распространяются в одном направлении.

Контур — это замкнутый путь, в котором стрелки на всех ветвях направлены в одну и ту же сторону и в котором каждый узел встречается не более одного раза. Заметим, что узел-источник не может быть частью контура, т.к. каждый узел в контуре должен иметь по крайней мере одну ветвь, входящую в него, и одну ветвь, выходящую из него.

Прямой путь — это путь от узла-источника к узлу-стоку, в котором ни один узел не встречается более одного раза.

Коэффициент передачи пути — произведение передаточных функций всех ветвей, образующих путь.

Коэффициент передачи контура — произведение передаточных функций всех ветвей, образующих контур.

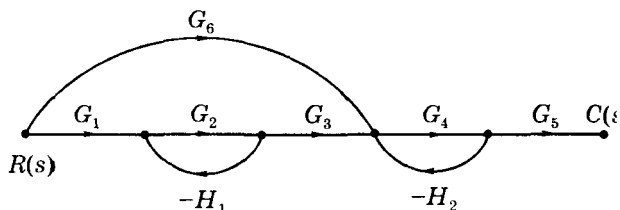
Некасающиеся контуры — контуры, не имеющие общих узлов.

Контур и путь также являются некасающимися, если у них нет общих узлов.

Все эти определения проиллюстрированы на примере графа, изображённого на рис. 2.14. Здесь мы имеем два контура, один с коэффициентом передачи $-G_2H_1$ и другой с коэффициентом передачи $-G_4H_2$. Заметим, что эти два контура не касаются друг друга. Граф имеет два прямых пути от входа $R(s)$ к выходу $C(s)$: один с коэффициентом передачи $G_1G_2G_3G_4G_5$ и другой с коэффициентом передачи $G_6G_4G_5$. Отметим, что прямой путь $G_6G_4G_5$ не касается контура $-G_2H_1$, но касается другого контура. Путь $G_1G_2G_3G_4G_5$ касается обоих контуров.

Рис. 2.14

Пример графа



Используя данные определения, мы можем теперь привести формулу Мейсона. Эта формула определяет передаточную функцию *только* от узла-источника (вход) к узлу-стоку (выход) и имеет вид

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^p M_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} (M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + \dots + M_p \Delta_p), \quad (2.1)$$

где T — коэффициент передачи (передаточная функция) от входного узла к выходному узлу, p — число прямых путей, и

Δ — (сумма коэффициентов передачи всех *отдельных* контуров)

Δ_k — (сумма произведений коэффициентов передачи всех возможных комбинаций некасающихся контуров, взятых по два)

Δ_{k-1} — (сумма произведений коэффициентов передачи всех возможных комбинаций некасающихся контуров, взятых по три)

Δ_{k-2} — (сумма произведений коэффициентов передачи всех возможных комбинаций некасающихся контуров, взятых по четыре)

(...),

M_k — коэффициент передачи k -го прямого пути, Δ_k — значение Δ для той части графа, которая не касается k -го прямого пути.

Поясним применение формулы Мейсона на примерах.

Пример 2.7

Сначала обратимся вновь к системе на рис. 2.13 (а). Эта система имеет единственный контур с коэффициентом передачи

$$L_1 = G(s)H(s)$$

и следовательно,

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G(s)H(s).$$

Мы имеем один прямой путь с коэффициентом передачи

$$M_1 = (1)G(s)(1) = G(s).$$

Кроме того, этот прямой путь касается только одного контура (т.е. имеет с ним, по крайней мере, один общий узел). Следовательно, в этой части графа не остаётся контуров, которые

касались бы прямого пути, так что

$$\Delta_1 = 1.$$

Тогда, в соответствии с формулой (2-19), передаточная функция

$$T(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)},$$

что совпадает с её выражением в (2-18).

Решение для $C(s)$ может быть получено с помощью простой программы MATLAB:

```
syms e c r g h
eq1=e-r+h*c;
eq2=c-g*e;
s=solve(eq1,eq2,e,c)
s.c
```

Предположим теперь, что в примере 2.7 мы хотим выразить выход $C(s)$ через $E(s)$ в данном случае формулу Мейсона применить *нельзя*, т.к. $E(s)$ не является узлом-источником. В то же время из самой схемы видно, что $C(s) = G(s)E(s)$.

Пример 2.8

В качестве второго примера на применение формулы Мейсона рассмотрим снова систему рис. 2.14. Обозначим через L_i коэффициент передачи i -го контура. Тогда коэффициенты передачи двух контуров могут быть записаны как

$$L_1 = -G_2H_1; \quad L_2 = -G_4H_2.$$

На рис. 2.14 мы имеем два прямых пути; их коэффициенты передачи равны

$$M_1 = G_1G_2G_3G_4G_5; \quad M_2 = G_6G_4G_5.$$

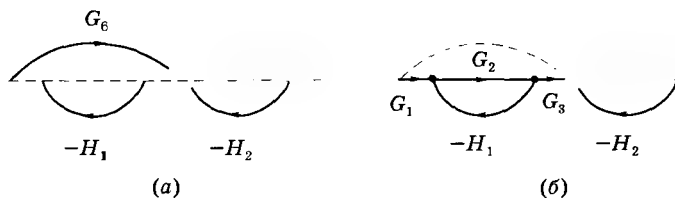
Значение Δ можно определить непосредственно по схеме рис. 2.14:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1L_2 = 1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2.$$

Последний член в этом выражении появился в силу того, что два контура являются некасающимися, т.е. они не имеют общих узлов.

Рис. 2.15

Графы с исключенными прямыми путями



Определение значений Δ_i является более сложным. Как было замечено ранее, Δ_1 есть значение Δ для той части графа, которая не касается первого прямого пути. Один из способов нахождения Δ_1 состоит в исключении из графа первого прямого пути. Разумеется, при этом должны быть удалены и все узлы первого прямого пути. Результат этой операции показан на рис. 2.15 (а). Рис. 2.15 (б) показывает результат исключения второго прямого пути. Следовательно, Δ_1 — это просто значение Δ для графа на рис. 2.15(а), а Δ_2 — это значение Δ для графа рис. 2.15 (б). Таким образом,

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1 - (-G_2H_1),$$

поскольку рис. 2.15 (а) не содержит контуров, а рис. 2.15 (б) имеет один контур. Тогда в основании (2-19), мы можем записать передаточную функцию системы на рис. 2.14:

$$T = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_6G_4G_5(1 + G_2H_1)}{1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2}.$$

Заметим, что даже в этом относительно простом примере в передаточной функции появляется достаточно много членов. Какие-то из них в процессе вычислений могут быть просто «потеряны». Проверить результат можно только алгебраическими методами, например, с помощью правила Крамера, что мы и сделаем в следующем примере.

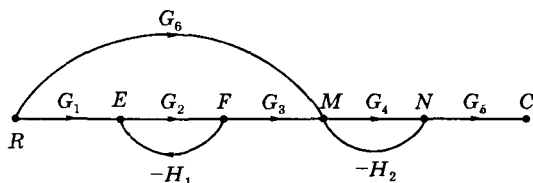
Пример 2.9

Чтобы проверить передаточную функцию, полученную в примере 2.8, необходимо записать систему уравнений для графа, изображенного на рис. 2.14. Сначала каждому узлу надо поставить соответствие переменную, как это показано на рис. 2.16. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} E &= G_1 R - H_1 F & \Rightarrow & E + H_1 F = G_1 R \\ F &= G_2 E & \Rightarrow & -G_2 E + F = 0 \\ M &= G_3 F + G_6 R - H_2 N & \Rightarrow & -G_3 F + M + H_2 N = G_6 R \\ N &= G_4 M & \Rightarrow & -G_4 M + N = 0 \\ C &= G_5 N & \Rightarrow & -G_5 N + C = 0 \end{aligned}$$

Рис. 2.16

Граф с обозначением
входов сигналов



Во второй системе уравнений левая часть содержит неизвестные сигналы, а правая часть — известные.

Эти уравнения можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ M \\ N \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R,$$

или в векторной форме

$$Ax = y.$$

Чтобы воспользоваться правилом Крамера, сначала найдем определитель матрицы A , который обозначим $\det A$. Этот определитель находится с помощью метода миноров (см. приложение А)

А) Раскрывая определитель A по первому столбцу, получим:

$$\det A = (1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix} + G_2 \begin{vmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Итем каждый из этих определителей можно раскрыть по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & H_2 & 0 \\ -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix} + G_2 H_1 \begin{vmatrix} 1 & H_2 & 0 \\ -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее каждый из определителей раскрываем по последнему столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & H_2 \\ -G_4 & 1 \end{vmatrix} + G_2 H_1 \begin{vmatrix} 1 & H_2 \\ -G_4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + G_4 H_2 + G_2 H_1 (1 + G_4 H_2).$$

Как видим, это выражение совпадает со знаменателем передаточной функции, полученной в примере 2.8.

Числитель передаточной функции равен значению определителя, полученного после замены пятого столбца матрицы A на входной вектор матричного уравнения. Это объясняется тем, что C есть пятая переменная неизвестного вектора.

Таким образом, искомый определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & H_1 & 0 & 0 & G_1 R \\ -G_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & 1 & H_2 & G_5 R \\ 0 & 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Читателю в порядке упражнения предлагается доказать, что этот определитель равен числителю передаточной функции, полученной в примере 2.8.

Решение для $C(s)$ может быть получено с помощью следующей программы MATLAB:

```
syms s e f r m n g1 g2 g3 g4 g5 g6 h1 h2
eq1=e-g1*r+h1*f;
eq2=-g2*e+f;
eq3=m-g3*f-g6*r+h2*n;
eq4=n-g4*m;
eq5=c-g5*n;
s=solve(eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, e, c, f, m, n)
s.c
```

Из рассмотренных примеров следует вывод, что формулу Мейсона можно рассматривать как графическую интерпретацию правила Крамера или процедуры, связанной схождением обратной матрицы.

Как мы заметили выше, формулу Мейсона можно применить и непосредственно к структурной схеме. Надо всего лишь каждый термин, используемый при описании графа, перевести на язык описания структурных схем. При этом под *сигналом* следует понимать любой вход или любой выход блока или сумматора.

Граф		Структурная схема
Входной узел	→	Входной сигнал
Выходной узел	→	Выходной сигнал
Ветвь	→	Блок
Узел	→	Сигнал

Заметим, что за выходной сигнал может быть принят любой внутренний сигнал структурной схемы.

2.5. Механические системы с линейным перемещением

В данном разделе мы рассмотрим модели элементов, из которых состоят механические системы с линейным перемещением, и метод составления уравнений таких систем. Параметрами механических элементов являются *масса*, *демпфирование (трение)* и *упругость (эластичность)*. Символическое изображение этих элементов приведено на рис. 2.17. Напомним еще раз, что математическая модель не всегда может правильно описывать поведение

реальной физической системы. Подобно тому, как мы поступали с элементами электрических цепей, будем каждому механическому элементу ставить в соответствие математические уравнения (которые, разумеется, будут справедливы в определенных рамках). Заметим также, что движение может происходить только в одном направлении.

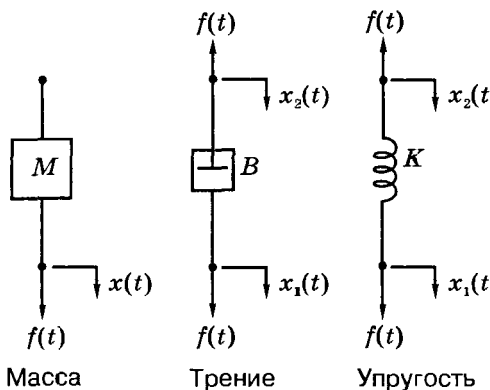
Теперь дадим определение механическим элементам с линейным перемещением. Сначала рассмотрим *массу*. На рис. 2.17 $f(t)$ есть приложенная сила, $x(t)$ — перемещение, M — масса (все — в соответствующих единицах измерения). Тогда, в соответствии с вторым законом Ньютона,

$$f(t) = Ma(t) = M \frac{dv(t)}{dt} = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad (2-1)$$

где $v(t)$ — скорость, а $a(t)$ — ускорение. Предполагается, что масса является жесткой, и верхняя точка, с которой она соединена, не может перемещаться относительно нижней точки. Следовательно, положение верхней точки также равно $x(t)$.

Рис. 2.17

Элементы механических систем с линейным перемещением



Для двух остальных механических элементов верхняя точка может перемещаться относительно нижней точки. Следовательно, для описания движения этих элементов потребуются две переменные. Рассмотрим сначала *трение* (рис. 2.17). Физическим аналогом здесь может служить вязкое трение в масле, воздухе и т.д. Устройством, которое моделируется в виде трения, является, например, амортизатор автомобиля. Математическая модель трения имеет уравнение

$$f(t) = B \left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right], \quad (2-2)$$

где B — коэффициент демпфирования. Заметим, что сила трения прямо пропорциональна относительной скорости элемента.

Последним механическим элементом данной группы является *пружина*. Уравнение движения в этом случае определяется законом Гука:

$$f(t) = K[x_1(t) - x_2(t)], \quad (2-3)$$

т.е. сила прямо пропорциональна разности положений концов пружины. Приведенные уравнения справедливы для сил и перемещений, направление которых на рис. 2.17 обозначено стрелками. Если какое-либо из направлений меняется на обратное, то в уравнении надо изменить знак соответствующего члена. Кроме того полагают, что элементы трения и пружины имеют нулевую массу.

Из рассмотренных механических элементов трение всегда сопровождается потерей энергии и не может служить причиной ее накопления. Напротив, масса и пружина могут накапливать энергию, но не могут ее рассеивать.

В основе уравнений движения этих механических элементов лежит закон Ньютона, который гласит:

Сумма сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение.

Применение этого закона к движению механических элементов проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 2.10

Рассмотрим простую механическую систему, изображенную на рис. 2.18. По-прежнему предполагаем, что движение происходит только в одном направлении, как указано стрелкой у $x(t)$. Никакое движение в поперечном направлении не допускается. На тело массы M действуют три силы: внешняя сила, сила трения и упругая сила. Следовательно, мы можем записать:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - B \frac{dx}{dt} - Kx.$$

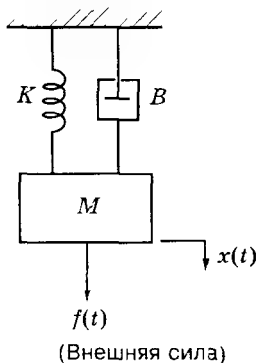


Рис. 2.18
Механическая система перемещения

Заметим, что каждый элемент должен вносить свой вклад в сумму сил, действующих на эту систему.

Для данной системы передаточная функция должна связывать приложенную внешнюю силу $f(t)$ и положение массы $x(t)$. Преобразование по Лапласу предыдущего уравнения дает:

$$F(s) = Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = (Ms^2 + Bs + K)X(s).$$

Поскольку мы определяем передаточную функцию, то начальные условия полагаем нулевыми. Таким образом, передаточная функция равна

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}. \quad (2-1)$$

Пример 2.11

Рассмотрим теперь механическую систему, изображенную на рис. 2.19. Это упрощенная модель тормозной системы автомобиля в расчете на одно колесо, где M_1 — масса автомобиля, B — степень амортизации, K_1 — жесткость пружин, M_2 — масса колеса и K_2 — упругость шины. В данном случае нам нужны два уравнения, поскольку имеют место два независимых перемещения, т.е., зная перемещение $x_1(t)$, ничего не можем сказать о перемещении $x_2(t)$. Сначала определим все силы, действующие на массу M_1 . Эта масса на рис. 2.19 очерчена пунктиром, и каждый элемент, который на рисунке проникает внутрь этого контура, обуславливает силу, действующую на M_1 . Следовательно, уравнение состоит из трех членов (сила, действующая непосредственно на массу, отсутствует):

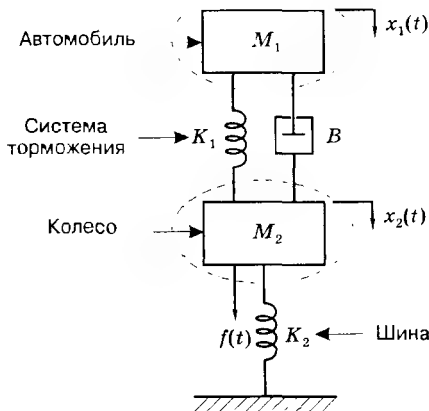


Рис. 2.19. Система к примеру 2.11

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -B \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - K_1(x_1 - x_2).$$

Теперь найдем сумму сил, действующих на M_2 . Здесь, кроме приложенной силы $f(t)$, задействованы еще три элемента. Следовательно, уравнение содержит пять членов:

$$M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f(t) - B \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - K_1(x_2 - x_1) - K_2 x_2.$$

Группируя члены и применяя преобразование Лапласа, получим:

$$M_1 s^2 X_1(s) + B[sX_1(s) - sX_2(s)] + K_1[X_1(s) - X_2(s)] = 0,$$

$$M_2 s^2 X_2(s) + B[sX_2(s) - sX_1(s)] + K_1[X_2(s) - X_1(s)] + K_2 X_2(s) = F(s).$$

Предположим, что нас интересует передаточная функция, связывающая $F(s)$ и $X_1(s)$, т.е. си- приложенную к колесу, и перемещение автомобиля. Ее можно найти путем исключения X_2 из двух приведенных выше уравнений. Для этого можно построить граф и воспользоваться формулой Мейсона. Этот путь не является оптимальным, но читателю лишний раз дается возможность поупражняться в построении графа и применении формулы Мейсона. Уравнения держат три переменных, следовательно, граф должен иметь три узла, из которых один был бы источником для сигнала $F(s)$. Первое уравнение должно быть решено относительно X_1 и второй переменной, а второе — относительно другой. Выберем первое уравнение и выразим $X_1(s)$:

$$X_1(s) = \frac{Bs + K_1}{M_1 s^2 + Bs + K_1} X_2(s) = G_1(s) X_2(s).$$

С целью компактности записи здесь использована дробно-рациональная функция $G_1(s)$ — отношение двух полиномов.

Далее из второго уравнения выразим $X_2(s)$:

$$X_2(s) = \frac{1}{M_2 s^2 + Bs + K_1 + K_2} F(s) + \frac{Bs + K_1}{M_2 s^2 + Bs + K_1 + K_2} X_1(s) = G_2(s) F(s) + G_3(s) X_1(s).$$

Граф для данной системы изображен на рис. 2.20 (а). Передаточная функция, найденная с помощью формулы Мейсона, имеет вид:

$$T(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 - G_1(s) G_3(s)}.$$

После преобразований получим:

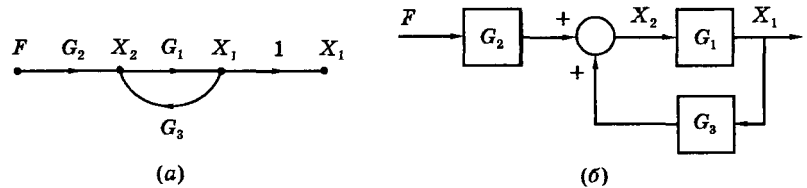
$$T(s) = \frac{Bs + K_1}{M_1 M_2 s^4 + B(M_1 + M_2) s^3 + (K_1 M_2 + K_1 M_1 + K_2 M_1) s^2 + K_2 Bs + K_1 K_2}.$$

Как видим, система имеет четвертый порядок. Ее динамика полностью описывается дан передаточной функцией. При заданных массе автомобиля, массе колеса и упругости шassi плоскость движения определяется параметрами амортизатора и пружин. Эти параметры используются при настройке системы с целью получения приемлемого качества. По мере износа амортизатора изменяется значение параметра B , что, в свою очередь, влияет на передаточную функцию, а, значит, и на качество движения. Заметим, что изначальная установка амортизатора с неправильно выбранным значением параметра B дает тот же самый эффект.

Граф, изображенный на рис. 2.20 (а), не является единственно возможным. Если первое уравнение решить относительно $X_2(s)$, а второе относительно $X_1(s)$, то граф будет иметь совсем иной вид. Однако передаточная функция $T(s) = X_1(s)/F(s)$ при этом, конечно, не изменится (см. задачу 2.16).

В последнем примере граф был построен для того, чтобы проиллюстрировать применение формулы Мейсона. Вместо него можно было бы воспользоваться структурной с

Рис. 2.20
Модели для
примера 2.11



мой, изображенной на рис. 2.20 (б). Заметим, что топология структурной схемы и графа идентичны, т.к. в основе этих моделей лежат одни и те же уравнения. Поэтому формулу Мейсона с таким же успехом можно применить и к структурной схеме. Читателю предлагается убедиться, что передаточная функция будет иметь то же самое выражение.

Следует обратить внимание на один важный момент. В последнем примере структурная схема была построена на основании уравнений системы. Обычно поступают несколько иначе, стремясь к тому, чтобы каждый блок структурной схемы, насколько это возможно, соответствовал определенной физической части реальной системы. Такой подход позволяет глубже проникнуть в физическую сущность моделируемого явления.

2.6. Механические системы с вращательным движением

В данном разделе рассматриваются элементы механических систем с вращательным движением. Их уравнения аналогичны соответствующим уравнениям системы с линейным перемещением, и при их составлении используются те же самые рассуждения.

На рис. 2.21 изображены три элемента, характеризующиеся вращательным движением. Первый элемент, *момент инерции*, описывается уравнением

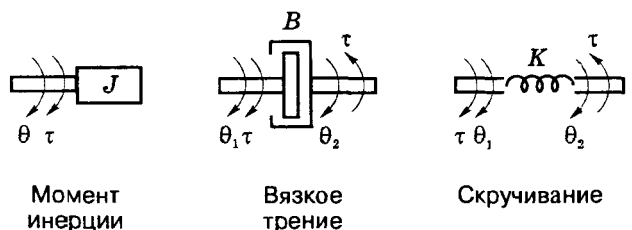
$$\tau(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = J \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (2-24)$$

где $\tau(t)$ — приложенный вращающий момент, J — момент инерции, $\theta(t)$ — угол поворота и $\omega(t)$ — угловая скорость. Это уравнение по форме совпадает с уравнением (2-20) для массы. Фактически момент инерции тела является функцией его массы и геометрических параметров. Для второго элемента на рис. 2.21, *трения*, уравнение имеет вид:

$$\tau(t) = B \left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \right] = B [\omega_1(t) - \omega_2(t)], \quad (2-25)$$

где $\tau(t)$ — вращающий момент, B — коэффициент трения, $\theta(t)$ — угол поворота и $\omega(t)$ — угловая скорость. Предполагается, что момент инерции вращающегося элемента равен нулю, а трение возникает между двумя частями этого элемента.

Рис. 2.21
Механические элементы
с вращательным движением



Для третьего элемента на рис. 2.21, *скручивающейся пружины*, уравнение имеет вид

$$\tau(t) = K[\theta_1(t) - \theta_2(t)], \quad (2.12)$$

где K — коэффициент упругости. Опять-таки предполагается, что момент инерции данного элемента равен нулю. В основе уравнений, описывающих вращательное движение механической системы, лежит принцип, согласно которому сумма моментов сил относительно оси вращения равна произведению момента инерции на угловое ускорение. Ниже рассматриваются два примера.

Пример 2.12

Рассмотрим крутящийся маятник и его модель (рис. 2.22). Маятник такого типа обычно применяется в часах, закрытых стеклянным колпаком. Момент инерции маятника равен J , трение воздуха характеризуется коэффициентом B , а упругость латунной пружинной подвески — коэффициентом K . Предполагается, что вращающий момент приложен непосредственно к маятнику, тогда как в часах он с помощью сложного механизма передается от заводной пружины. Суммируя моменты сил, действующих на маятник, получим:

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \tau(t) - B \frac{d\theta(t)}{dt} - K\theta(t). \quad (2.13)$$

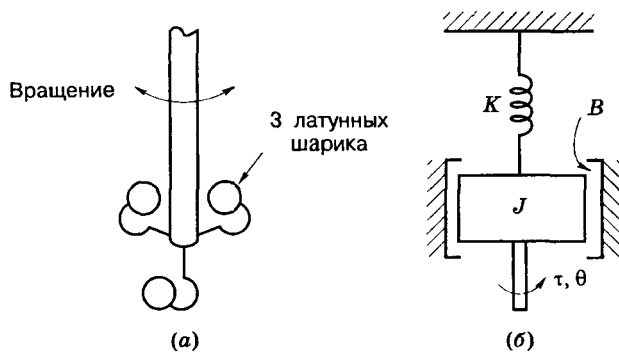
Отсюда нетрудно выразить передаточную функцию:

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K}. \quad (2.14)$$

Отметим сходство этого выражения с передаточной функцией, полученной в примере 2.1 действительности, многие физические системы различного типа могут быть достаточно точно охарактеризованы передаточной функцией второго порядка, наподобие той, что получена в этом примере. Подробнее об этом речь пойдет в одном из последующих разделов, посвященном подобным системам.

Рис. 2.22

Система
к примеру 2.12:
(а) крутящийся
маятник,
(б) модель



Пример 2.13

Вторым примером системы с вращательным движением является модель спутника, изображенная на рис. 2.23. Предполагается, что спутник жесткий, трение отсутствует, и что он вращается относительно оси, перпендикулярной странице книги. Вращающий момент, прикладываемый к спутнику, создается двигателями. Например, если включены два двигателя, как показано на рис. 2.23, это приводит к увеличению угла θ . Если же включена другая пара двигателей, то угол θ имеет тенденцию к уменьшению. Предполагается, что момент $\tau(t)$, создаваемый двигателями, является входом системы, а угол $\theta(t)$ — ее выходом. Тогда

$$\tau(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2},$$

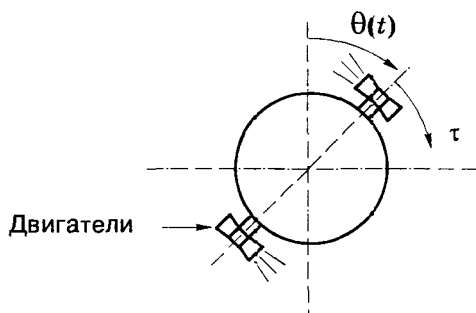


Рис. 2.23. Спутник

поскольку трение о воздух отсутствует (J — момент инерции спутника). В этом случае передаточная функция равна

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}. \quad (2-29)$$

Это достаточно точная модель жесткого спутника, и она часто используется во многих примерах в силу ее простоты. Однако, если к спутнику прикреплены солнечные панели, то допущение о его жесткости уже не действует (одни части спутника могут перемещаться относительно других частей), и модель получается более сложной.

2.7. Электромеханические системы

В данном разделе исследуются модели двух разных электромеханических систем, а именно генератора и двигателя постоянного тока. Рассмотрим сначала модель генератора.

2.7.1. Генератор постоянного тока

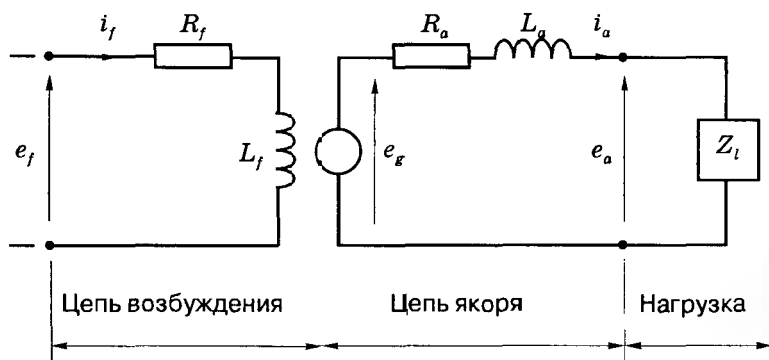
Предполагается, что генератор получает энергию от приводного двигателя, обладающего достаточной мощностью, так что подключение к генератору электрической нагрузки не влияет на скорость его вращения. Кроме того, считается, что генератор вращается с постоянной скоростью. Эквивалентная схема генератора приведена на рис. 2.24. Уравнение цепи возбуждения имеет вид:

$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}, \quad (2-30)$$

где зависимость переменных от времени для удобства опущена. В этом уравнении e_f — это напряжение возбуждения, которое принимается за вход системы. Величины i_f , R_f и L_f есть, соответственно, ток возбуждения, сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения. Уравнение для цепи якоря имеет вид:

$$e_g = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a, \quad (2-31)$$

Рис. 2.24
Генератор
постоянного тока



где e_g — ЭДС генератора, i_a — ток в цепи якоря, e_a — напряжение, снимаемое с якоря, L — соответственно сопротивление и индуктивность якорной обмотки. ЭДС генератора магнитный поток возбуждения связаны соотношением [6]

$$e_g = K\psi \frac{d\theta}{dt}. \quad (2-)$$

В этом уравнении K — параметр, который определяется конструктивными особенностями генератора, а $d\theta/dt$ — угловая скорость вращения якоря. Поскольку скорость вращения предполагается постоянной, а поток ψ пропорционален току возбуждения i_f , то ЭДС генератора можно записать в виде

$$e_g = K_g i_f. \quad (2-)$$

При дальнейших рассуждениях все начальные условия полагаются нулевыми, поскольку определению подлежит передаточная функция. Преобразование по Лапласу уравнений (2-30) и (2-33) дает соответственно:

$$E_f(s) = (sL_f + R_f) I_f(s), \quad (2-)$$

$$E_g(s) = K_g I_f(s). \quad (2-)$$

Уравнения для цепи якоря записаны с помощью метода полного сопротивления, рассмотренного в разделе 2.2. Считая, что $Z_a(s)$ есть полное сопротивление цепи якоря, а $Z_l(s)$ — полное сопротивление нагрузки генератора, запишем:

$$I_a(s) = \frac{E_g(s)}{Z_a(s) + Z_l(s)} = \frac{E_g(s)}{L_a s + R_a + Z_l(s)} \quad (2-)$$

и

$$E_a(s) = I_a(s) Z_l(s). \quad (2-)$$

В предыдущих уравнениях предполагалось, что напряжение возбуждения $E_f(s)$ — вход системы, а напряжение, снимаемое с якоря, $E_a(s)$ — это выход системы. Следовательно, мы имеем четыре неизвестных: $I_f(s)$, $E_g(s)$, $I_a(s)$ и $E_a(s)$. Чтобы найти передаточную функцию, нам надо из уравнений (2-34), (2-35), (2-36) и (2-37) исключить все промежуточные переменные, оставив связь только между входом и выходом. Однако сначала на основании этих уравнений построим структурную схему и получим передаточную функцию на ее основе. Сначала из (2-34) выразим $I_f(s)$:

$$I_f(s) = \frac{E_f(s)}{L_f s + R_f}, \quad (2-)$$

и это выражение позволяет нам изобразить первый блок на рис. 2.25. Второй блок мы получим непосредственно из уравнения (2-35). Третий блок на схеме появляется за счет уравнения (2-36), а четвертый воспроизводит уравнение (2-37).

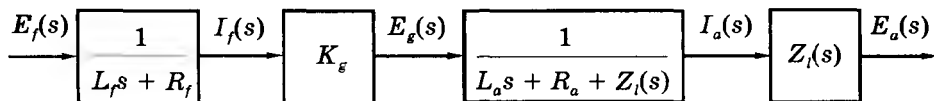


Рис. 2.25. Структурная схема генератора постоянного тока

Поскольку структурная схема на рис. 2.25 не имеет контуров с обратной связью, передаточная функция находится путем перемножения операторных коэффициентов

редачи всех четырех блоков:

$$G(s) = \frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{K_g Z_l(s)}{(L_f s + R_f)(L_a s + R_a + Z_l(s))}. \quad (2-39)$$

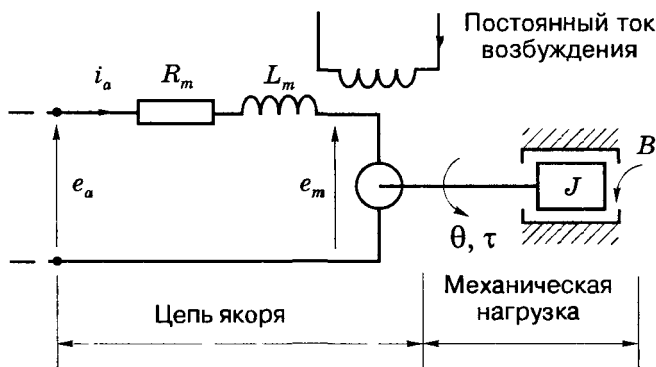
Заметим, что хотя мы и называем этот объект генератором *постоянного* тока, передаточная функция (2-39) позволяет определить характер изменения выходного напряжения в случае, если напряжение возбуждения будет являться определенной функцией времени. Следовательно, выражение (2-39) описывает *динамику* генератора.

Выражение (2-39) говорит о том, что изменение параметров нагрузки влияет на передаточную функцию системы. Подобное часто происходит на практике, и инженеру надлежит быть внимательным, чтобы не упустить из виду этот эффект при определении передаточной функции.

2.7.2. Двигатель постоянного тока

Теперь мы займемся построением модели двигателя постоянного тока (сервопривода). *Сервопривод* — это такой электродвигатель [7], который предназначен специально для использования в замкнутых системах управления. Эквивалентная схема сервопривода изображена на рис. 2.26. На этом рисунке $e_a(t)$ есть напряжение, подаваемое на якорь, которое

Рис. 2.26
Сервопривод



считается входом системы. Сопротивление и индуктивность цепи якоря равны, соответственно, R_m и L_m . Напряжение $e_m(t)$, возникающее в обмотке якоря в результате его вращения в магнитном поле, обычно называется противоЭДС. Следовательно, мы можем записать:

$$e_m(t) = K\Psi \frac{d\theta}{dt}, \quad (2-40)$$

где K — параметр электродвигателя, Ψ — магнитный поток, а θ — угол поворота ротора двигателя; следовательно, $d\theta/dt$ — это угловая скорость вращения двигателя. Мы предполагаем, что поток Ψ остается постоянным, следовательно

$$e_m(t) = K_m \frac{d\theta}{dt}. \quad (2-41)$$

Сделанное допущение очень важно, т.к. если поток изменяется во времени, то уравнение (2-40) становится нелинейным, поскольку в его правой части оказывается произведение двух переменных. В этом случае нельзя применять преобразование Лапласа, и анализ ста-

2.7. Электромеханические системы

новится более трудным (напомним из математики, что преобразование по Лапласу произведения двух функций не равно произведению их преобразований).

Преобразуя по Лапласу (2-41), получим

$$E_m(s) = K_m s \Theta(s). \quad (2-42)$$

Для цепи якоря можно записать:

$$E_a(s) = (L_m s + R_m) I_a(s) + E_m(s), \quad (2-43)$$

откуда

$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_m(s)}{L_m s + R_m}. \quad (2-44)$$

Момент на валу двигателя определяется уравнением

$$\tau(t) = K_I \Psi i_a(t) = K_\tau i_a(t), \quad (2-45)$$

поскольку магнитный поток считается постоянным. Заметим, что это уравнение так было бы нелинейным, если магнитный поток являлся бы функцией времени. Преобразование по Лапласу последнего уравнения дает:

$$T(s) = K_\tau I_a(s). \quad (2-46)$$

Заключительное уравнение мы получим путем суммирования всех моментов, действующих на якорь двигателя. На рис. 2.26 J есть сумма всех моментов инерции, приведенных к оси двигателя, а B — коэффициент, характеризующий все виды трения (о воздушных механических элементах и т.д.). Следовательно, уравнение для моментов имеет вид

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \tau(t) - B \frac{d\theta}{dt}, \quad (2-47)$$

откуда следует

$$T(s) = (Js^2 + Bs)\Theta(s). \quad (2-48)$$

Отсюда для угла поворота двигателя получим:

$$\Theta(s) = \frac{T(s)}{Js^2 + Bs}. \quad (2-49)$$

Теперь на основании уравнений (2-42), (2-44), (2-46) и (2-49) мы можем изобразить структурную схему электродвигателя (см. рис. 2.27). С помощью формулы Мейсона можно записать передаточную функцию:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{G_1(s) K_\tau G_2(s)}{1 + K_\tau G_1(s) G_2(s) H(s)}. \quad (2-50)$$

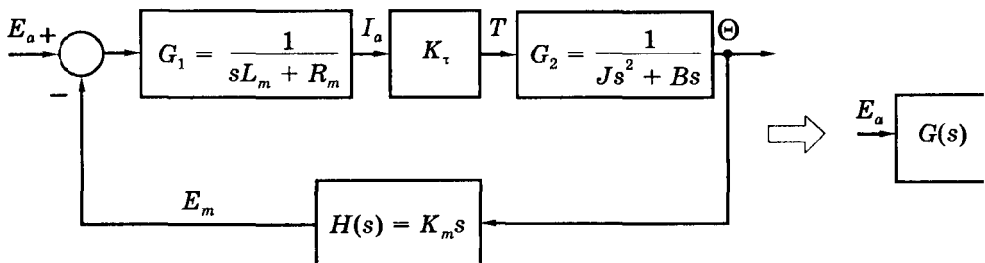


Рис. 2.27. Структурная схема сервопривода

В окончательном виде это выражение записывается как

$$G(s) = \frac{K_\tau}{JL_m s^3 + (BL_m + JR_m)s^2 + (BR_m + K_\tau K_m)s} \quad (2-51)$$

Очень часто при моделировании сервопривода пренебрегают индуктивностью цепи якоря. Тогда передаточная функция приобретает вид:

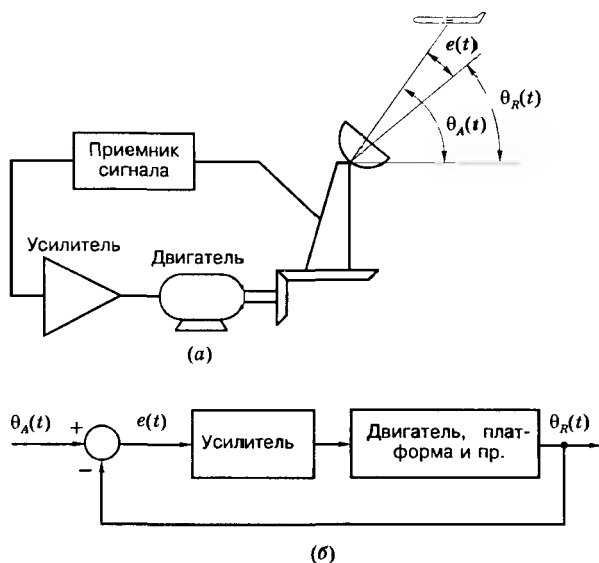
$$G(s) = \frac{K_\tau}{JR_m s^2 + (BR_m + K_\tau K_m)s} \quad (2-52)$$

Как можно видеть, передаточная функция зависит от момента инерции, трения, обусловленного вращением якоря, и параметров двигателя.

Во многих примерах в данной книге фигурирует сервопривод, модель которого задается выражениями (2-51) или (2-52). В частности, сервопривод может служить частью системы радиолокационного сопровождения, как показано на рис. 2.28. Цель системы заключается в автоматическом слежении за положением самолета или какого-либо иного объекта. На рис. 2.28 электронный блок приемника вычисляет ошибку $e(t)$ между угловым положением объекта θ_A и направлением антенны θ_R . На том же рисунке второй блок функциональной схемы должен быть охарактеризован полученной выше передаточной функцией при условии, что момент инерции и трение учитывают соответствующие параметры антенны и платформы.

Рис. 2.28

Система
радиолокационного
сопровождения



2.8. Датчики

В данном разделе мы уделим внимание датчикам, применяемым в системах управления. Подробную информацию о датчиках можно найти в источниках [8 – 11]. Мы ограничимся только датчиками положения, скорости и ускорения. Все они, например, имеют широкое применение в робототехнических системах.

2.8.1. Датчики положения

По всей видимости, простейшим датчиком положения является потенциометр, с помощью которого можно измерять как линейное, так и угловое перемещение, что иллюстрирует рис. 2.29. В каждом случае R_1 — это сопротивление между движком и общей точкой, а R — полное сопротивление потенциометра. Сопротивление R_1 является функцией перемещения. Линейное и угловое перемещение определяются одной и той же зависимостью

$$e(t) = \frac{R_1(t)}{R} E, \quad (2-53)$$

где $e(t)$ — выходное напряжение датчика, E — приложенное к датчику напряжение, а $R_1(t)$ пропорционально перемещению. Как правило, сопротивление $R_1(t)$ является линейной функцией перемещения, следовательно, то же самое справедливо для $e(t)$, и мы можем записать:

$$e(t) = K_x x(t) \text{ или } e(t) = K_\theta \theta(t),$$

где K_x и K_θ есть константы, зависящие от конструктивных параметров резисторов и напряжения E .

Использование потенциометра в качестве датчика имеет следующие преимущества:

1. Дешевизна.
2. Возможность получения значительного выходного напряжения.

К недостаткам следует отнести следующие:

1. Возникновение помех в процессе эксплуатации (из-за плохого контакта).
2. Механический износ.
3. Наличие трения, являющегося дополнительной нагрузкой для механической системы.
4. Упругость движка при быстром перемещении.

Другим примером может служить кодовый датчик положения. Принцип действия дифференциального кодового датчика положения иллюстрирует рис. 2.30. Этот принцип одинаков как для угловых, так и для линейных перемещений. Как ясно из рис. 2.30, каждый раз, когда прорезь приходится против источника света, в цепи появляется импульс напряжения. Для определения угла поворота необходима электронная схема, выполняющая роль счетчика импульсов. Однако подобный кодовый датчик является дифференциальным, т.к. по последовательности импульсов можно судить лишь о приращении угла, а не о его действительном значении.

Чтобы определить абсолютное положение, на диске должно иметься опорное отверстие, относительно которого ведется отсчет (см. рис. 2.30). Это отверстие обеспечит также правильную работу датчика в случае кратковременного отключения питания при наличии помех, искажающих результат подсчета импульсов. Подсчет возобновляется каждый раз, когда на опорном выходе появляется импульс.

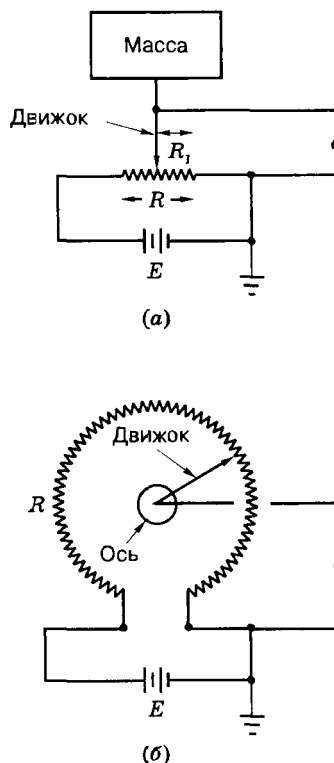
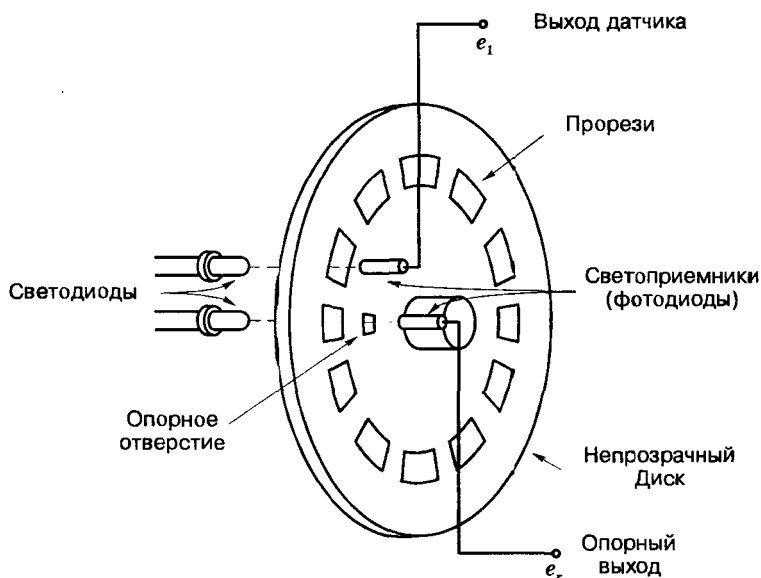


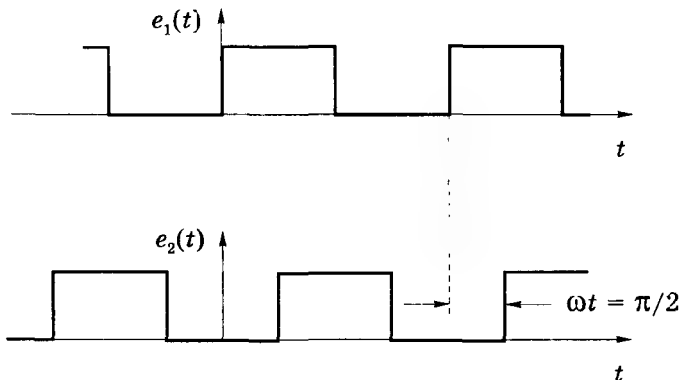
Рис. 2.29
Потенциометрический датчик положения

Рис. 2.30
Оптический
кодовый
датчик положения



Описанная выше конструкция датчика не позволяет определить изменение направления вращения. Чтобы получить такую возможность, надо на дорожке с прорезями выбрать какое-то другое отверстие и организовать второй оптический канал (источник света — приемник света), причем он должен быть смещен относительно первого, а именно: когда первый канал приходится на центр отверстия, второй должен приходиться на край. Результат в случае вращения с постоянной скоростью показан на рис. 2.31. Если сигнал в первом канале опережает по фазе на 90° сигнал во втором канале, это указывает на одно направление вращения, если же отстает на 90° , то направление вращения является противоположным. На рис. 2.31 ω — это угловая частота сигналов, измеряемая в рад/с.

Рис. 2.31
Определение
направления вращения



Существуют и более сложные кодовые датчики положения, на выходе которых формируется сразу двоичный код, соответствующий абсолютному положению [8]. Этот двоичный код может быть непосредственно введен в цифровой компьютер и использован для целей управления.

2.8.2. Датчики скорости

Кодовый датчик, изображенный на рис. 2.30, может быть использован для измерения скорости вращения путем подсчета числа импульсов в единицу времени. Другой метод заключается в измерении интервала времени между соседними импульсами или времени, в течение которого появляется определенное количество импульсов. К сожалению, все эти методы обладают невысокой точностью при малых скоростях.

Для измерения угловой скорости можно использовать специальную электрическую машину — *тахогенератор*. В одном из типов тахогенераторов магнитный поток создается постоянными магнитами [8]. Тогда, в соответствии с уравнением (2-32) для генератора постоянного тока, можно записать:

$$e_g(t) = K\Psi \frac{d\theta(t)}{dt} = K_\tau \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (2)$$

где $e_g(t)$ — ЭДС тахогенератора, Ψ — магнитный поток, θ — угол поворота, а коэффициент K_τ определяется параметрами электрической машины. Тогда

$$E_g(s) = K_\tau \Omega(s), \quad (2)$$

где $\Omega(s) = L[d\theta/dt]$, а угол θ измеряется в радианах.

В соответствии с рис. 2.24, выходное напряжение тахогенератора определяется выражением:

$$E_a(s) = I_a(s)Z_l(s) = \frac{Z_l(s)}{L_a s + R_a + Z_l(s)} K_\tau \Omega(s).$$

В диапазоне частот, где эквивалентное сопротивление нагрузки много больше индуктивного сопротивления якоря, $E_a(s) \approx K_\tau \Omega(s)$, т.е. выходное напряжение тахогенератора пропорционально скорости вращения якоря. Если за вход принять угол поворота, то передаточная функция будет иметь вид:

$$\frac{E_a(s)}{\Theta(s)} = K_\tau s, \quad (2)$$

т.е. наблюдается эффект дифференцирования. Однако на самом деле никакого дифференцирования не происходит, поскольку измеряется не угол поворота, а угловая скорость.

Второй способ получения информации о скорости заключается в измерении положения с последующим дифференцированием сигнала. Но если на выходной сигнал датчика накладывается высокочастотная помеха, то результат дифференцирования будет в основном определяться этой помехой (т.к. выход дифференциатора пропорционален скорости изменения его входного сигнала). Поэтому всегда, по возможности, надо отдавать предпочтение датчикам, непосредственно измеряющим скорость.

2.8.3. Датчики ускорения

Рассмотрим теперь способы измерения ускорения. Для изолированной жесткой системы справедливо уравнение

$$f(t) = M\ddot{x}(t) = Ma(t), \quad (2)$$

где $f(t)$ — сила, $x(t)$ — перемещение, $\ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$, $a(t)$ — ускорение. Следовательно, если известна сила, то легко можно определить ускорение:

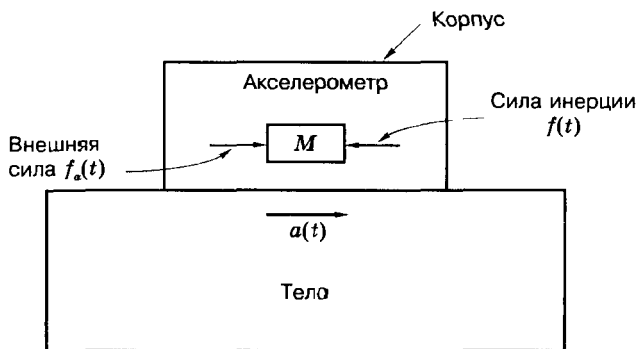
$$a(t) = \frac{1}{M} f(t) = K f(t). \quad (2-58)$$

Принцип действия всех акселерометров основан на измерении силы, действующей на массу; ускорение же, как следует из (2-58), пропорционально этой силе.

На рис. 2.32 схематически изображен акселерометр. Он жестко прикреплен к телу и предназначен для определения ускорения этого тела. В данном случае сила инерции $f(t)$ уравнивается внешней силой $f_a(t)$, прикладываемой к массе M и препятствующей смещению этой массы относительно корпуса акселерометра. Следовательно, $f_a(t) = f(t)$, и ускорение тела определяется выражением

$$a(t) = \frac{1}{M} f_a(t). \quad (2-59)$$

Рис. 2.32
Измерение
ускорения

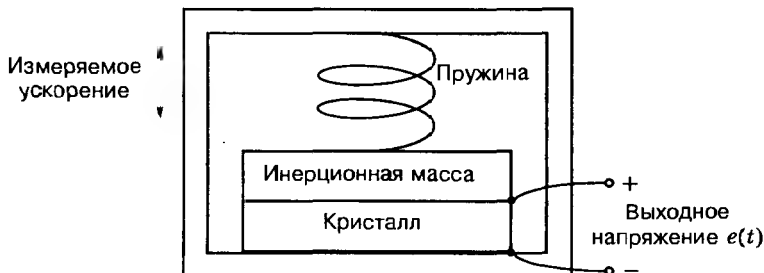


Мы не приводим здесь электронную часть устройства и не рассматриваем способы формирования силы $f_a(t)$; эти вопросы выходят за рамки книги. Заметим только, что для поддержания постоянного положения массы M относительно корпуса акселерометра необходима специальная система с обратной связью.

Второй тип акселерометра основан на пьезоэлектрическом эффекте, свойственном некоторым кристаллам. Сила, приложенная к кристаллу в определенном направлении, обуславливает возникновение напряжения между двумя поверхностями кристалла. Это напряжение пропорционально приложенной силе.

Схема пьезоэлектрического акселерометра приведена на рис. 2.33. Ускорение инерционной массы создает силу, действующую на кристалл, что, в свою очередь, приводит к возникновению напряжения $e(t)$, пропорционального ускорению массы. Механическая пружина и масса на рис. 2.33 обуславливают появление резонанса (пика на частотной характеристике). Поэтому частоты, характеризующие движение массы, должны быть много меньше резонансной частоты; в противном случае измерения будут производиться с бо-

Рис. 2.33
Пьезоэлектрический
акселерометр



льшой погрешностью. Разумеется, любой датчик обладает собственными динамическими свойствами и, как следствие, обеспечивает приемлемую точность измерений в ограниченном диапазоне частот.

Пусть $x(t)$ — смещение массы акселерометра. На рис. 2.33 выходное напряжение селерометра определяется выражением:

$$e(t) = K_a f_a(t) = K_a M \ddot{x}(t) \Rightarrow \frac{E(s)}{X(s)} = (K_a M) s^2. \quad (2-)$$

Как видим, по отношению к перемещению акселерометр обладает двойным дифференцированием. Поэтому, как и в случае с измерением скорости, нецелесообразно оценивать ускорение, дважды дифференцируя сигнал, пропорциональный перемещению. Причина та же — возможное присутствие высокочастотной помехи и искажение за счет этого результата измерений.

2.9. Система регулирования температуры

В этом разделе мы рассмотрим модель простой системы регулирования температуры. Схема такой системы изображена на рис. 2.34. Жидкость с температурой T вытекает из бака некоторой скоростью и замещается жидкостью с температурой T_i , причем $T_i < T$. Температура жидкости в баке повышается с помощью электрического нагревателя. Смеситель обеспечивает равномерное распределение температуры по всему объему бака, и в этом случае ее следует считать функцией времени, $T(t)$.

Для построения модели введем следующие обозначения:

$q_e(t)$ — тепловой поток от электрического нагревателя;

$q_i(t)$ — тепловой поток жидкости в баке;

$q_o(t)$ — тепловой поток вытекающей жидкости;

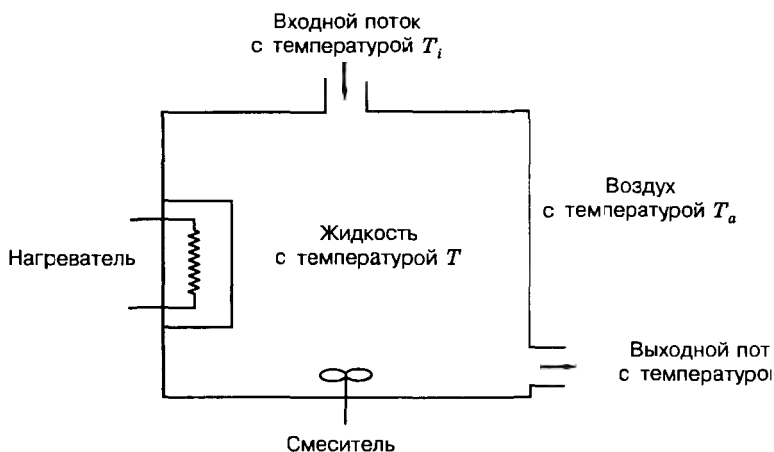
$q_s(t)$ — тепловой поток втекающей жидкости;

$q_w(t)$ — тепловой поток через стенки бака.

В соответствии с законом сохранения энергии, количество тепла, поступающее в бак с жидкостью, должно равняться количеству тепла, уходящему из бака, плюс количество тепла, накопленного жидкостью в баке. Иными словами,

$$q_e + q_i = q_o + q_w, \quad (2-)$$

Рис. 2.34
Тепловой объект



где, для краткости, опущена зависимость от времени. Далее,

$$q_1 = C \frac{dT}{dt}, \quad (2-62)$$

где C — теплоемкость жидкости, являющаяся параметром системы [12]. Обозначая через V расход жидкости на входе и на выходе из бака (считая их одинаковыми), а через H — удельную теплоемкость жидкости, мы можем записать:

$$q_1 = VHT, \quad (2-63)$$

и

$$q_0 = VHT. \quad (2-64)$$

Если обозначить через R сопротивление тепловому потоку через поверхность бака, а через T_a — температуру воздуха снаружи бака, то

$$q_s = \frac{T - T_a}{R}. \quad (2-65)$$

Подстановка выражений (2-62) – (2-65) в (2-61) дает:

$$q_e + VHT = C \frac{dT}{dt} + VHT + \frac{T - T_a}{R}. \quad (2-66)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение первого порядка, в котором независимыми входными переменными являются q_e , T_i и T_a . На языке теории управления выходная величина нагревателя q_e — это регулирующее воздействие. Величины T_i и T_e называются возмущающими воздействиями, или просто возмущениями; это переменные, на которые мы никак не можем влиять и которые вызывают нежелательную реакцию объекта. Обычно при синтезе системы управления выдвигается требование минимизировать влияние внешних возмущений.

Вернемся к уравнению (2-66). Регулируемой величиной является температура T , и мы примем ее за выходную переменную. Заметим, что если расход V зависит от времени, то (2-66) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Из этого уравнения нельзя выразить передаточную функцию, т.к. во втором члене в правой части (2-66) как V , так и T являются функциями времени. Напомним, что преобразование Лапласа для произведения функций времени не равно произведению преобразований Лапласа этих функций.

Чтобы упростить анализ, предположим, что расход V постоянен. Применяя к уравнению (2-66) преобразование Лапласа и решая его относительно $T(s)$, получим:

$$T(s) = \frac{Q_e(s)}{Cs + VH + (1/R)} + \frac{VHT_i(s)}{Cs + VH + (1/R)} + \frac{(1/R)T_a(s)}{Cs + VH + (1/R)}. \quad (2-67)$$

Один из вариантов структурной схемы, отражающей уравнение (2-67), изображен на рис. 2.35.

Если не учитывать возмущающие воздействия, то передаточная функция системы примет вид:

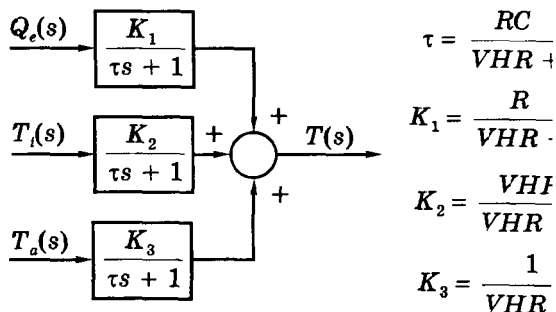
$$G(s) = \frac{T(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1}. \quad (2-68)$$

Передаточная функция такого типа соответствует звену *первого порядка с запаздыванием по фазе* (согласно терминологии, принятой в России, — *апериодическому, или инерционному*).

му, звену — прим. перев.). Смысл этого термина будет ясен позже, когда мы рассмотрим частотные характеристики. При получении передаточной функции (2-68) мы проигнорировали наличие возмущений; однако, как мы вскоре увидим, на некоторых этапах проектирования систем управления с ними приходится считаться, а в ряде случаев условие минимизации влияния возмущений является принципиальным требованием.

Рис. 2.35

Структурная схема
теплового объекта



Наконец, следует заострить внимание на одном важном обстоятельстве. В наших рассуждениях мы считали, что входом системы является тепловая мощность нагревателя. Однако эта мощность создается за счет напряжения, приложенного к нагревателю. Электрическая мощность нагревателя равна

$$P = \frac{V_h^2}{R_h}, \quad (2)$$

где P — мощность в ваттах, V_h — действующее напряжение в вольтах, а R_h — сопротивление нагревателя в омах. Следовательно, электрическая мощность, преобразуемая в тепловую, нелинейно зависит от приложенного напряжения, и передаточной функции от напряжения V_h к температуре жидкости T не существует.

Напомним, что при анализе системы мы сделали ряд допущений. Во-первых, предположили, что поток жидкости, втекающей в бак, в точности равен потоку на выходе из бака, что вряд ли имеет место на практике. Кроме того, мы считали этот поток постоянным. Затем мы проигнорировали наличие возмущений. Далее мы предположили, что дом является физической переменной, по отношению к которой существует передаточная функция. На практике, однако, мы вынужденно имеем дело с нелинейной системой, которая создает определенные трудности при решении задач анализа и синтеза. Как можно, пусть частично, преодолеть эти трудности — будет показано при дальнейшем изложении материала.

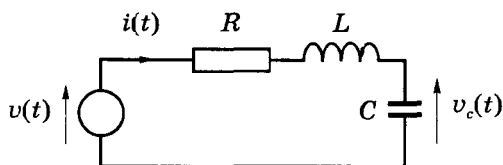
2.10. Подобные системы

Различные типы физических систем, модели которых имеют одинаковую форму, называются *подобными* системами. В этом разделе мы рассмотрим несколько таких систем.

Поясним введенное понятие с помощью схемы на рис. 2.36. Воспользовавшись законом полного сопротивления, мы можем записать:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Ls + R + (1/Cs)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

Рис. 2.36
RLC-схема



Если за выход принять напряжение на конденсаторе, то получим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{(1/Cs)I(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

Это выражение соответствует передаточной функции второго порядка общего вида

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (2-70)$$

которая характеризует динамику механической системы с линейным перемещением (пример 2.10), крутящегося маятника (пример 2.12), спутника (пример 2.13), генератора постоянного тока с активной нагрузкой, и сервопривода. В частном случае некоторые коэффициенты в (2-70) могут равняться нулю. Все эти передаточные функции сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Системы второго порядка

Система	Передаточная функция	Номер выражения
Механическая система с линейным перемещением	$\frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$	(2-23)
Крутящийся маятник	$\frac{1}{Js^2 + Bs + K}$	(2-28)
Спутник	$\frac{1}{Js^2}$	(2-29)
Генератор постоянного тока	$\frac{K_g R_l}{(L_f s + R_f)(L_a s + R_a + R_l)}$	(2-39)
Сервопривод	$\frac{K_t}{JR_m s^2 + (BR_m + k_t K_m)s}$	(2-52)

Поскольку мы занимаемся моделированием физических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то совершенно очевидно, что их передаточные функции будут иметь один и тот же вид. Самое общее выражение передаточной функции второго порядка таково:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (2-71)$$

где один из ненулевых коэффициентов можно выбрать равным единице (без потери общности), разделив числитель и знаменатель на этот коэффициент. Обычно полагают $a_2 = 1$. Подобная передаточная функция является моделью любой физической системы, которая однозначно описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Следовательно, все такие системы классифицируются как подобные.

Концепция подобных систем имеет очень широкое применение. Например, если мы научились анализировать колебания линейных механических систем, то мы можем испо-

2.11. Трансформаторы и зубчатые передачи

льзовать те же приемы для анализа линейных электрических цепей, и наоборот. Если научились определять характеристики линейных электрических цепей, то мы сможем шигь ту же задачу для линейных систем теплопередачи, хотя это на первый взгляд и так очевидно. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 2.14

Для системы регулирования температуры, с которой мы познакомились в разделе 2.9, была получена передаточная функция, связывающая электрическую мощность нагревателя и температуру вытекающего потока жидкости:

$$\frac{T(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1}.$$

Теперь рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.37. Ее передаточная функция имеет выражение

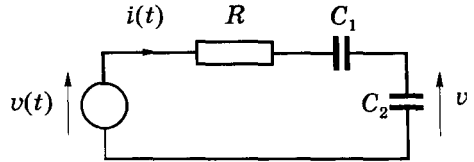


Рис. 2.37. Схема к примеру 2.14

$$\frac{V_e(s)}{V(s)} = \frac{(1/sC_2)I(s)}{V(s)} = \frac{(1/sC_2)}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{(C_e/C_2)}{RC_e s + 1},$$

где

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Если ввести обозначения $C_e/C_2 = K_1$ и $RC_e = \tau$, то две передаточные функции полностью совпадают друг с другом. Предположим, что входное напряжение электрической схемы скачком изменилось. Из анализа электрических цепей нам известно, что напряжение на конденсаторе будет нарастать по экспоненте, стремясь к установившемуся значению. Следовательно, и плавное изменение электрической мощности нагревателя в системе регулирования температуры приведет к ее экспоненциальному росту до нового значения. Скачок напряжения, примененного к нагревателю, вызывает также скачок электрической мощности. Подобная методика часто используется при экспериментальном определении параметров модели системы.

2.11. Трансформаторы и зубчатые передачи

В данном разделе мы рассмотрим две подобные системы: электрический трансформатор и механический шестеренчатый редуктор. Считая эти элементы идеальными, покажем, что они описываются одними и теми же уравнениями.

На рис. 2.38 изображена схема трансформатора. В случае идеального трансформатора предполагается, что мощность на его входе равна мощности на выходе, т.е.

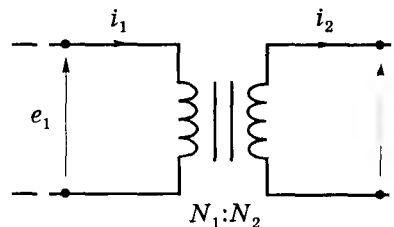


Рис. 2.38. Трансформатор

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) = e_2(t)i_2(t), \quad (2)$$

где $p(t)$ — электрическая мощность. Из рассмотрения магнитного потока в сердечнике можно также показать [13], что

$$N_1 i_1(t) = N_2 i_2(t), \quad (2)$$

где N_1 — число витков первичной обмотки, а N_2 — число витков вторичной обмотки. Тогда, на основании (2-72) и (2-73):

$$\frac{e_1(t)}{N_1} = \frac{e_2(t)}{N_2}. \quad (2-74)$$

Отношение N_1/N_2 называется *коэффициентом трансформации*, и он равен

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{i_2(t)}{i_1(t)}. \quad (2-75)$$

Поэтому трансформатор применяется для изменения величины либо напряжения, либо тока. Обычно модель идеального трансформатора (2-75) достаточно хорошо отражает свойства реального физического трансформатора с железным сердечником.

Пример 2.15

Рассмотрим схему на рис. 2.39. Здесь источник напряжения и сопротивление представляют эквивалентную схему Тевенина [2] для усилителя, связанного с нагрузкой $Z_L(s)$ через трансформатор. Тогда

$$E_i(s) = RI_1(s) + E_1(s)$$

и

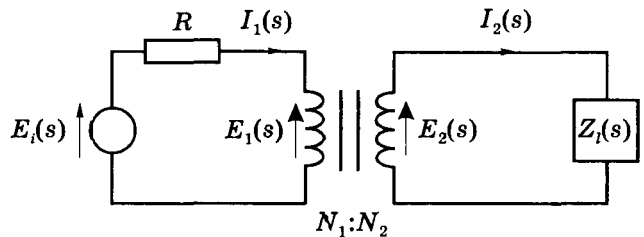
$$E_2(s) = Z_L(s)I_2(s).$$

Из (2-75) имеем:

$$E_1(s) = \frac{N_1}{N_2} E_2(s); \quad I_1(s) = \frac{N_2}{N_1} I_2(s).$$

Рис. 2.39

Схема с трансформатором



На основании этих двух уравнений и полученного ранее уравнения для вторичного контура можно записать уравнение для первичного контура:

$$E_i(s) = RI_1(s) + \frac{N_1}{N_2} E_2(s) = \left[R + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L(s) \right] I_1(s).$$

Следовательно, для источника напряжения полным сопротивлением является

$$Z_s(s) = \frac{E_i(s)}{I_1(s)} = R + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L(s),$$

т.е. влияние нагрузки сказывается в том, что в первичный контур вносится эквивалентное сопротивление $(N_1/N_2)^2 Z_L(s)$. Это означает, что трансформатор обладает эффектом преобразования величины полного сопротивления нагрузки. Данное свойство учитывается обычно при подборе трансформатора с целью передачи максимальной мощности от усилителя к нагрузке [14].

Далее рассмотрим механическое соединение с помощью зубчатой передачи (рис. 2.40). Предполагается, что шестеренки являются идеальными, т.е. жесткими, не обладающими инерцией и с зубьями, постоянно находящимися в зацеплении. Тогда расстояние вдоль окружности одной шестеренки будет равно расстоянию вдоль окружности другой, или

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2, \quad (2-76)$$

где $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ — соответственно радиус и угол поворота первой и второй шестеренки. Кроме того, сила, приложенная в точке контакта со стороны одной шестеренки, должна вызывать такую же реакцию со стороны другой шестеренки. Следовательно,

$$\frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2}, \quad (2-77)$$

поскольку сила равна моменту, деленному на радиус. В (2-77) через τ_i и r_i обозначены момент и радиус i -й шестеренки, $i = 1, 2$. Заметим, что уравнения (2-76) и (2-77) имеют ту самую форму, что и уравнения (2-73) и (2-74) для идеального трансформатора. При этом отношение радиусов r_1/r_2 аналогично отношению числа витков N_1/N_2 .

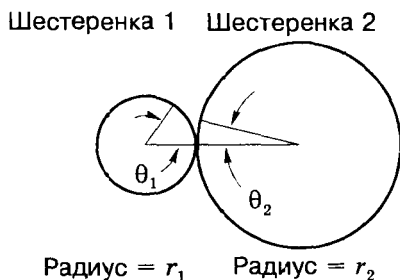


Рис. 2.40. Зубчатая пара

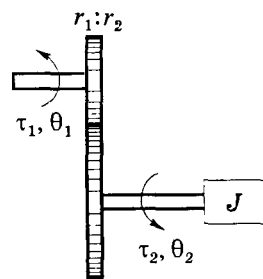


Рис. 2.41. Зубчатая передача

Пример 2.16

Рассмотрим зубчатую передачу, изображенную на рис. 2.41. Здесь

$$\tau_2 = J \frac{d^2 \theta_2}{dt^2}$$

и

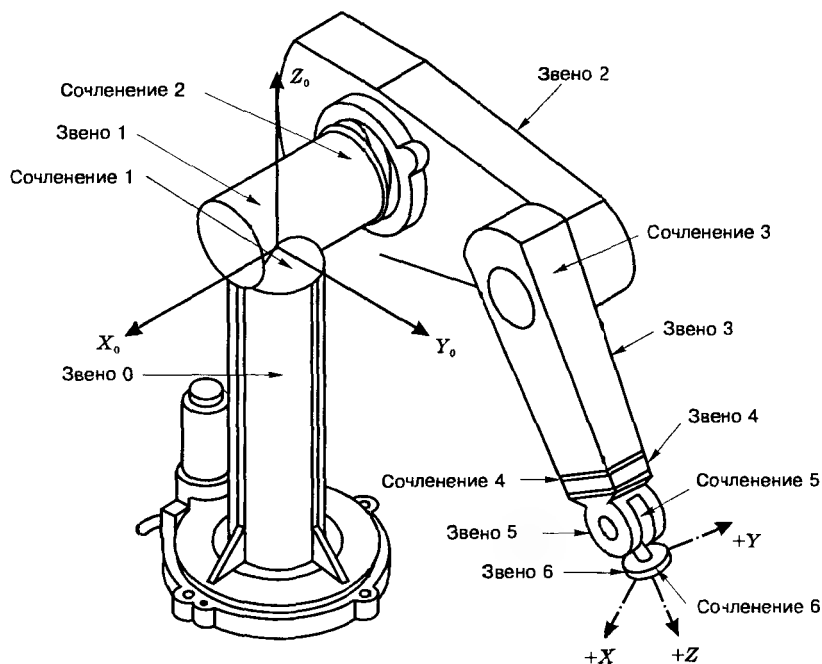
$$\tau_1 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \tau_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) J \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 J \right] \frac{d^2 \theta_1}{dt^2}.$$

Таким образом, зубчатая передача обладает эффектом преобразования момента инерции (через квадрат отношения радиусов шестеренок), что совпадает с уже известными нам свойствами трансформатора.

2.12. Система управления роботом

Рис. 2.42 представляет собой схематическое изображение промышленного робота. В этом случае рука робота имеет несколько сочленений. При проектировании систем управления роботами каждое сочленение часто рассматривается как простой сервопривод

Рис. 2.42
Промышленный
робот

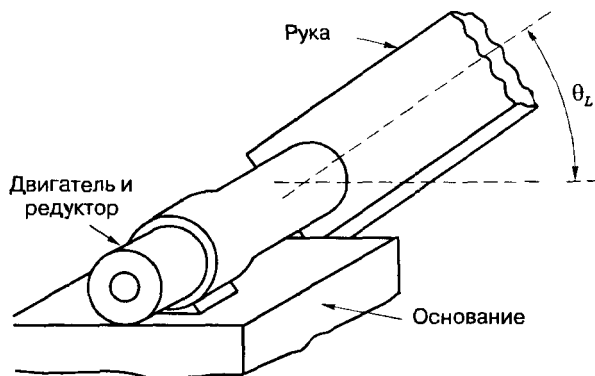


движения всех остальных сочленений в расчет не принимаются. Хотя такой подход отличается простотой, результаты не всегда оказываются удовлетворительными [15]. Однако в данном разделе мы, тем не менее, будем рассматривать каждое сочленение независимо от других.

На рис. 2.43 показана часть руки робота вместе с шарнирным сочленением. Исполнительным устройством является двигатель постоянного тока, управляемый по цепи якоря (см. раздел 2.7 и рис. 2.27). Предполагается, что двигатель соединен с рукой посредством редуктора с передаточным отношением $n = r_1/r_2$ (см. раздел 2.11).

В промышленных роботах вместо сервоприводов постоянного тока могут применяться гидравлические и пневматические исполнительные устройства. Однако, поскольку мы ранее уже разработали модель электрического сервопривода (см. раздел 2.7), то остановимся именно на этом варианте исполнительного устройства. Структурная схема системы управления рукой робота изображена на рис. 2.44. Параметры электродвигателя

Рис. 2.43
Управление положением
руки робота



здесь те же самые, что и на рис. 2.27: E_a — входное напряжение, I_a — ток в цепи якоря T — развиваемый момент, θ_m — угол поворота вала двигателя, а θ_L — угол поворота руки. Сумма всех моментов инерции, приведенных к валу двигателя, включая момент инерции руки, равна J . Коэффициент B определяется всеми силами трения, также приведенным к валу двигателя. В примере 2.16 было показано, как пересчитывается момент инерции и использования шестеренчатого редуктора.

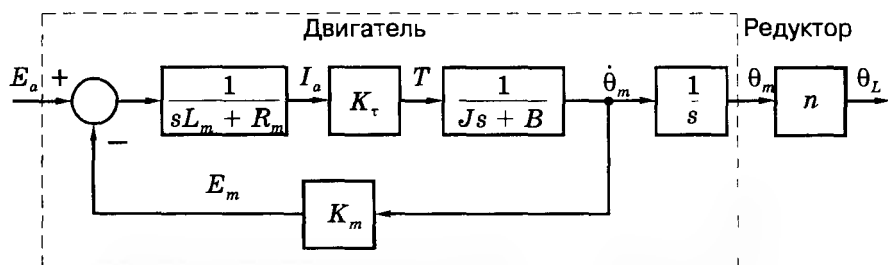


Рис. 2.44. Структурная схема системы управления рукой робота

Из рис. 2.44 видно, что модель имеет третий порядок. Как и при анализе сервопривода в разделе 2.7, если можно пренебречь индуктивностью якорной цепи, то порядок системы снижается до второго. Как правило, в качестве сервопривода используются двигатели с непрерывным вращением (не шаговые), в которых возбуждение создается постоянными магнитами, а у таких двигателей индуктивность цепи якоря, действительно, является малой.

Система с обратной связью по положению руки робота изображена на рис. 2.45 [1]. На схеме θ_c — это желаемое, или заданное, положение руки робота, а θ_L — действительное положение. Регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = K_p + K_D s,$$

что соответствует пропорционально-дифференциальному (ПД) закону регулирования. Синтез ПД-регуляторов рассматривается в главах 7 и 9 этой книги. Приведенная на рис. 2.45 система управления рукой робота фигурирует во многих примерах и задачах в следующих главах книги.

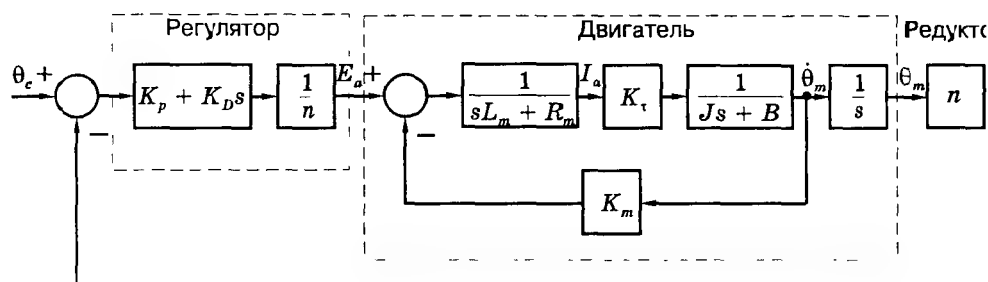


Рис. 2.45. Система управления рукой робота

2.13. Идентификация систем

В предыдущих разделах модели систем создавались с использованием фундаментальных законов физики. Здесь мы посмотрим на эту проблему с иной точки зрения. Мы не ставим целью описание альтернативных методов, поскольку это выходит за рамки книги; однако читатель должен четко представлять, что такие методы существуют и имеют практическое значение.

Методы, которые мы здесь упомянем, известны под общим названием *идентификация систем* [16, 17]. Они основаны на определении параметров передаточной функции по результатам измерения входной и выходной переменных системы. При этом предполагается, что, по крайней мере, известен порядок передаточной функции. Для решения задачи можно воспользоваться частотными характеристиками (реакцией системы на синусоидальное воздействие), реакцией системы на ступенчатое воздействие, на прямоугольный импульс или на сигнал более общего вида. Суть этих методов заключается в подборе передаточной функции, которая наилучшим образом соответствовала бы полученным экспериментальным данным. Но вместе с тем следует отдавать себе отчет в том, что такая «подгонка» передаточной функции под экспериментальные данные вовсе не обязательно приводит к построению хорошей модели. Например, можно подобрать передаточную функцию второго порядка по результатам измерения входа и выхода существенно нелинейной физической системы. Это будет говорить лишь о том, что передаточная функция хорошо согласуется с экспериментальными данными, а с точки зрения построения модели реальной системы такая «подгонка» окажется не только плохой, но и бесполезной. Поэтому все эти методы, как и любой другой метод моделирования систем, следует применять с большой осторожностью.

2.14. Линеаризация

В этой главе были рассмотрены линейные модели нескольких типов физических систем. Однако более точными всегда оказываются нелинейные модели. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений нельзя использовать преобразование Лапласа; чтобы применить преобразование Лапласа, надо прежде всего выполнить процедуру линеаризации уравнений. В данном разделе мы кратко опишем суть этой процедуры применительно к некоторым видам нелинейных дифференциальных уравнений. Более детально проблема линеаризации рассматривается в главе 14.

Для иллюстрации метода линеаризации возьмем обыкновенный маятник, изображенный на рис. 2.46 (а). Угол отклонения маятника обозначен через θ , M — это масса гири, а L — длина стержня от оси вращения до центра гири (стержень предполагается невесомым). Сила, действующая на гирю, равна Mg , где g — гравитационное ускорение. Уравнение движения маятника приводится в любом учебнике по физике; оно имеет вид:

$$\frac{L}{g} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\sin \theta(t), \quad (2-78)$$

при условии, что трение отсутствует. Это уравнение является нелинейным благодаря присутствию в нем члена $\sin \theta(t)$. Поскольку выражение $\theta(t)$ неизвестно, то мы не можем найти изображение по Лапласу этой функции.

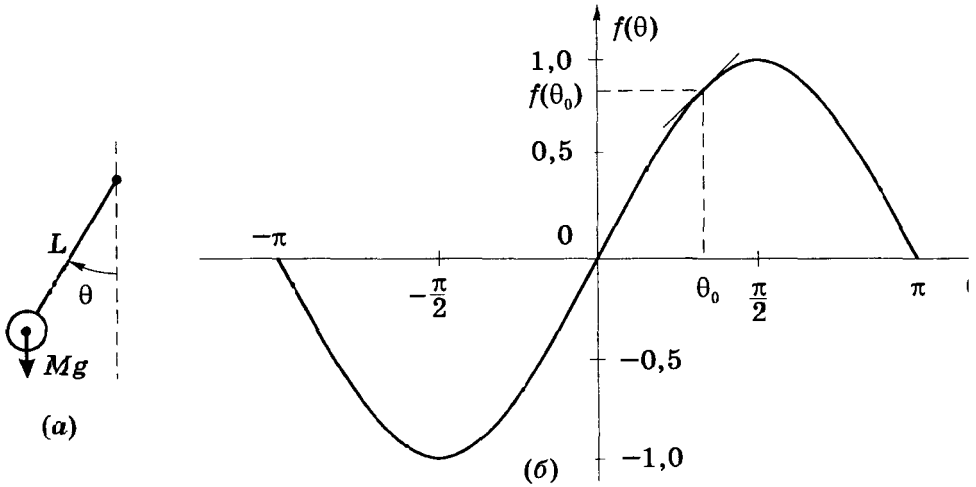


Рис. 2.46. Маятник с нелинейной характеристикой

График нелинейной функции $f(\theta) = \sin\theta$ показан на рис. 2.46 (б). Обычно процесс линеаризации заключается в замене нелинейной зависимости на прямую линию, в результате чего можно получить достаточно точную модель для случая малых отклонений от боковой точки. Например, предположим, что нам необходимо линеаризовать характеристику в точке θ_0 на рис. 2.46 (б). Для этого функцию $f(\theta)$ можно представить в окрестности точки θ_0 в виде ряда Тейлора:

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} \cdot (\theta - \theta_0) + \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \dots \quad (2)$$

для всех значений θ , при которых ряд сходится. В случае, когда θ близко к θ_0 , можно пренебречь членами, содержащими производные высших порядков, что дает

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} \cdot (\theta - \theta_0). \quad (2)$$

В уравнении (2-78) $f(\theta) = \sin\theta$, следовательно, на основании (2-80):

$$\sin \theta \approx \sin \theta_0 + (\cos \theta_0)(\theta - \theta_0). \quad (2)$$

Маятник обычно совершает колебания относительно точки $\theta = 0^\circ$, поэтому мы проведем линеаризацию именно в этой точке, где $\theta_0 = 0^\circ$. Из (2-81) имеем:

$$\sin \theta \approx 0 + (1)(\theta - 0) = \theta. \quad (2)$$

Это есть не что иное, как хорошо известная аппроксимация функции $\sin\theta$ для малых значений θ . Подставляя (2-82) в (2-78), приведем последнее уравнение к виду:

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta(t) = 0. \quad (2)$$

Предоставляем читателю в порядке упражнения показать, что решение этого линейного уравнения имеет вид гармонических колебаний (см. также задачу 2.23).

В общем случае процедура линеаризации сводится к следующему. Если мы желаем линеаризовать нелинейную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 , то разложение ее в ряд Тейлора дает

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0). \quad (2-84)$$

Точность аппроксимации определяется значением суммы отброшенных членов ряда, содержащих производные высших порядков.

В этом разделе приведен простой пример линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений. Поскольку все физические системы изначально являются нелинейными, то для получения их моделей в виде линейных дифференциальных уравнений необходимо прибегать к линеаризации. Более детально процедуры линеаризации рассматриваются в главе 14, где они увязываются с анализом устойчивости систем.

2.15. Заключение

В этой главе мы рассмотрели методы получения математических моделей физических систем на основании законов физики. Были исследованы электрические, механические, электромеханические и тепловые системы. Мы не ставили целью дать исчерпывающий обзор методов моделирования. Вместо этого было рассмотрено достаточное количество систем разного типа, чтобы обосновать использование в дальнейшем понятия передаточной функции.

Передаточные функции имеют вид отношения двух полиномов относительно переменной s (переменной преобразования Лапласа). Именно в такой форме обычно представляются модели физических объектов при анализе и синтезе систем управления (по крайней мере, на начальных этапах работы). На последующих этапах, если обнаруживается неадекватность линейной модели с постоянными параметрами, может возникнуть необходимость учета нелинейностей, изменения параметров во времени и т.д. Завершающая часть главы была посвящена линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений. Все реальные системы являются нелинейными, поэтому линейные модели, которыми мы пользуемся при анализе и синтезе, представляют собой результат линеаризации того или иного вида. Проблема линеаризации более подробно освещается в главе 14.

В следующей главе будет рассмотрен иной метод моделирования линейных систем с постоянными параметрами, не требующий получения передаточной функции. Этот метод основан на использовании переменных состояния, и он с успехом применяется при имитационном моделировании систем средствами вычислительной техники и при их анализе и синтезе с помощью аппарата современной теории управления.

Литература

1. IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms. New York: IEEE, 1984.
2. J.D.Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
3. V.P.Nelson et al. *Digital Logic Circuit Design and Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.

4. J.L.Agnew and R.C.Knapp. *Linear Algebra with Applications*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1989.
5. S.J.Mason. «*Feedback Theory - Some Properties of Flow Graphs*», Proc. IRE, 41 (September 1953): 1144-1156.
6. G.McPherson and R.D.Laramore. *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*. New York: Wiley, 1991.
7. S.J.Chapman. *Electrical Machinery Fundamentals*, New York: McGraw-Hill, 1984.
8. C.W.deSilva. *Control Sensors and Actuators*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
9. M.F.Hordeski. *Design of Microprocessor Sensor & Control Systems*. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1985.
10. S.Wolf and R.Smith. *Student Reference Manual for Electronic Instrumentation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.
11. E.E.Herceg. *Handbook of Measurement and Control*. Pennsauken, NJ: Schaevitz Engineering, 1976.
12. J.D.Trimmer. *Response of Physical Systems*. New York: Wiley, 1950.
13. W.A.Blackwell and L.L.Grigsby. *Introductory Network Theory*. Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1985.
14. M.E.Van Valkenburg. *Network Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.
15. K.S.Fu, R.C.Gonzalez and C.S.G.Lee. *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*. New York: McGraw-Hill, 1987.
16. D.Graupe. *Identification of Systems*. Huntington, NY: R.E.Kreiger, 1976.
17. L.Ljung and E.J.Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Задачи

- 2.1. Для схемы, изображенной на рис. 2.1 (3), определите передаточную функцию $V_2(s)/V_1(s)$.
- 2.2. Проанализируйте схему, изображенную на рис. 2.2 (3).
 - (а) Определите передаточную функцию $V_2(s)/V_1(s)$.
 - (б) Определите передаточную функцию $V_2(s)/V_1(s)$ в предположении, что к выходным клеммам параллельно R_3 подключена индуктивность L_2 .
 - (в) К схеме приложено постоянное напряжение величиной 10 В. С помощью теоремы о конечном значении из преобразования Лапласа (см. приложение Б, разд. Б.2) определите установившееся значение выходного напряжения.
- 2.3. (а) Определите передаточные функции $V_0(s)/V_i(s)$ для каждой из схем операционных усилителей на рис. 2.3 (3).

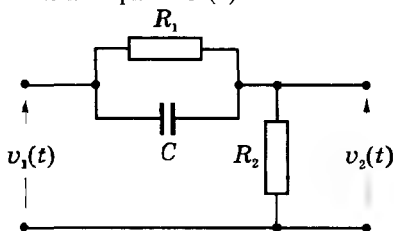


Рис. 2.1 (3)

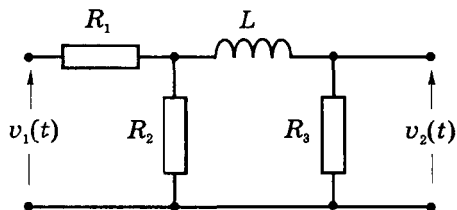


Рис. 2.2 (3)

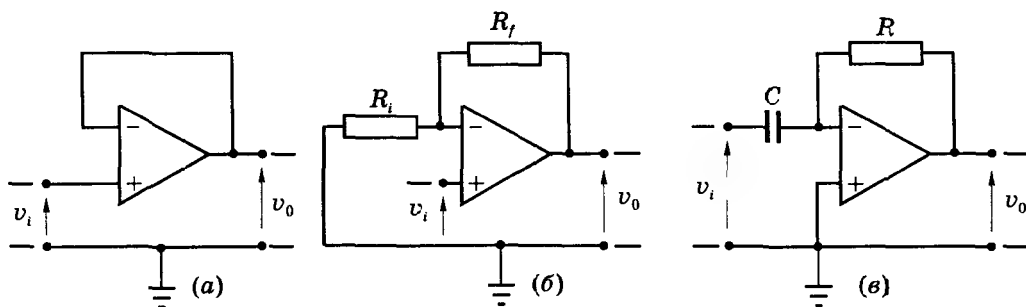


Рис. 2.3 (3)

- (б) В каждом случае найдите выражение для выходного напряжения $v_0(t)$ в зависимости от входного напряжения и параметров схемы.
- 2.4. (а) Разработайте схему на операционном усилителе, реализующую передаточную функцию по напряжению, равную $-10/s$.
 (б) Повторите п. (а) для усилителя напряжения с коэффициентом $K = 10$.
 (в) Повторите п. (б) для случая $K = -10$.
- 2.5. (а) Разработайте схему операционного усилителя, реализующую передаточную функцию $G_a(s) = 1/(0,1s + 1)$. Резистор должен иметь номинал не менее 10 кОм.
 (б) Повторите п. (а) для передаточной функции $G_b(s) = s/(0,1s + 1)$.
 (в) Повторите п. (а) для передаточной функции $G_c(s) = -1/(0,1s + 1)$.

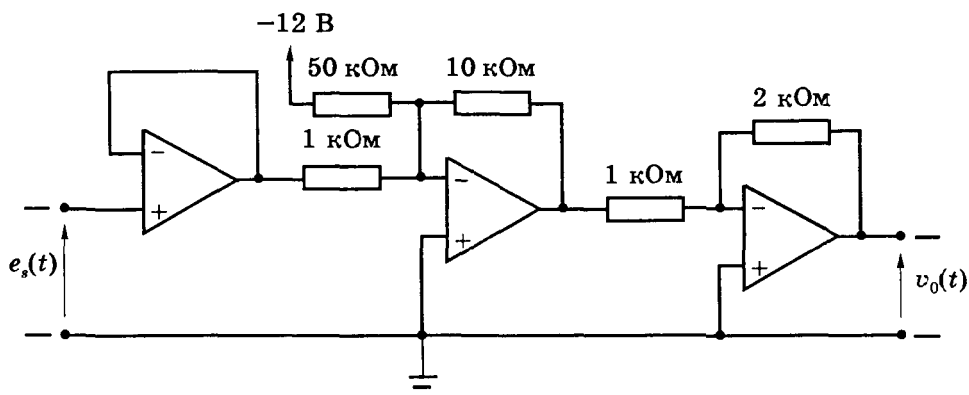
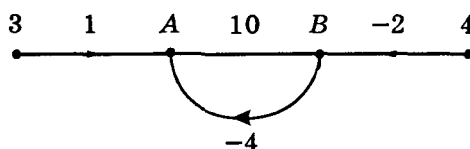


Рис. 2.6.(3)

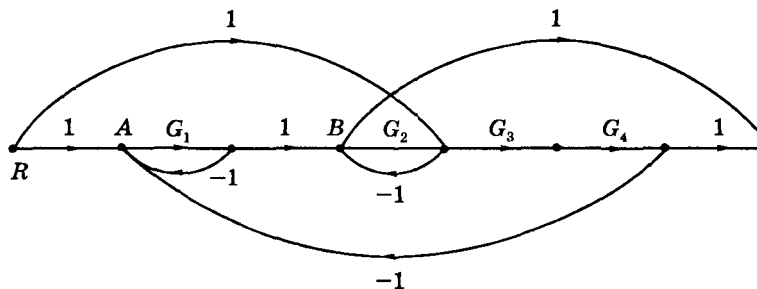
- 2.6. Схема на рис. 2.6 (3) часто используется для усиления малых сигналов от датчиков. На схеме e_s — это выходное напряжение датчика, а источник -12 В необходим для компенсации постоянной составляющей напряжения e_s . Выразите $v_0(t)$ как функцию e_s .
- 2.7. Рассмотрите граф, изображенный на рис. 2.7 (3).

Рис. 2.7.(3)



- $$\begin{aligned} A + 2B + C &= 4 \\ A - B - C &= 0 \\ 4A - C &= 2 \end{aligned}$$

- Рис. 2.9 (3)**



- Рис. 2.10 (3)**

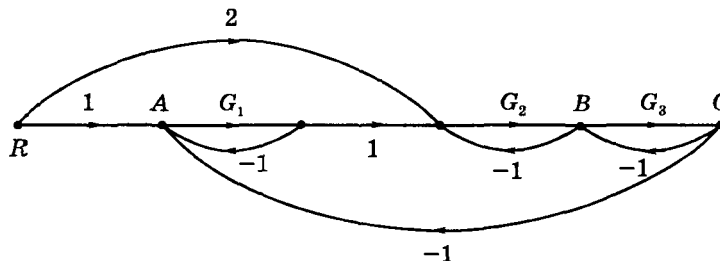
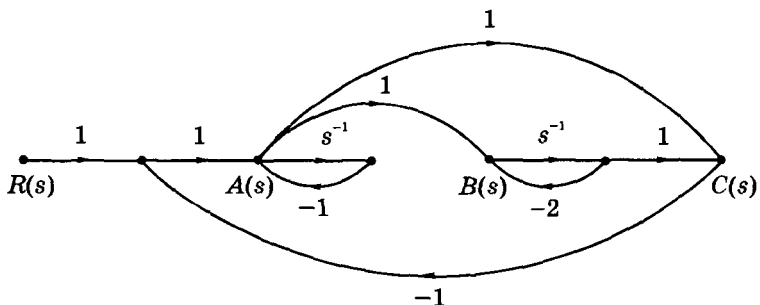


Рис. 2.11 (3)



2.11. (а) Граф, изображенный на рис. 2.11 (3), называется схемой моделирования. Такие схемы очень полезны при решении задач анализа и синтеза систем. Для этой схемы определите передаточную функцию $C(s)/R(s)$ с помощью формулы Мейсона.

(б) Запишите уравнения относительно переменных $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$.

(в) Решите уравнения из п. (б) с помощью MATLAB.

2.12. На рис. 2.12 (3) изображены три структурные схемы.

(а) Определите передаточные функции G_a и G_b , так, чтобы схема (б) была эквивалентна схеме (а).

(б) Определите передаточные функции G_c и G_d так, чтобы схема (в) была эквивалентна схеме (а).

2.13. На рис. 2.13 (3) изображены три структурные схемы.

(а) Определите передаточные функции G_a и G_b , так, чтобы схема (б) была эквивалентна схеме (а).

(б) Определите передаточные функции G_c и G_d так, чтобы схема (в) была эквивалентна схеме (а).

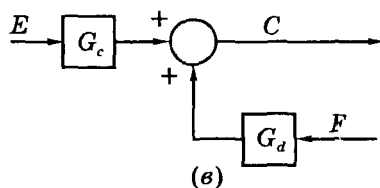
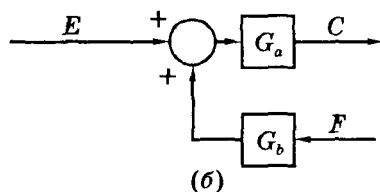
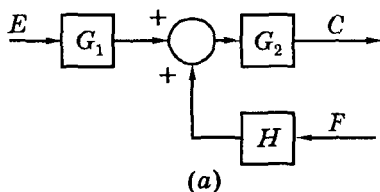


Рис. 2.12 (3)

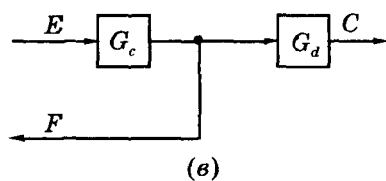
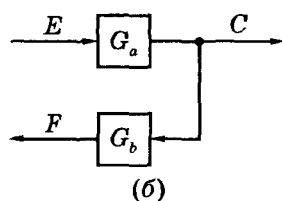
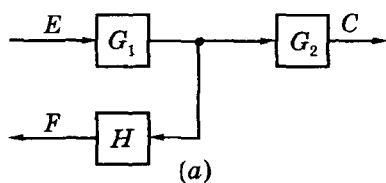


Рис. 2.13 (3)

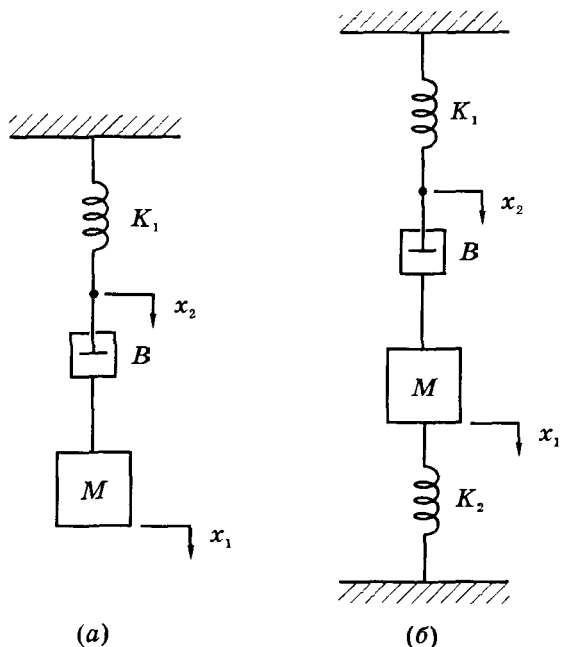


Рис. 2.14 (3)

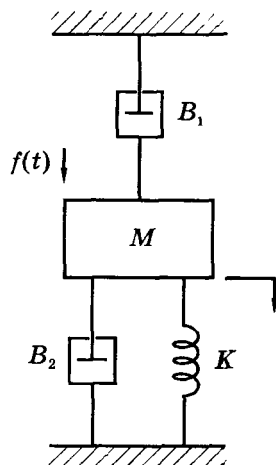


Рис. 2.15 (3)

- 2.14. (а) Запишите дифференциальные уравнения для механической системы, изображенной на 2.14 (3), (а). Предполагается, что внешние силы отсутствуют, а система приходит в движение только за счет начальных условий.
- (б) К массе M приложена сила $f(t)$, направленная вниз. Определите передаточную функцию связывающую эту силу с перемещением массы $x_1(t)$, т.е. $X_1(s)/F(s)$.
- (в) Повторите п. (а) для системы на рис.2.14 (3), (б).
- (г) К массе M на рис.2.14 (3), (б) приложена сила $f(t)$, направленная вниз. Найдите передаточную функцию $X_1(s)/F(s)$.
- 2.15. Рассмотрите механическую систему, изображенную на рис. 2.15 (3).
- (а) Опишите движение системы дифференциальным уравнением.
- (б) Определите передаточную функцию, связывающую приложенную силу $f(t)$ и перемещение массы $y(t)$, т.е. $Y(s)/F(s)$.
- 2.16. Рассмотрите механическую систему из примера 2.11 (раздел 2.5).
- (а) Постройте граф для этой системы путем решения первого уравнения относительно X_2 второго уравнения — относительно $X_1(s)$.
- (б) Покажите, что передаточная функция $X_1(s)/F(s)$, найденная по графу, построенному (а), совпадает с выражением, полученным в примере.
- 2.17. Предположим, что вал сервопривода, рассмотренного в разделе 2.7, не является жестким, а может быть представлен в виде скручивающейся пружины, как показано на рис. 2.17 (3).
- (а) Запишите дифференциальные уравнения для данной системы.
- (б) Изобразите структурную схему системы, считая $E_a(s)$ входом, а $\Theta(s)$ — выходом.
- (в) Определите передаточную функцию $\Theta_m(s)/E_a(s)$.
- (г) Определите передаточную функцию $\Theta(s)/E_a(s)$.
- (д) Определите передаточную функцию $\Theta(s)/\Theta_m(s)$.

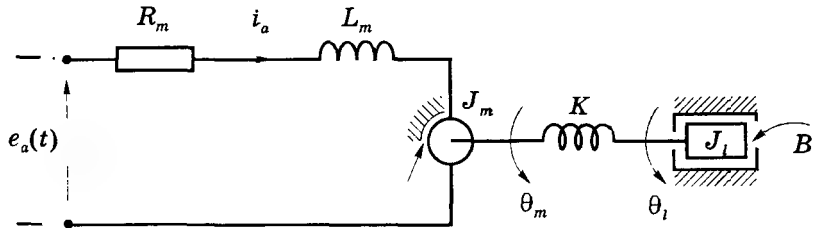


Рис. 2.17 (3)

- 2.18. (а) На рис 2.18 (3) изображена механическая система с вращательным движением в жидкостной среде. К внешнему цилиндру с моментом инерции J_1 приложен вращающий момент. Через вязкое трение B_1 энергия передается телу с моментом инерции J_2 . Запишите дифференциальные уравнения для этой системы.

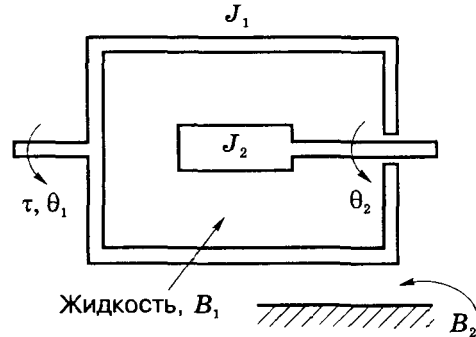


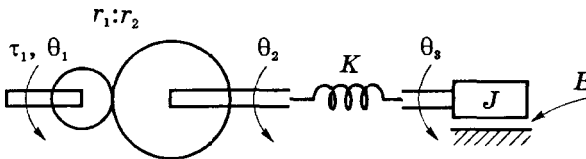
Рис. 2.18 (3)

- (б) На основании уравнений из п. (а) определите передаточную функцию $\theta_2(s)/T(s)$, где $T(s) = L[\tau(t)]$.

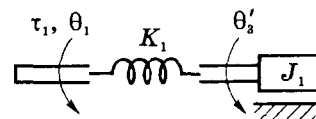
- 2.19. Изобразите электрическую схему, подобную механической системе на рис. 2.14 (3). Токи в электрической схеме должны быть аналогами скоростей в механической системе.

- 2.20. Изобразите электрическую схему, подобную модели тормозной системы автомобиля из примера 2.11. Токи в электрической схеме должны быть аналогами скоростей в механической системе.

- 2.21. На рис. 2.21 (3) изображены механическая система с зубчатой передачей и модель этой системы. Определите значения параметров модели так, чтобы связь между τ_1 и θ_1 была такой же, как и для исходной системы.



(а)



(б)

Рис. 2.21 (3)

- 2.22. На рис. 2.22 (3) изображена структурная схема следящей системы управлением перемещением руки робота (см. раздел 2.12).

- (а) Определите передаточную функцию объекта управления $\Theta_L(s)/E_a(s)$.
 (б) Определите передаточную функцию замкнутой системы $\Theta_L(s)/\Theta_c(s)$.
 (в) Определите передаточную функцию замкнутой системы от входа $\Theta_c(s)$ к напряжению якоря двигателя $E_a(s)$.
 (г) Допустим, что нам известен сигнал $E_a(s)$ в замкнутой системе. Получите выражение $\Theta_L(s)$ как функцию сигнала $E_a(s)$.

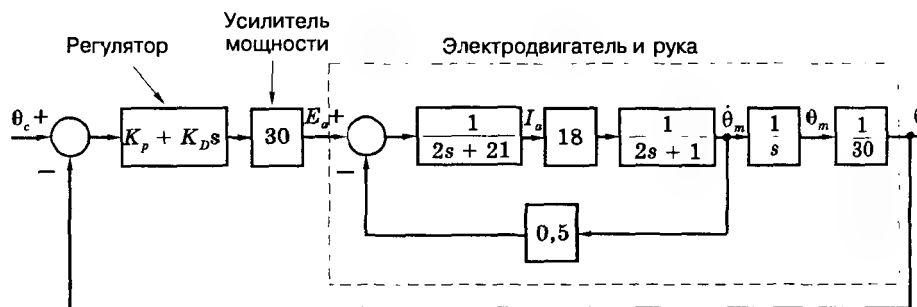


Рис. 2.22 (3)

2.23. Рассмотрите линейную модель маятника (см. раздел 2.14).

- Покажите, что если гирьку зафиксировать в начальном положении θ_1 , а затем отпустить то возникшие колебания будут гармоническими.
- Определите частоту гармонических колебаний (в герцах) как функцию параметров маятника.
- Дифференциальное уравнение из п. (а) может быть решено с помощью программы MATLAB, приводимой ниже. Выполните эту программу и убедитесь, что результат совпадает с полученным в п. (а).

```
syms x x1 L g
x = dsolve('D2x + (g/L)*x = 0, Dx(0) = 0, x(0) = x1')
```

2.24. Дано дифференциальное уравнение $\dot{x} + f(x) = 0$. Линеаризуйте его в окрестности точки x если функция $f(x)$ имеет вид:

- $f(x) = x$;
- $f(x) = x^3$;
- $f(x) = e^{-x}$.

3. Модели в переменных состояниях

В предыдущей главе были представлены два вида моделей линейных стационарных непрерывных систем: линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и передаточные функции. Передаточная функция получается путем применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению, а последнее, наоборот, может быть получено из передаточной функции с помощью обратного преобразования Лапласа. В этой главе мы рассмотрим третий тип математической модели — *модель в переменных состояниях* [1, 2]. Эта модель также имеет вид дифференциальных уравнений, но записанных в специальной форме — как система уравнений первого порядка. Обычно модель в переменных состояниях представляют в векторно-матричной форме.

Смысл модели в переменных состояниях (или модели в пространстве состояний) заключается в том, что она сохраняет соотношение между входом и выходом системы (т.е. передаточную функцию), но в то же время позволяет перейти от одного дифференциального уравнения n -го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Преимущество такого представления в том, что кроме двух внешних переменных (входной и выходной), в модели отражаются и все внутренние переменные системы. Дополнительными аргументами в пользу моделирования системы в переменных состояниях являются следующие:

1. Модель в переменных состояниях для системы высокого порядка позволяет легко решать задачи анализа и синтеза с помощью цифрового компьютера, тогда как использование для тех же целей передаточной функции может оказаться безуспешным из-за трудностей вычислительного характера.
2. Имея модель в переменных состояниях, мы получаем больше информации об объекте управления (о его внутренних переменных); следовательно, процедура проектирования системы управления может быть выполнена более эффективно, нежели при использовании передаточной функции.
3. Почти все методы проектирования систем управления, дающие «наилучшее» решение, основаны на использовании моделей в переменных состояниях. Под «наилучшей» системой мы подразумеваем такую систему, в которой минимизируется (или максимизируется) значение некоторой функции, принятой за критерий качества.
4. Если даже мы и не используем современный метод проектирования, работающий с моделью в переменных состояниях (иногда это бывает нецелесообразно), мы все же можем достичь «наилучшего» решения путем применения классических методов, описанных в главах 7 и 9.
5. При имитационном моделировании (решение дифференциальных уравнений на цифровом компьютере) система должна быть представлена в виде своей модели в переменных состояниях.

3.1. Моделирование в переменных состояниях

Мы начнем этот раздел с примера, иллюстрирующего моделирование систем в переменных состояниях. Рассмотрим механическую систему с линейным перемещением, изображенную на рис. 3.1. Это та же система, с которой мы встречались в разделе 2.5, с той лишь разницей, что здесь перемещение обозначено $y(t)$. Дифференциальное уравнение, описывающее движение системы, имеет вид:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) - B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t), \quad (3-1)$$

а передаточная функция равна

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}. \quad (3-2)$$

Это выражение определяет зависимость положения $y(t)$ от действующей силы $f(t)$. Допустим, что нам нужна также информация о скорости. Тогда, используя метод переменных состояний, мы введем следующие переменные:

$$x_1(t) = y(t) \quad (3-3)$$

и

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t). \quad (3-4)$$

Здесь $x_1(t)$ есть положение массы, а $x_2(t)$ — ее скорость. На основании (3-1), (3-3) и (3-4) можем записать:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) = -\left(\frac{B}{M}\right)x_2(t) - \left(\frac{K}{M}\right)x_1(t) + \left(\frac{1}{M}\right)f(t). \quad (3-5)$$

Уравнения (3-3), (3-4) и (3-5) представляют собой модель системы в переменных состояниях. Однако эта модель обычно представляется в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{K}{M}\right)x_1(t) - \left(\frac{B}{M}\right)x_2(t) + \left(\frac{1}{M}\right)f(t), \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

Обычно уравнения состояния записывают в векторно-матричной форме, что значительно облегчает работу с ними (см. приложение А). В этой форме предыдущие уравнения принимают вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

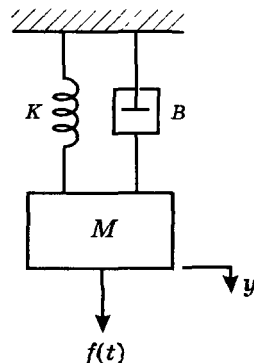


Рис. 3.1. Механическая система с линейным перемещением

Теперь ответим на вопрос: что же мы будем понимать под состоянием системы

Определение. Состояние системы в любой момент времени t_0 — это количество информации, которое вместе со всеми входными переменными однозначно определяет поведение системы при всех $t \geq t_0$.

Ниже будет показано, что вектор состояния, полученный на основании дифференциальных уравнений системы, удовлетворяет этому определению.

Стандартная форма уравнений состояния линейной стационарной непрерывной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{3-6}$$

где вектор $\dot{\mathbf{x}}(t)$ есть производная по времени от вектора $\mathbf{x}(t)$. В этих уравнениях

$\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния размерности $(n \times 1)$, компонентами которого являются переменные состояния системы n -го порядка;

$\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов системы $(n \times n)$;

$\mathbf{B}$ — матрица входа $(n \times r)$;

$\mathbf{u}(t)$ — вектор входа размерности $(r \times 1)$, компонентами которого являются входные переменные системы;

$\mathbf{y}(t)$ — вектор выхода размерности $(p \times 1)$, компонентами которого являются выходные переменные системы;

$\mathbf{C}$ — матрица выхода $(p \times n)$;

$\mathbf{D}$ — матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа.

Все векторы (сигналы) можно представить в развернутом виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

Вернемся к уравнениям (3-6). Первое из них есть матричное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно называется уравнением «вход-состояние», а решением его является вектор состояния $\mathbf{x}(t)$. Второе уравнение называется уравнением «вход-состояние-выход»; смысл такого названия в том, что оно позволяет определить выход $\mathbf{y}(t)$ по известным вектору входа $\mathbf{u}(t)$ и вектору состояния $\mathbf{x}(t)$. Матрица $\mathbf{D}$ обычно равна нулю, т.к. в физических системах во всех каналах между входами и выходами, как правило, присутствуют динамические звенья. Если матрица $\mathbf{D}$ отлична от нуля, это указывает на то, что по крайней мере один прямой путь от входов к выходам представлен обычным коэффициентом передачи.

Левая часть дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{x}(t)$ всегда представлена только первыми производными переменных состояния, правая же часть не должна содержать никаких производных. В уравнении относительно выхода $\mathbf{y}(t)$ также не должно быть никаких производных. Разумеется, систему можно описать уравнениями, в которых эти правила не соблюдаются, но эти уравнения уже не будут иметь стандартную форму.

Уравнения состояния (3-6) записаны в предположении, что у системы имеется несколько входных и выходных переменных. Такие системы принято называть *многомерными*. Если у системы имеется только один вход, то матрица $\mathbf{B}$ имеет вид столбца, а вектор $\mathbf{u}(t)$ превращается в скалярную переменную. Если у системы только один выход, то вектор

3.2. Схемы моделирования

$y(t)$ превращается в скалярную переменную, а матрица C принимает вид строки. Неприводится пример составления уравнений состояния для многомерной системы.

Пример 3.1

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + k_3 u_2,$$

$$\dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5 \dot{y}_1 = k_6 u_1,$$

где u_1 и u_2 — входные переменные, а y_1 и y_2 — выходные переменные. Зависимость переменных от времени для удобства опущена. За переменные состояния мы можем принять выходные системы и, если понадобится, их производные:

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}_1; \quad x_3 = y_2.$$

Тогда исходную систему уравнений можно представить в виде:

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + u_1 + k_3 u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -k_5 x_2 - k_4 x_3 + k_6 u_1.$$

Окончательно уравнения принимают вид:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + u_1 + k_3 u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -k_5 x_2 - k_4 x_3 + k_6 u_1.$$

К ним добавляются уравнения для выходных переменных:

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_3.$$

Эти уравнения можно записать в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Представьте себе, что уравнения, приведенные в рассмотренном примере, представляют собой модель механической системы с линейным перемещением. Допустим, что y_1 и y_2 — это текущее положение некоторых элементов системы. Тогда $x_2 = \dot{y}_1$ — скорость движения системы. Следовательно, все переменные состояния соответствуют реальным физическим переменным системы: x_1 и x_3 — это перемещения, а x_2 — скорость. Вообще говоря, желательно (но не обязательно), чтобы в качестве переменных состояний выступали реальные физические переменные; к этому вопросу мы вернемся в разделе 4. А сейчас мы рассмотрим метод получения уравнений состояния непосредственно по передаточной функции системы. В общем случае переменные состояния, получаемые таким способом, могут не соответствовать реальным физическим переменным.

3.2. Схемы моделирования

В разделе 3.1 на примере мы показали, как можно получить модель системы в переменных состояния, используя дифференциальные уравнения. Так поступают во многих практических ситуациях. Однако, если путем идентификации системы (см. раздел 2.13) получен

модель в виде передаточной функции, то от нее непосредственно можно перейти к уравнениям состояния. Поскольку этот метод обладает рядом преимуществ, рассмотрим его более подробно.

Метод основан на использовании *схем моделирования*, т.е. структурных схем или графов специфической конфигурации. Вообще говоря, схема моделирования может быть построена путем использования любого из видов математической модели системы — передаточной функции, дифференциальных уравнений или уравнений состояния. Свое название схемы моделирования получили не случайно, а именно потому, что они представляют собой «заготовку» для исследования системы с помощью аналоговых или цифровых компьютеров.

Основным элементом схемы моделирования является интегратор, изображенный на рис. 3.2 в виде отдельного блока. Он характеризуется уравнением

$$y(t) = \int x(t) dt,$$

что при переходе к изображениям по Лапласу дает:

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \quad (3-7)$$

Следовательно, передаточная функция блока, выполняющего операцию интегрирования, равна $1/s$, как показано на рис. 3.2. Поскольку нас интересует только передаточная функция, то начальное условие для $y(t)$ мы, как и раньше, полагаем равным нулю.

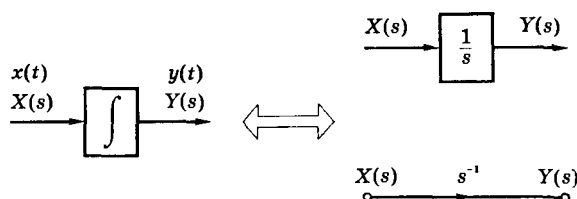


Рис. 3.2. Интегратор

Если выход интегратора обозначить через $y(t)$, то его входом должна являться производная dy/dt . Это свойство как раз и используется при построении схем моделирования. Рассмотрим, например, два интегратора, соединенных последовательно, как показано на рис. 3.3 (а). Если выход второго интегратора есть $y(t)$, то его входом является $\dot{y}(t)$; аналогично, входом первого интегратора будет $\ddot{y}(t) = d^2y/dt^2$. Эту цепочку из двух интеграторов можно использовать для построения схемы моделирования механической системы (см. рис. 3.1). Входом двух интеграторов на рис. 3.3 (а) является $\ddot{y}(t)$, а уравнение движения механической системы, полученное ранее [см. (3-1)], имеет вид:

$$\ddot{y}(t) = -\left(\frac{B}{M}\right)\dot{y}(t) - \left(\frac{K}{M}\right)y(t) + \left(\frac{1}{M}\right)f(t). \quad (3-8)$$

Следовательно, чтобы связать все переменные, входящие в уравнение (3-8), схему рис. 3.3 (а) нужно дополнить сумматором и тремя коэффициентами усиления. Результат показан на рис. 3.3 (б). Это и есть *схема моделирования* механической системы.

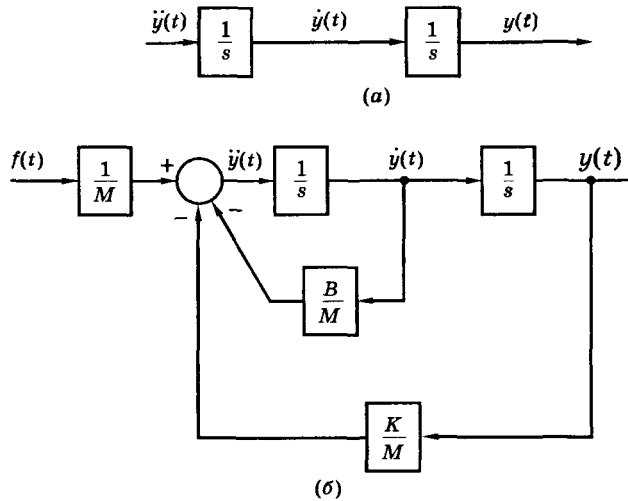
Общий принцип построения схем моделирования заключается в формировании структурной схемы, состоящей только из интеграторов, сумматоров и коэффициентов усиления. Применяя к схеме на рис. 3.3 (б) формулу Мейсона, получим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{(1/M)s^{-2}}{1 + (B/M)s^{-1} + (K/M)s^{-2}} = \frac{1/M}{s^2 + (B/M)s + (K/M)}, \quad (3-9)$$

что совпадает с ранее найденным выражением (3-2).

Рис. 3.3

Схема моделирования



Заметим, что если схема моделирования строится на основе дифференциалы уравнений системы, то решение является однозначным. Однако, если исходные данные представлены в виде передаточной функции, то схема моделирования может иметь личную конфигурацию, т.е. решение уже не будет однозначным.

Покажем, как передаточной функции общего вида

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + \dots + a_0s^{-n}} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0} \quad (3)$$

можно поставить в соответствие две разных схемы моделирования. На рис. 3.4 изображена схема моделирования, называемая *канонической формой управляемости*, соответствующая частному случаю выражения (3-10) для $n = 3$, т.е.

$$G(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (3)$$

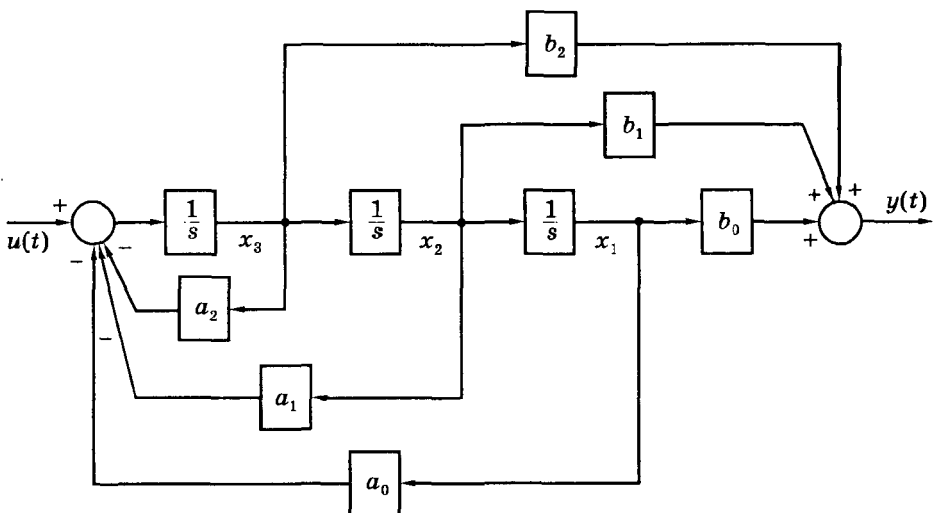


Рис. 3.4. Каноническая форма управляемости

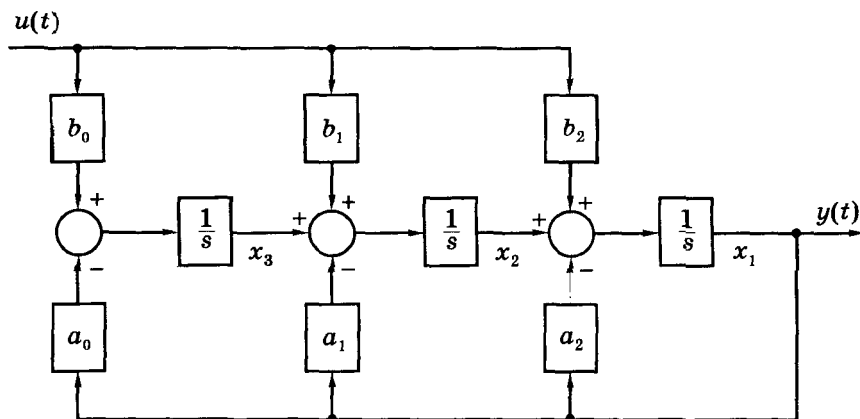


Рис. 3.5. Каноническая форма наблюдаемости

Той же самой передаточной функции (3-11) на рис. 3.5 соответствует вторая схема моделирования, известная под названием *канонической формы наблюдаемости*. Эти, новые для нас, термины своим появлением обязаны современной теории управления, и их смысл будет раскрыт позже в этой книге. С помощью формулы Мейсона нетрудно убедиться, что две схемы моделирования имеют одну и ту же передаточную функцию. Заметим, что вектор состояния $x(t)$ в схеме на рис. 3.4 не совпадает с вектором $x(t)$ в схеме на рис. 3.5.

Заметим, что в передаточной функции (3-10) порядок числителя должен быть, по крайней мере, на единицу меньше порядка знаменателя. Разумеется, любой из коэффициентов a , или b , может равняться нулю. Данное условие всегда выполняется в реальных физических системах; почему это так — станет ясно, когда мы рассмотрим частотные характеристики систем. Однако схемы моделирования можно изобразить и для систем, передаточные функции которых имеют одинаковый порядок числителя и знаменателя (см. задачу 3.6, г).

Если по заданной передаточной функции построена схема моделирования, то легко можно получить модель системы в переменных состояния. Эта процедура состоит из двух этапов:

1. Принять выход каждого интегратора за переменную состояния.
2. Записать уравнения относительно входа каждого интегратора и относительно каждого выхода системы.

Поясним эти этапы на примере канонической формы управляемости (рис. 3.4). Уравнения состояния записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [b_0 \ b_1 \ b_2] \mathbf{x}. \quad (3-12)$$

От этих уравнений легко можно перейти к системе n -го порядка (см. задачу 3.25). Допустим, например, что $y(t)$ есть выходная переменная (перемещение) следящей системы. Тогда $x_1(t)$ — это не перемещение, $x_2(t)$ — не скорость и т.д. Для канонической формы наблюдаемости (рис. 3.5) уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u, \quad (3.1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}.$$

Предположим снова, что $y(t)$ — это перемещение, тогда $x_1(t)$ тоже является перемещением, $x_2(t)$ — это не скорость и т.д. Заметим, что коэффициенты, фигурирующие в передаточной функции, появляются в матрицах уравнений состояния. Это означает, что уравнения состояния, соответствующие двум каноническим представлениям системы, могут быть написаны непосредственно по передаточной функции, минуя схему моделирования.

Рассмотрим пример, на котором проиллюстрируем получение уравнений состояния, если известна схема моделирования.

Пример 3.2

Вернемся еще раз к механической системе на рис. 3.1 и 3.3 (б). На схеме моделирования (рис. 3.6), повторяющей рис. 3.3 (б), за переменные состояния приняты выходы каждого интегратора. Таким образом, вход правого интегратора на схеме есть $\dot{x}_1$; уравнение относительно этой переменной имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

Для второго интегратора входом является $\dot{x}_2$. Уравнение относительно $\dot{x}_2$ имеет вид:

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{K}{M}\right)x_1 - \left(\frac{B}{M}\right)x_2 + \left(\frac{1}{M}\right)f,$$

а выход системы равен

$$y = x_1.$$

Эти уравнения можно представить в векторно-матричной форме:

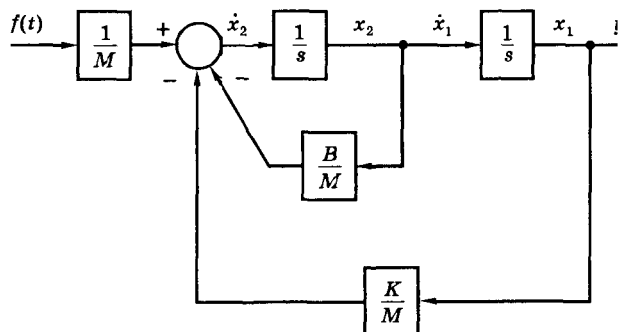
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Это те же уравнения, которые были получены в первом разделе данной главы, и им соответствует модель в канонической форме управляемости (рис. 3.6).

Рис. 3.6

Схема моделирования к примеру 3.2



Пример 3.3.

Целью данного примера является построение модели в переменных состояния для двигателя постоянного тока как элемента прокатного стана. На рис. 3.7 (а) проиллюстрирован процесс действия прокатного стана. Назначение валков заключается в уменьшении толщины стал

ленты, т.е. $w_3 < w_2 < w_1$. На рисунке показаны две пары валков, хотя в действительности у прокатного стана их значительно больше. По мере движения стальной полосы ее толщина уменьшается, а длина, соответственно, увеличивается. Поэтому на рис. 3.7 (а) вторая пара валков должна вращаться с большей скоростью, чем первая. Скорость вращения второй пары валков зависит от скорости вращения первой пары и создаваемого ей уменьшения толщины полосы. Следовательно, возникает задача регулирования скорости вращения второй пары валков с достаточно высокой точностью. Структурная схема системы регулирования скорости двигателя изображена на рис. 3.7 (б), а эквивалентная схема двигателя — на рис. 3.7 (в). Из раздела 2.7 нам известны следующие уравнения для двигателя:

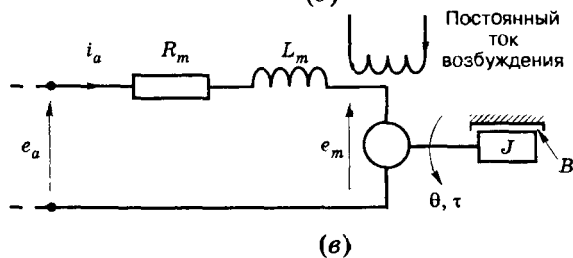
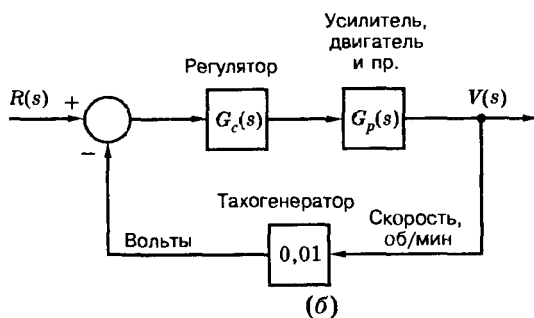
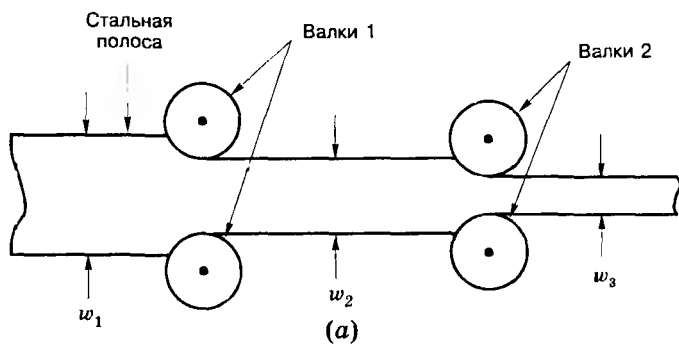
$$[2-41] \quad e_m(t) = K_m \frac{d\theta(t)}{dt},$$

$$[2-43] \quad e_a(t) = L_m \frac{di_a(t)}{dt} + R_m i_a(t) + e_m(t),$$

$$[2-45] \quad \tau(t) = K_\tau i_a(t),$$

$$[2-47] \quad J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} = \tau(t).$$

Рис. 3.7
Модель
электродвигателя
к примеру 3.3



3.2. Схемы моделирования

В этих уравнениях фигурируют следующие переменные:

$e_a(t)$ — напряжение якоря (вход),

$e_m(t)$ — противоЭДС,

$i_a(t)$ — ток в цепи якоря,

$\tau(t)$ — вращающий момент,

$\theta(t)$ — угол поворота вала двигателя,

$d\theta(t)/dt = \omega(t)$ — угловая скорость двигателя (выход).

На скорость вращения двигателя оказывает влияние изменение напряжения якоря, поэтому $e_a(t)$ считается входной переменной, а $\omega(t)$ — выходной.

В качестве переменных состояния выберем $x_1(t) = \omega(t) = d\theta(t)/dt$ и $x_2(t) = i_a(t)$. Обе эти переменные легко поддаются измерению и, как будет показано в главе 10, это играет большое значение при проектировании систем управления.

Далее запишем уравнения состояния. Из (2-45) и (2-47) имеем:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{B}{J} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{K_\tau}{J} i_a(t),$$

или

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{B}{J} x_1(t) + \frac{K_\tau}{J} x_2(t).$$

Из (2-41) и (2-43) имеем:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) = -\frac{K_m}{L_m} x_1(t) - \frac{R_m}{L_m} x_2(t) + \frac{1}{L_m} e_a(t).$$

Выход системы $y(t) = d\theta(t)/dt = x_1(t)$. Следовательно, уравнения состояния принимают вид

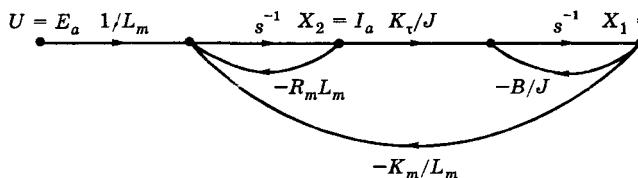
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_\tau}{J} \\ -\frac{K_m}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_m} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t),$$

где вход $u(t) = e_a(t)$. Схема моделирования, соответствующая данным уравнениям, приведена на рис. 3.8, где обозначено $\Omega(s) = L[d\theta(t)/dt]$. Заметим, что полученная модель не соответствует ни одной из канонических форм, рассмотренных ранее.

Рис. 3.8

Схема моделирования к примеру 3.3



В этом и предыдущем разделах мы рассмотрели разные методы представления систем в переменных состояния. Однако они не являются единственными, поскольку (как будет показано в разделе 3.5) для одной и той же системы переменные состояния могут быть выбраны достаточно произвольно.

Для системы с одним входом и одним выходом число переменных состояния все равно порядку дифференциального уравнения или передаточной функции. Для многомерных систем это правило иногда может не действовать. Так, в примере 3.1 мы обнаружили, что число переменных состояния равно числу независимых переменных системы плюс число их производных до $(r-1)$ -го порядка, где r — порядок старшей производной независимой переменной.

3.3. Решение уравнений состояния

К данному моменту мы познакомились с процедурами записи уравнений состояния для системы, заданной либо своим дифференциальным уравнением, либо передаточной функцией. В этом разделе будут представлены два метода решения этих уравнений.

3.3.1. Метод преобразования Лапласа

Стандартная форма уравнений состояния имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3-14)$$

Для решения воспользуемся преобразованием Лапласа. Рассмотрим первое из уравнений системы (3-14):

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r, \quad (3-15)$$

где a_{ij} и b_{ij} — соответствующие элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, а зависимость переменных от времени для удобства опущена. Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим:

$$sX_1(s) - x_1(0) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots + a_{1n}X_n(s) + b_{11}U_1(s) + \dots + b_{1r}U_r(s), \quad (3-16)$$

где учтено начальное условие, т.к. нам необходимо найти полное решение. Преобразование по Лапласу второго уравнения системы (3-14) дает:

$$sX_2(s) - x_2(0) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \dots + a_{2n}X_n(s) + b_{21}U_1(s) + \dots + b_{2r}U_r(s). \quad (3-17)$$

Точно так же преобразуются и все остальные уравнения системы (3-14). Результат можно записать в матричной форме:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

где

$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T.$$

Мы хотим решить это уравнение относительно $\mathbf{X}(s)$, поэтому сгруппируем все члены, содержащие $\mathbf{X}(s)$, в левой части уравнения:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (3-18)$$

Теперь необходимо выделить множитель $\mathbf{X}(s)$ в левой части уравнения. Для этого сначала представим член $s\mathbf{X}(s)$ как $s\mathbf{I}\mathbf{X}(s)$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Тогда

$$s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (3-19)$$

Этот дополнительный шаг понадобился потому, что вычитание матрицы $\mathbf{A}$ из скалярной переменной s не определено; мы не можем выразить $\mathbf{X}(s)$ непосредственно из (3-18). Из уравнения (3-19) получим:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (3-20)$$

а вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ будет обратным преобразованием Лапласа от $\mathbf{X}(s)$.

Чтобы получить общее выражение для решения, введем понятие *переходной матрицы состояния* (матрицы перехода) $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]. \quad (3-21)$$

Эту матрицу называют также *фундаментальной матрицей*. Заметим, что для системы n -го порядка матрица перехода имеет размерность $(n \times n)$. Обратное преобразование Лапласа для матрицы определяется путем применения обратного преобразования Лапласа к каждому элементу этой матрицы. Определение матрицы перехода по выражению (3-21) в общем

3.3. Решение уравнений состояния

случае является громоздким, требующим значительных затрат времени и сопряженным возможными ошибками. На практике вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ удобнее находить с помощью моделирования на цифровом или аналоговом компьютере. Этот вопрос будет рассмотрен несколько позже.

Как можно видеть из (3-20), матрица перехода определяет решение дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (3)$$

В следующем примере мы проиллюстрируем вычисление матрицы перехода по выражению (3-21).

Пример 3.4

Рассмотрим систему с передаточной функцией

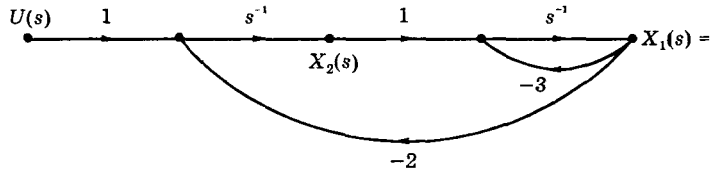
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}.$$

Модель системы в переменных состояния в виде графа изобразим, воспользовавшись канонической формой управляемости. Результат показан на рис. 3.9. Уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Рис. 3.9
Система
к примеру 3.4



Очевидно, что применение формулы Мейсона дает нужную передаточную функцию. К тому же, передаточную функцию можно получить с помощью следующей программы MATLAB:

```
e3p4 = ss([-3 1; -2 0], [0; 1], [1 0], 0);
tf(e3p4)
```

Для определения матрицы перехода сначала найдем матрицу $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти обратную матрицу, сформируем присоединенную матрицу

$$\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

и вычислим определитель

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2).$$

Тогда обратная матрица будет получена путем деления присоединенной матрицы на определитель $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Матрицу перехода получим с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Лишний раз можно убедиться, что для системы второго порядка матрица перехода имеет размерность (2×2) . По аналогии для системы n -го порядка размерность матрицы перехода равна $(n \times n)$.

Программа MATLAB, которая непосредственно вычисляет элементы матрицы $\Phi(t)$ на основании (3-33), имеет вид:

```
S=dsolve('Dx1=-3*x1+x2, Dx2=-2*x1, x1(0)=x10, x2(0)=x20')
s.x1
s.x2
```

С помощью MATLAB можно также получить каждый элемент матрицы перехода путем обратного преобразования Лапласа, используя выражение (3-21).

Освоив методику вычисления матрицы перехода по выражению (3-21), теперь можно приступить к отысканию полного решения уравнений состояния (3-20). Напомним вид этих уравнений:

$$[3-20] \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s).$$

Порядок действий проиллюстрируем, взяв за основу предыдущий пример.

Пример 3.5

Рассмотрим систему из примера 3.4, для которой уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

а преобразование по Лапласу матрицы перехода

$$\Phi(s) = L[\Phi(t)] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что на вход системы подано единичное ступенчатое воздействие. Тогда $U(s) = 1/s$, и второй член в (3-20) принимает вид:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/2}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} \\ \frac{3/2}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Тот же результат можно получить с помощью программы MATLAB:

```
S = dsolve('Dx1=-3*x1+x2, Dx2=-2*x1+1, x1(0)=0, x2(0)=0')
s.x1
s.x2
```

Матрица перехода была найдена в примере 3.4, поэтому полное решение уравнений состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)] = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

и переменные состояния равны:

$$x_1(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

и

$$x_2(t) = (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (2e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Нахождение полного решения уравнений состояния даже для системы второго порядка является трудоемкой процедурой. Поэтому предпочтительнее для этих целей воспользоваться методом компьютерного моделирования.

Полное решение уравнений состояния можно получить несколько иным способом. Второе слагаемое в правой части уравнения (3-20) представляет собой произведение двух изображений по Лапласу. Поэтому обратное преобразование Лапласа для этого члена имеет вид интеграла свертки (см. приложение Б). Таким образом,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau) d\tau. \quad (3-23)$$

По теореме свертки это решение можно записать иначе:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau)\mathbf{B}u(t-\tau) d\tau. \quad (3-24)$$

Мы видим, что решение состоит из двух слагаемых. Первое из них представляет собой *свободное движение системы*, возникающее только за счет начальных условий (в отсутствие входного сигнала). Второе слагаемое соответствует *вынужденному движению системы*, обусловленному входным воздействием (при этом начальные условия полагаются нулевыми).

Как следует из (3-24), центральную роль в решении уравнений состояния играет матрица перехода. Этот вид решения сопряжен с трудностями вычислительного характера, если только речь не идет о простейших системах. Проиллюстрируем применение выражения (3-24) на том же самом примере.

Пример 3.6

В предыдущем примере мы предположили, что на вход системы подано единичное ступенчатое воздействие, т.е. $u(t) = 1(t)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau) d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau \\ \int_0^t [2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-t}e^{\tau} - \frac{1}{2}e^{-2t}e^{2\tau})|_0^t \\ (2e^{-t}e^{\tau} - \frac{1}{2}e^{-2t}e^{2\tau})|_0^t \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-e^{-t}) - \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 2(1-e^{-t}) - \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Этот результат совпадает с соответствующим выражением в примере 3.5 для вынужденной составляющей решения. Свободная составляющая решения была получена в том же примере и здесь не приводится.

Подводя итоги, можно сказать, что решение уравнений состояния получается либо с помощью преобразования Лапласа, либо с помощью комбинации этого преобразования и интеграла свертки. В любом случае процедура является длинной, отнимает много времени и может привести к появлению ошибок. Поэтому на практике следует отдать предпочтение анализу динамики системы с помощью моделирования.

3.3.2. Метод разложения в бесконечный ряд

Один из методов решения дифференциальных уравнений заключается в следующем. Считают, что решение имеет вид бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами. Этот ряд подставляют в дифференциальное уравнение и таким образом определяют неизвестные коэффициенты. Воспользуемся данным методом для нахождения матрицы перехода. В предположении, что все входные переменные системы равны нулю, уравнения состояния принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (3-25)$$

а их решение, на основании (3-23),

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0). \quad (3-26)$$

Поскольку искомым является вектор $\mathbf{x}(t)$, представим его в виде ряда:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t + \mathbf{K}_2 t^2 + \mathbf{K}_3 t^3 + \dots) \mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i t^i \mathbf{x}(0) = \Phi(t) \mathbf{x}(0), \quad (3-27)$$

где все матрицы $\mathbf{K}$, размерности $(n \times n)$ считаются неизвестными, а t — скалярная переменная (время). Дифференцируя это выражение, получим:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 t + 3\mathbf{K}_3 t^2 + \dots) \mathbf{x}(0). \quad (3-28)$$

Подставим (3-27) и (3-28) в (3-25):

$$(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 t + 3\mathbf{K}_3 t^2 + \dots) \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 t + \mathbf{K}_2 t^2 + \dots) \mathbf{x}(0). \quad (3-29)$$

Далее выполним следующие операции. Сначала вычислим (3-29) при $t = 0$. Затем продифференцируем (3-29) и найдем результат при $t = 0$. Еще раз продифференцируем выражение и подставим $t = 0$. Повторяя эти действия, каждый раз будем получать уравнение относительно неизвестных матриц $\mathbf{K}_i$. В итоге образуется система уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{K}_0 \\ 2\mathbf{K}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{K}_1 \\ 3\mathbf{K}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{K}_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3-30)$$

3.3. Решение уравнений состояния

Вычисление (3-27) при $t = 0$ дает результат $K_0 = I$. Тогда другие матрицы определяются уравнений (3-30):

$$\begin{aligned} K_1 &= A \\ K_2 &= \frac{A^2}{2!} \\ K_3 &= \frac{A^3}{3!} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3-31)$$

Следовательно, матрица перехода, представленная в (3-27) в виде бесконечного ряда, может быть записана как

$$\Phi(t) = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (3-32)$$

Сравнивая это выражение с разложением в ряд Тейлора скалярной экспоненты,

$$e^{kt} = 1 + kt + k^2 \frac{t^2}{2!} + k^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (3-33)$$

приходим к выводу, что матрицу перехода можно представить как экспоненциальную функцию матрицы A :

$$\Phi(t) = e^{At}. \quad (3-34)$$

Проиллюстрируем этот метод на следующем примере.

Пример 3.7

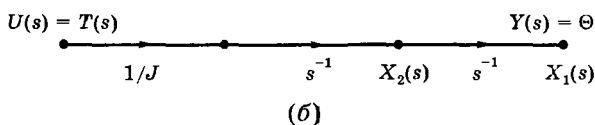
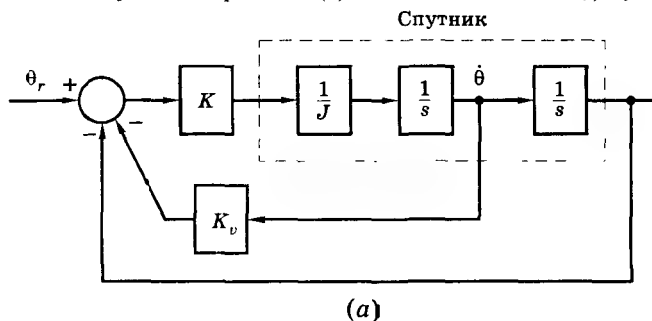
Вернемся еще раз к модели спутника из раздела 2.6. В данном случае ряд (3-32) будет иметь конечное число ненулевых членов. В примере 2.13 была получена передаточная функция спутника:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2},$$

где $T(s)$ — момент, приложенный к спутнику, а $\Theta(s)$ — угол его поворота. Структурная схема системы управления спутником изображена на рис. 3.10 (а). Угловое положение $\theta(t)$ и угл

Рис. 3.10

Система управления положением спутника



скорость $\dot{\theta}(t)$ спутника измеряются, и их значения используются для формирования управляющего сигнала. Схема моделирования спутника приведена на рис. 3.10 (б). Уравнения состояния можно записать непосредственно по схеме моделирования:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} u(t).$$

Таким образом, в выражении (3-32)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{n-2} = \mathbf{0}; \quad n \geq 3.$$

Следовательно, матрица перехода на основании (3-32) равна:

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном примере нам довольно легко удалось вычислить матрицу перехода, т.к. разложение ее в ряд имеет конечное число членов. В общем случае найти сумму членов бесконечного ряда достаточно сложно.

Представление $\Phi(t)$ в виде бесконечного ряда имеет преимущества, когда матрица перехода вычисляется на цифровом компьютере для нескольких значений времени t . Разложение в ряд также оказывается удобным при анализе цифровых систем управления [3, 4].

3.4. Передаточные функции

В разделе 3.2 была рассмотрена процедура записи уравнений состояния, если задана передаточная функция системы. Здесь мы рассмотрим обратную задачу: даны уравнения состояния, требуется определить передаточную функцию. Один из способов решения данной задачи заключается в построении схемы моделирования на основании известных уравнений состояния и последующем применении формулы Мейсона. Этот способ вполне логичен, но отличается трудоемкостью и обилием преобразований, за исключением простейших случаев. К тому же для систем высокого порядка поиск всех контуров и прямых путей на схеме моделирования оказывается почти невыполнимой задачей. В этом разделе мы покажем, как от уравнений состояния можно перейти к передаточной функции с помощью матричных операций; эту процедуру легко реализовать на цифровом компьютере, написав несложную программу [2]. Перейдем к рассмотрению данного способа.

Для системы с одним входом и одним выходом стандартная форма уравнений состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3-35)$$

3.4. Передаточные функции

Матрица D здесь отсутствует, потому что она обычно нулевая. Преобразование по Лапласу уравнений (3-35) при нулевых начальных условиях дает:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s). \quad (3-36)$$

Это уравнение можно привести к виду

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (3-37)$$

и решить относительно $X(s)$:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s). \quad (3-38)$$

Преобразуя по Лапласу второе уравнение из (3-35), получим:

$$Y(s) = CX(s). \quad (3-39)$$

Подстановка (3-38) в (3-39) дает:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) = G(s)U(s), \quad (3-40)$$

следовательно, передаточная функция системы равна

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi(s)B. \quad (3-41)$$

Если $D \neq 0$, то передаточная функция имеет выражение:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3-42)$$

Любознательный читатель может проверить это самостоятельно (см. задачу 3). Проделаем небольшой пример, иллюстрирующий рассмотренную процедуру.

Пример 3.8

Воспользуемся системой из примера 3.4, где была дана передаточная функция

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2},$$

для которой получены уравнения состояния:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t).$$

В том же примере была найдена матрица $(sI - A)^{-1}$. Тогда на основании (3-41) и данных примера 3.4 определим передаточную функцию:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция совпадает с исходной. Результат можно проверить помощью простой программы MATLAB:

```
e3p8 = ([-3 1; -2 0], [0; 1], [1 0], 0);  
tf(e3p8)  
Result: n 0 0 1 d 1 3 2,
```

где n и d есть, соответственно, коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции $G(s)$.

Для многомерных систем (систем с более, чем одним входом и/или более, чем одним выходом) $U(s)$ есть вектор размерности $(r \times 1)$, а $Y(s)$ — вектор размерности $(p \times 1)$. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, и выражение (3-40) приобретает вид:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) = G(s)U(s), \quad (3-43)$$

где $G(s)$ теперь является матрицей размерности $(p \times r)$. Каждый из элементов матрицы $G(s)$ представляет собой передаточную функцию

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad (3-44)$$

связывающую вход системы с номером j и выход с номером i . Примером многомерной системы является система регулирования температуры, рассмотренная в разделе 2.9.

3.5. Преобразования подобия

В данной главе были рассмотрены процедуры построения модели системы в переменных состояния в случаях, когда известны либо дифференциальные уравнения, либо передаточная функция. Было показано также, что эта задача не имеет однозначного решения. В частности, всегда можно получить два разных вида модели — в канонической форме управляемости и в канонической форме наблюдаемости. Система с одним входом и одним выходом имеет только одну модель, связывающую внешние переменные (передаточную функцию), но количество внутренних моделей (моделей состояния) неограниченно. Такая система описывается уравнениями состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3-45)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (3-46)$$

а ее передаточная функция определяется выражением

$$[3-42] \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Существуют различные комбинации матриц A , B , C и константы D , удовлетворяющие выражению (3-42) при заданной $G(s)$.

Допустим, что мы имеем модель системы в переменных состояния с уравнениями (3-45) и (3-46). Введем новый вектор состояния $v(t)$ той же размерности, что и $x(t)$, но элементы которого представляют собой линейные комбинации компонент вектора $x(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= q_{11}x_1(t) + q_{12}x_2(t) + \dots + q_{1n}x_n(t), \\ v_2(t) &= q_{21}x_1(t) + q_{22}x_2(t) + \dots + q_{2n}x_n(t), \\ &\vdots \\ v_n(t) &= q_{n1}x_1(t) + q_{n2}x_2(t) + \dots + q_{nn}x_n(t). \end{aligned} \quad (3-47)$$

То же самое можно представить в матричной форме:

$$v(t) = Qx(t) = P^{-1}x(t), \quad (3-48)$$

где матрица Q — обратная некоторой матрице P . Следовательно, вектор состояния $x(t)$ можно выразить как

$$x(t) = Pv(t), \quad (3-49)$$

где $\mathbf{P}$ — так называемая матрица преобразования базиса, или просто преобразование. Ниже приводится пример.

Пример 3.9

Рассмотрим систему из примера 3.4, для которой передаточная функция

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2},$$

а уравнения состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Предположим, что элементы нового вектора $\mathbf{v}(t)$ определяются выражениями:

$$v_1(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

$$v_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t),$$

как показано на рис. 3.11. Таким образом,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

и

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы $\mathbf{P}$ компоненты $\mathbf{x}(t)$ выражаются через компоненты $\mathbf{v}(t)$:

$$x_1(t) = 2v_1(t) - v_2(t),$$

$$x_2(t) = -v_1(t) + v_2(t).$$

Пример показывает нам, что если задан вектор $\mathbf{x}(t)$, то мы всегда можем найти $\mathbf{v}(t)$, и наоборот. Нахождение обратной матрицы легко проверить с помощью программы в MATLAB:

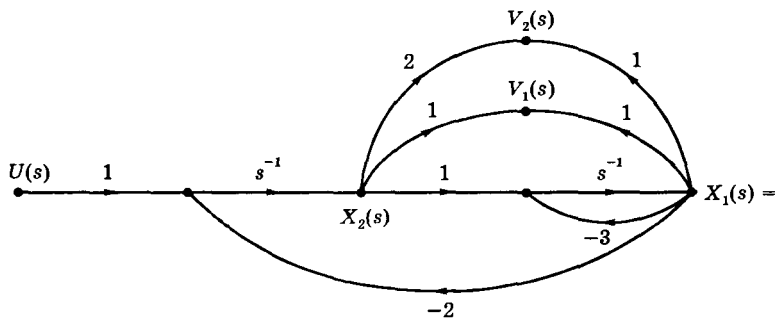
```
Q = [1 1; 1 2];
```

```
P = inv(Q)
```

```
Result: P 2 -1  
        -1 1
```

Рис. 3.11

Система
к примеру
3.9



Приведенный пример иллюстрирует преобразование одного вектора в другой. Преобразование изменяет внутреннюю структуру системы (модель состояния), но не затрагивает соотношение между входом и выходом (передаточную функцию). Такой преобразования называется *преобразованием подобия*. Ниже рассматриваются особенности преобразований подобия.

Предположим, что заданы модель системы в переменных состояния вида (3-45) и преобразование подобия (3-49):

$$[3-45] \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t);$$

$$[3-49] \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t).$$

Подстановка (3-49) в (3-45) дает:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3-50)$$

Решая это уравнение относительно $\dot{\mathbf{v}}(t)$, получим модель системы с вектором состояния $\mathbf{v}(t)$:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t). \quad (3-51)$$

Уравнение для выходной переменной

$$[3-46] \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

с учетом (3-49) принимает вид:

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}u(t). \quad (3-52)$$

Таким образом, мы имеем уравнения состояния (3-45) и (3-46) относительно вектора $\mathbf{x}(t)$ и уравнения (3-51) и (3-52) относительно преобразованного вектора $\mathbf{v}(t)$.

В общем случае для многомерной системы с вектором состояния $\mathbf{v}(t)$ уравнения состояния в стандартной форме имеют вид:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}_v \mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_v u(t), \quad (3-53)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_v \mathbf{v}(t) + \mathbf{D}_v u(t), \quad (3-54)$$

где индексами обозначены преобразованные матрицы. Матрицы в уравнениях относительно вектора $\mathbf{x}(t)$ индексов не имеют. Сравнивая (3-53) с (3-51) и (3-54) с (3-52), получим выражения для преобразованных матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_v &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}; \quad \mathbf{B}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}; \\ \mathbf{C}_v &= \mathbf{C}\mathbf{P}; \quad \mathbf{D}_v = \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3-55)$$

Ниже приводится пример преобразования подобия.

Пример 3.10

Рассмотрим систему из примера 3.9:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

с преобразованием

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основании (3-55) матрицы преобразованной системы принимают вид:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_v = \mathbf{C}\mathbf{P} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ -1].$$

Уравнения состояния преобразованной системы выглядят следующим образом:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}_v \mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_v u(t) = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}_v \mathbf{v}(t) = [2 \ -1] \mathbf{v}(t).$$

Все вычисления можно проверить с помощью программы в MATLAB:

```
A=[-3 1; -2 0]; B=[0; 1]; C=[1 0]; D=0; T=[1 1; 1 2];
sys = ss(A, B, C, D)
sys = ss2ss(sys, T)
```

В приведенном примере мы получили две разных модели в переменных состояния для одной и той же системы. Если выбрать другую матрицу $\mathbf{P}$, то получим третью модель. т.е. для каждой матрицы преобразования $\mathbf{P}$, которая имеет себе обратную, будет существовать своя модель. Иначе говоря, для системы, заданной своей передаточной функцией можно построить неограниченное количество моделей в переменных состояниях. Выбор той или иной модели зависит от конкретных обстоятельств: например, желания проектировщика иметь в качестве переменных состояния естественные физические величины (положение, скорость и т.п.), необходимости облегчить синтез системы управления и др.

Убедимся теперь, что преобразование подобия не изменяет вид передаточной функции системы.

Пример 3.11

Возьмем преобразованную систему из примера 3.10 и получим для нее передаточную функцию, предварительно изобразив схему моделирования (рис. 3.12). Далее воспользуемся формулой Мейсона. Уравнения состояния для этой системы таковы:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [2 \ -1] \mathbf{v}(t).$$

Напомним, что мы должны получить передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Убедимся в этом с помощью формулы Мейсона. Заметим, что схема моделирования содержит три контура, два из которых не касаются. Тогда, по формуле Мейсона,

$$\Delta = 1 - [-11s^{-1} + 8s^{-1} + (-15)s^{-1}(6)s^{-1}] + \\ + [-11s^{-1}][8s^{-1}] = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}.$$

Мы имеем четыре прямых пути. В порядке упражнения читателю предоставляется возможность найти их, прежде чем мы продолжим рассуждения. Коэффициенты передач прямых путей и соответствующие значения Δ_i таковы:

$$M_1 = 2s^{-1}$$

$$\Delta_1 = 1 - 8s^{-1}$$

$$M_2 = 15s^{-2}$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$M_3 = -2s^{-1}$$

$$\Delta_3 = 1 + 11s^{-1}$$

$$M_4 = (2)(6)(2)s^{-2}$$

$$\Delta_4 = 1$$

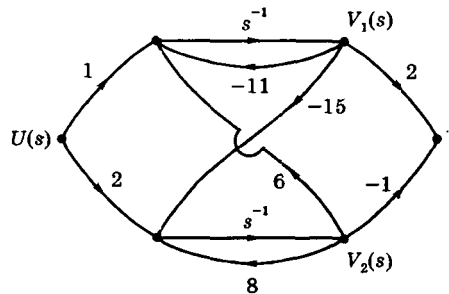


Рис. 3.12. Система к примеру 3.11

Тогда передаточная функция

$$G(s) = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 + M_4\Delta_4}{\Delta} =$$

$$= \frac{(2s^{-1})(1-8s^{-1}) + (15s^{-2})(1) + (-2s^{-1})(1+11s^{-1}) + (24s^{-2})(1)}{1+3s^{-1}+2s^{-2}} = \frac{s^{-2}}{1+3s^{-1}+2s^{-2}} = \frac{1}{s^2+3s+2},$$

что подтверждает наши ожидания. Отметим при этом определенные трудности, связанные с поиском всех контуров и прямых путей.

Передаточную функцию можно найти и иным способом, а именно с помощью матричного выражения (3-42):

$$G(s) = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v.$$

Мы имеем

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} s+11 & -6 \\ 15 & s-8 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = s^2 + 3s - 88 + 90 = s^2 + 3s + 2.$$

Присоединенная матрица

$$\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = \begin{bmatrix} s-8 & 6 \\ -15 & s+11 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1} = \frac{\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)} = \begin{bmatrix} \frac{s-8}{s^2+3s+2} & \frac{6}{s^2+3s+2} \\ \frac{-15}{s^2+3s+2} & \frac{s+11}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

На основании выражения (3-42) передаточная функция системы

$$G(s) = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-8}{s^2+3s+2} & \frac{6}{s^2+3s+2} \\ \frac{-15}{s^2+3s+2} & \frac{s+11}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s-1}{s^2+3s+2} & \frac{-s+1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}.$$

Получена та же самая передаточная функция, но вероятность ошибки здесь намного меньше, чем при использовании формулы Мейсона. Все матричные операции могут быть выполнены на цифровом компьютере с помощью программы MATLAB, как это было проиллюстрировано в примере 3.8.

Отметим теперь некоторые важные свойства преобразований подобия. Сначала рассмотрим определитель матрицы $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)$. На основании (3-55):

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}). \quad (3-56)$$

Известно, что для двух квадратных матриц $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$

$$\det\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \det\mathbf{R}_1 \det\mathbf{R}_2.$$

Тогда (3-56) можно представить в виде:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = \det\mathbf{P}^{-1} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det\mathbf{P}. \quad (3-57)$$

Поскольку для квадратной матрицы $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{I},$$

то

$$\det \mathbf{R}^{-1} \det \mathbf{R} = \det \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \det \mathbf{I} = 1. \quad (3-5)$$

Тогда (3-57) принимает вид:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (3-5)$$

Нули $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ есть характеристические числа, или собственные значения, матрицы $\mathbf{A}$ (с приложение А). Следовательно, матрицы $\mathbf{A}_v$ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковые характеристические числа. Это — первое свойство преобразований подобия.

Второе свойство заключается в следующем. Из (3-55) имеем:

$$\det \mathbf{A}_v = \det \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A}, \quad (3-6)$$

т.е. определитель матрицы $\mathbf{A}_v$ равен определителю матрицы $\mathbf{A}$. Это свойство вытекает также из того факта, что определитель матрицы равен произведению ее характеристических чисел (см. приложение А). А поскольку $\mathbf{A}_v$ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковые характеристические числа, то и их определители должны быть равны.

Третье свойство также вытекает из равенства собственных значений матриц $\mathbf{A}_v$ и $\mathbf{A}$. Поскольку след матрицы равен сумме ее собственных значений, то

$$\text{tr} \mathbf{A}_v = \text{tr} \mathbf{A}.$$

Подытожим свойства преобразований подобия, положив, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ есть собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Тогда для преобразования подобия $\mathbf{A}_v = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ справедливы следующие:

1. Собственные значения $\mathbf{A}$ равны собственным значениям $\mathbf{A}_v$, или

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n). \quad (3-7)$$

2. Определитель матрицы $\mathbf{A}$ равен определителю матрицы $\mathbf{A}_v$, т.е.

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_v = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (3-8)$$

3. След матрицы $\mathbf{A}$ равен следу матрицы $\mathbf{A}_v$, т.е.

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr} \mathbf{A}_v = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (3-9)$$

4. Следующие передаточные функции равны друг другу:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1} \mathbf{B}_v.$$

Доказательство четвертого свойства мы оставим для упражнения (см. задачу 3.2 оно было также проиллюстрировано в примере 3.11. Три первых свойства подтвердим следующим примером.

Пример 3.12

Воспользуемся преобразованием подобия из примера 3.10, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_v$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

и

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = \begin{vmatrix} s+11 & -6 \\ 15 & s-8 \end{vmatrix} = s^2 + 3s - 88 + 90 = s^2 + 3s + 2,$$

т.е. два определителя равны.

Далее найдем собственные значения:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2),$$

откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Определители двух матриц:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \det \mathbf{A}_v = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{vmatrix} = -88 + 90 = 2,$$

и эти определители равны произведению собственных значений. След каждой из этих матриц равен -3 , т.е. сумме собственных значений. Результаты этого примера можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
A = [-3 1; -2 0]; Av = [-11 6; -15 8];
detsImA = poly(A), detsImAv = poly(Av)
evA = eig(A), evAv = eig(Av)
detA = det(A), detAv = det(Av)
trA = trace(A), trAv = trace(Av)
```

3.6. Цифровое моделирование

Ранее уже отмечалось, что поведение системы во времени предпочтительнее искать путем моделирования, а не в результате непосредственного решения дифференциальных уравнений или применения преобразования Лапласа. Последнее в данной книге используется лишь по той причине, что с его помощью легко можно анализировать системы первого и второго порядка. Однако для систем более высокого порядка моделирование является необходимым, а часто и единственным инструментом.

В данном разделе мы рассмотрим численные методы решения дифференциальных уравнений, основанные на *алгоритмах интегрирования*. Известно достаточно много алгоритмов численного интегрирования [5].

Все алгоритмы различаются по скорости вычислений, точности, сложности программирования и т.д. Мы рассмотрим только самый простой алгоритм — *метод Эйлера*. Этот метод редко используется на практике, т.к. существуют более эффективные и точные алгоритмы. Он приводится здесь лишь благодаря простоте и легкости программирования.

Процесс численного интегрирования функции времени по методу Эйлера иллюстрирует рис. 3.13. Постановка задачи заключается в отыскании функции $x(t)$, определяемой выражением

$$\dot{x}(t) = z(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3-64)$$

Предположим, что нам известно значение $x(t)$ при $t = (k-1)H$, т.е. мы знаем $x[(k-1)H]$ и хотим определить $x(kH)$, где H — шаг интегрирования. В алгоритме Эйлера предполагается, что $z(t)$ сохраняет постоянное значение $z[(k-1)H]$ для $(k-1)H \leq t < kH$. Тогда

$$x(kH) = x[(k-1)H] + Hz[(k-1)H]. \quad (3-65)$$

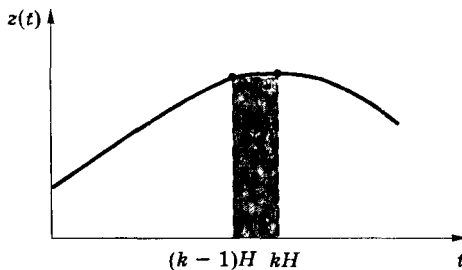


Рис. 3.13. Численное интегрирование по методу Эйлера

В выражении (3-65) $x(kH)$ — это только аппроксимация значения $x(t)$, определяемого (3-64) при $t = kH$. Это эквивалентно тому, что на рис. 3.13 мы заменили действительную площадь под кривой $z(t)$ для $(k-1)H \leq t < kH$ площадью заштрихованного прямоугольника. Отсюда данный метод получил название *метода прямоугольников*.

В случае моделирования нас интересует интегрирование дифференциальных уравнений. Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть нас интересует решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1. \quad (3-65)$$

Очевидно, что решение имеет вид

$$x(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Однако, в соответствии с численным интегрированием,

$$x(kH) = x[(k-1)H] + H\{-x[(k-1)H]\}, \quad (3-66)$$

т.е. из (3-66) для этого дифференциального уравнения

$$z(t) = \dot{x}(t) = -x(t).$$

Предположим, что $H = 0,1$ с. Тогда, приступая к решению (3-67), начиная с $k = 1$ [за начальное значение $x(0)$], получим:

$$x(0,1) = x(0) - Hx(0) = 1,0 - (0,1)(1,0) = 0,9,$$

$$x(0,2) = x(0,1) - Hx(0,1) = 0,9 - 0,09 = 0,81,$$

⋮

$$x(1,0) = x(0,9) - Hx(0,9) = 0,3487.$$

Поскольку нам известно точное решение дифференциального уравнения, мы можем вычислить $x(t)$ при $t = 1,0$ с:

$$x(1,0) = e^{-1,0} = 0,3679,$$

т.е. при численном интегрировании появляется ошибка. Если принять $H = 0,01$ с, то числовое решение $x(1,0)$ будет равно 0,3660, т.е. ошибка существенно уменьшится.

Если в рассмотренном примере увеличить H , то ошибка также увеличится. При уменьшении H ошибка будет уменьшаться, но до определенного (минимального) значения. Дальнейшее уменьшение H приведет к возрастанию ошибки из-за округления при вычислениях. Если $H = 0,1$ с, то для вычисления $x(1)$ требуется 10 итераций, а при $H = 0,001$ для этого потребуется уже 1000 итераций, и в результате округления при вычислениях ошибка будет накапливаться. Таким образом, ошибка будет возрастать как при увеличении шага интегрирования, так и при его уменьшении — в первом случае из-за грубой аппроксимации интеграла, а во втором случае из-за округления при вычислениях. Оптимальное значение шага интегрирования обычно находят опытным путем, т.е. варьируя H и оценивая соответствующий эффект. Например, выбирают некоторое начальное значение H и производят вычисления. Затем уменьшают H и повторяют вычисления. Если при этом результат изменяется незначительно, то делают вывод, что начальное значение H является достаточно малым. В противном случае снова уменьшают H и повторяют все действия. Та же самая процедура может быть проделана и при увеличении шага интегрирования.

Теперь рассмотрим цифровое моделирование системы, описываемой уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3-67)$$

Для разработки алгоритма Эйлера применительно к этому матричному уравнению возьмем сначала первый элемент вектора состояния, $x_1(t)$:

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau + x_1(0). \quad (3-69)$$

Сравнивая это выражение с (3-64) и учитывая (3-65), запишем:

$$x_1(kH) = x_1[(k-1)H] + H\dot{x}_1[(k-1)H]. \quad (3-70)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для любого другого элемента вектора состояния, т.е.

$$x_i(kH) = x_i[(k-1)H] + H\dot{x}_i[(k-1)H], \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3-71)$$

Последнее выражение представим в векторной форме:

$$\mathbf{x}(kH) = \mathbf{x}[(k-1)H] + H\dot{\mathbf{x}}[(k-1)H], \quad (3-72)$$

где, на основании (3-68), $\dot{\mathbf{x}}[(k-1)H]$ имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}}[(k-1)H] = \mathbf{A}\mathbf{x}[(k-1)H] + \mathbf{B}u[(k-1)H]. \quad (3-73)$$

Тогда алгоритм численного интегрирования будет состоять из следующих этапов:

1. Положить $k = 1$.
2. Вычислить $\dot{\mathbf{x}}[(k-1)H]$ по формуле (3-73).
3. Вычислить $\mathbf{x}(kH)$ по формуле (3-72).
4. Положить $k = k + 1$.
5. Вернуться к п. 2.

Данный алгоритм очень легко превращается в простую программу, однако шаг интегрирования здесь должен быть существенно меньше, чем это допускают другие, более сложные, алгоритмы. Ниже приводится пример численного интегрирования уравнений состояния.

Пример 3.13

Проиллюстрируем применение метода Эйлера для интегрирования уравнений состояния из примера 3.5. Эти уравнения мы возьмем именно потому, что известно их точное аналитическое решение. Итак, мы имеем:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

и решение при единичном ступенчатом воздействии

$$x_1(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t},$$

$$x_2(t) = (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (2e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Выберем $H = 0,01$ с и, кроме того, для простоты вычислений положим $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Этап 2 алгоритма и уравнение (3-73) дают:

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(0) = \mathbf{B}u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Этап 3 и уравнение (3-72) дают:

$$\mathbf{x}(0,01) = \mathbf{x}(0) + H\dot{\mathbf{x}}(0) = H\dot{\mathbf{x}}(0) = (0,01) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

В результате второй итерации получим:

$$\dot{\mathbf{x}}(0,01) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0,01) + \mathbf{B}u(0,01) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(0,02) = \mathbf{x}(0,01) + H\dot{\mathbf{x}}(0,01) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} + (0,01) \begin{bmatrix} 0,01 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,02 \end{bmatrix}.$$

После следующей итерации:

$$\dot{\mathbf{x}}(0,02) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0197 \\ 0,9998 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(0,03) = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,02 \end{bmatrix} + (0,01) \begin{bmatrix} 0,0197 \\ 0,9998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00030 \\ 0,3000 \end{bmatrix}.$$

В таблице 3.1 приведены точные значения координат вектора состояния, полученные на основании аналитического решения, и результаты численного интегрирования по методу Эйлера. Разумеется, трех итераций явно недостаточно, чтобы судить о точности алгоритма при данном значении H , но цель примера состояла просто в иллюстрации сущности численного интегрирования.

Таблица 3.1 Результаты численного интегрирования

t	Численное интегрирование		Точное решение	
	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	0	0	0	0
0,01	0	0,01	0,00005	0,00999
0,02	0,0001	0,02	0,0002	0,01999
0,03	0,0003	0,03	0,0004	0,02999

Итерационная сущность численного интегрирования позволяет использовать цифровые компьютеры для организации вычислительного процесса. Для рассмотренного примера все числения в среде MATLAB можно выполнить с помощью следующей программы:

```
A = [-3 1; -2 0]; B = [0; 1]; C = [1 0];
H = 0,01;
xk = [0; 0];
for k = 1: 4
    t = (k - 1)*H;
    t
    xk
    xdotkpl = A*xk + B;
    xkpl = xk + H*xdotkpl;
    xk = xkpl;
end
```

В справочном пособии по MATLAB приводится простая и удобная процедура численного решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эта процедура иллюстрируется следующим примером.

Пример 3.14

Рассмотрим систему из примера 3.13, для которой заданы уравнения состояния и выходная переменная $y(t) = x_1(t)$. Моделирование этой системы производится с помощью программы MATLAB:

```
A = [-3 1; -2 0]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;
```



```
e3p14 = ss(A, B, C, D)
step(e3p14)
```

Первая инструкция программы вводит матрицы системы, вторая указывает, что система задана в пространстве состояний, а третья вычисляет переходную характеристику $y(t)$. Эта характеристика изображена на рис. 3.14. причем видно, что конечное значение $y(t)$ равно 0,5; это подтверждается аналитическим выражением, полученным в примере 3.13.

Почти во всех программах численного интегрирования в MATLAB шаг интегрирования выбирается автоматически. Но в некоторых программах шаг интегрирования является переменным, а его величина определяется характером изменения сигналов. В следующем примере мы получим полное решение уравнений для системы из примера 3.13 при ступенчатом входном воздействии и ненулевых начальных условиях.

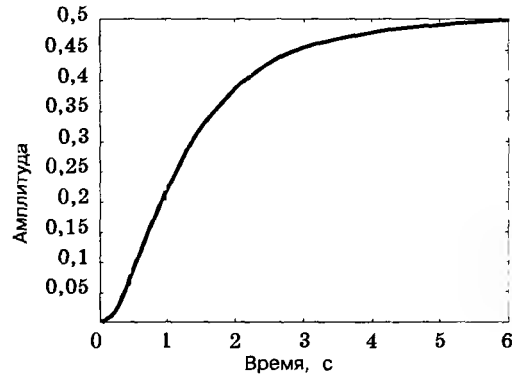


Рис. 3.14. Переходная характеристика к примеру 3.14

Пример 3.15

Модифицируем программу из последнего примера так, чтобы с ее помощью можно было вычислить переходную характеристику системы при начальных условиях $x(0) = [1 \ 1]^T$. Решение соответствующих уравнений было получено в примере 3.5, причем

$$y(t) = x_1(t) = 0,5 - e^{-t} + 1,5e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Программа MATLAB имеет следующий вид:

```
A = [-3 1; -2 0]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;
e3p14 = ss(A, B, C, D)
t = 0 : 0.1 : 6;
u = stepfun(t, 0);
x0 = [1; 1];
lsim(e3p14, u, t, x0)
```

В третьей инструкции устанавливается начало отсчета времени (ноль), шаг численного интегрирования, равный 0,1 с, и время окончания вычислений, равное 6 с. В четвертой инструкции декларируется, что входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции, а в пятой вводятся начальные условия. Шестая инструкция производит необходимые вычисления. Вид переходной характеристики изображен на рис. 3.15. Если последнюю инструкцию заменить на

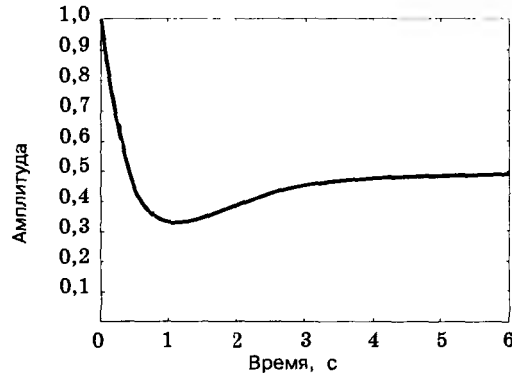


Рис. 3.15. Реакция системы к примеру 3.15

$[y, t] = \text{lsim}(\text{e3p14}, u, t, x0)$ y' , t' ,
то будут распечатаны значения t и $y(t)$. Например,

$$y(t)|_{t=1} = (0,5 - e^{-t} + 1,5e^{-2t})|_{t=1} = 0,3351.$$

Моделирование дает тот же самый результат, что подтверждает правильность решения, полученного в примере 3.5.

Пример 3.16

В данном примере мы покажем, что при моделировании с помощью MATLAB можно в качестве исходных данных использовать передаточную функцию. В примере 3.4 было показано, система из примера 3.14 имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Программа MATLAB, вычисляющая переходную характеристику системы, имеет вид:

```
num = [0 0 1]; den = [1 3 2];  
e3p16 = tf(num, den);  
step(e3p16)
```

В результате моделирования получается график, совпадающий с рис. 3.14.

Моделирование с помощью MATLAB предоставляет много других возможностей, которые мы здесь не рассматриваем. Для более сложных систем может быть применена моделирующая программа SIMULINK, основанная на MATLAB и используемая в ряде примеров в данной книге.

3.7. Программное обеспечение

Существует много пакетов прикладных программ для анализа, синтеза и имитационного моделирования систем управления с обратной связью. В данной книге мы используем студенческие версии MATLAB и SIMULINK. Эти пакеты содержат все необходимые программы для анализа и моделирования систем управления. Некоторые методы синтеза, рассматриваемые в книге, не включены в MATLAB. Эти методы реализованы в виде так называемых *m*-файлов, которые могут быть выполнены при поддержке MATLAB. Инструкции по загрузке программ MATLAB из Интернета приведены в предисловии к данной книге.

3.8. Аналоговое моделирование

До того, как получили широкое распространение быстродействующие цифровые компьютеры, основным методом моделирования было аналоговое моделирование. За последние годы этот метод утратил свое значение, однако в некоторых случаях без него обойтись невозможно. Если переходная характеристика моделируемой системы содержит высокочастотные составляющие, то при цифровом моделировании шаг интегрирования должен быть достаточно малым (см. раздел 3.6). Следовательно, увеличивается время, затрачиваемое на вычисления, а само моделирование оказывается дорогостоящим. В этом случае выгодно воспользоваться аналоговым моделированием.

Кроме того, результаты моделирования могут быть более точными и достоверными, если компьютер работает в комплексе с некоторым реальным оборудованием. Этот метод широко применяется при имитационном моделировании ракетно-космических систем. Такой подход называется *моделированием с оборудованием в контуре*, и оно должно проводиться *в реальном времени*; это означает, что 1 секунда работы модели должна равняться 1 секунде действительного времени, в противном случае оборудование не будет функционировать должным образом. Если моделируемая часть системы содержит высокочастотные составляющие в переходной характеристике, то цифровое моделирование не

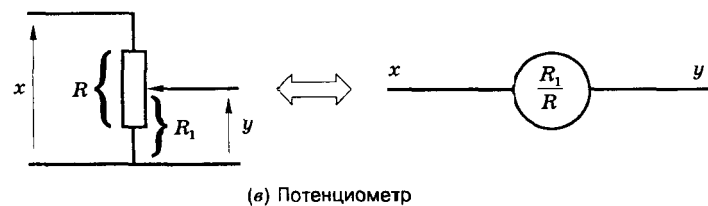
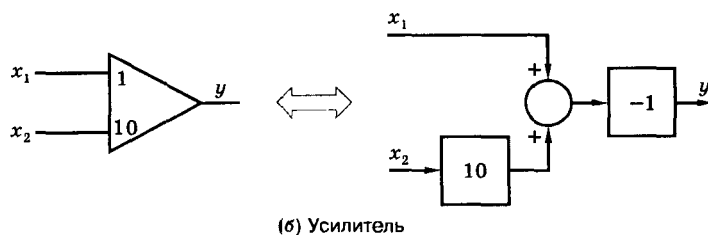
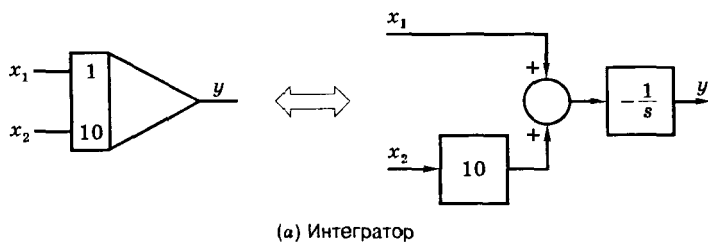
жет выполняться в реальном времени и для решения задачи необходим аналоговый компьютер. В общем случае при моделировании с оборудованием в контуре могут использоваться элементы как цифрового, так и аналогового моделирования. Подобную ситуацию называют *гибридным моделированием*. При гибридном моделировании аналоговый и цифровой компьютеры взаимодействуют между собой таким образом, чтобы максимально использовать достоинства каждого из них.

Как отмечалось в разделе 2.2, основными элементами аналогового компьютера являются интеграторы и усилители. Схематическое изображение этих элементов показано на рис. 3.16, причем каждый из них имеет два входа; у элементов, входящих в состав реального аналогового компьютера, входов может быть четыре и более. Интегратор на рис. 3.16 (а) описывается соотношением

$$y = - \int (x_1 + 10x_2) dt. \quad (3-74)$$

Рис. 3.16

Элементы аналогового компьютера



Рядом приведена его эквивалентная схема (модель). Для усилителя на рис 3.16 (б) связь между сигналами определяется выражением

$$y = -(x_1 + 10x_2). \quad (3-75)$$

Модель усилителя также приведена на рисунке.

Третьим элементом аналогового компьютера является потенциометр, изображенный на рис. 3.16 (в). Потенциометры в сочетании с интеграторами и усилителями используются для реализации на модели параметров системы. Потенциометр — это обычный делитель напряжения, для которого справедливо уравнение

$$y = \frac{R_1}{R} x.$$

(3-76)

Поскольку $R_1 \leq R$, то коэффициент усиления потенциометра меньше или равен единице.

Теперь, в порядке упражнения, разработаем схему для моделирования на аналоговом компьютере системы второго порядка. Весь процесс здесь очень напоминает построение схем моделирования, рассмотренное в разделе 3.2. Разница единственно в том, что модель на аналоговом компьютере должна состоять только из элементов, изображенных на рис. 3.16.

Пусть передаточная функция имеет вид:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s^{-2}}{1 - (-3s^{-1} - 2s^{-2})}.$$

(3-77)

Схема из элементов аналогового компьютера, моделирующая эту передаточную функцию, приведена на рис. 3.17 (а), а соответствующая ей эквивалентная (структурная) схема — на рис. 3.17 (б). Схема моделирования построена на основе формулы Мейсона, дающей передаточную функцию вида (3-71).

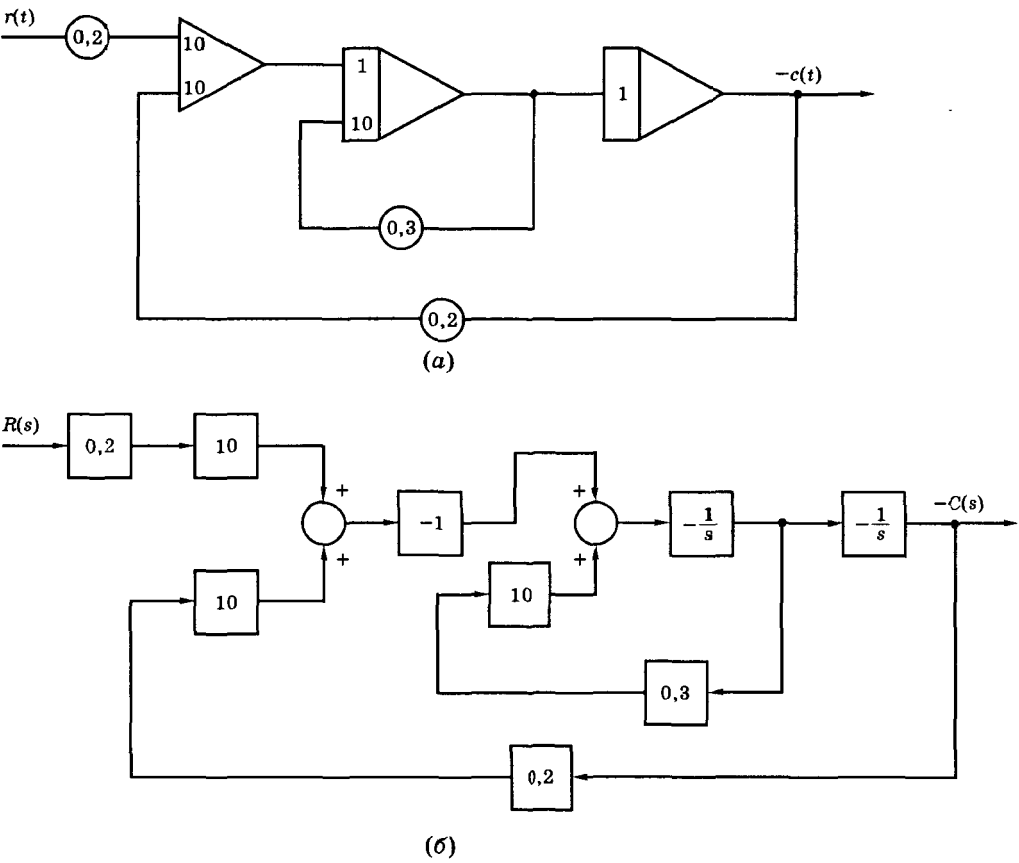


Рис. 3.17. Моделирование на аналоговом компьютере

Программирование ранних аналоговых компьютеров заключалось в коммутации элементов с помощью специальных проводов. Компьютер содержал наборное поле с гнездами и обозначениями входов и выходов каждого элемента. Программист производил с помощью проводов со штеккерами коммутацию интеграторов, усилителей и потенциометров, чтобы получить нужную модель. Например, на рис. 3.17 (а) каждая линия связи должна была представлять собой отдельный провод. При моделировании сложных систем отладка схемы оказывалась весьма трудной. Наборное поле напоминало «переплетение крысиных хвостов». В общем случае отладка цифровой модели намного проще, чем аналоговой. Однако некоторые современные аналоговые компьютеры допускают программирование на специальном языке, при этом коммутация элементов осуществляется электронным способом.

3.9. Заключение

В этой главе мы рассмотрели метод моделирования физических систем в переменных состояниях. Были отмечены специфические особенности двух видов моделирования — цифрового и аналогового. Модели в переменных состояниях необходимы для решения задач анализа и синтеза систем методами современной теории управления (см. главу 10). Основное преимущество модели в переменных состояниях заключается в том, что она дает полную информацию о внутренней структуре системы, тогда как передаточная функция позволяет установить связь только между внешними переменными (входом и выходом). При анализе и синтезе систем управления используются оба этих вида моделей.

Литература

1. P.M.De Russo, R.J.Roy, and C.M.Close. *State Variables for Engineers*. New York: Wiley, 1965. (Имеется русский перевод: Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. - М.: Наука, 1970).
2. B.Friedland. *Control System Design*. New York: McGraw-Hill, 1986.
3. G.F.Franklin, J.D.Powell, and M.Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.
4. C.L.Phillips and H.T.Nagle. *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
5. S.D.Conte and C.deBoor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill, 1982.

Задачи

- 3.1. (а) Считая, что $x_1(t) = y(t)$, а $x_2(t) = \dot{y}(t)$, запишите уравнения состояния для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3 y(t) = 2u(t).$$

Представьте эти уравнения в матричной форме.

- (б) Изобразите схему моделирования данной системы.
- (в) Запишите уравнения состояния для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t).$$

- (г) Изобразите схемы моделирования как в канонической форме управляемости, так и в канонической форме наблюдаемости.

3.2. (а) Изобразите схему моделирования системы, имеющей передаточную функцию

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{7}{s^2 + 9s + 8}.$$

- (б) На основании полученной схемы моделирования запишите уравнения состояния.
- (в) Прделайте пп. (а) и (б) для передаточной функции

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{6}{s + 2}.$$

3.3. (а) Изобразите схему моделирования для системы, имеющей передаточную функцию

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s^2}{s^3 + 1}.$$

- (б) Запишите уравнения состояния для полученной схемы.

3.4. (а) Рассмотрите замкнутую систему управления и схему ее моделирования, представленные на рис. 3.4 (3), а, б.

Запишите уравнения состояния, соответствующие схеме моделирования.

- (б) По схеме моделирования определите передаточные функции регулятора $G_c(s)$ и объекта $G_p(s)$.

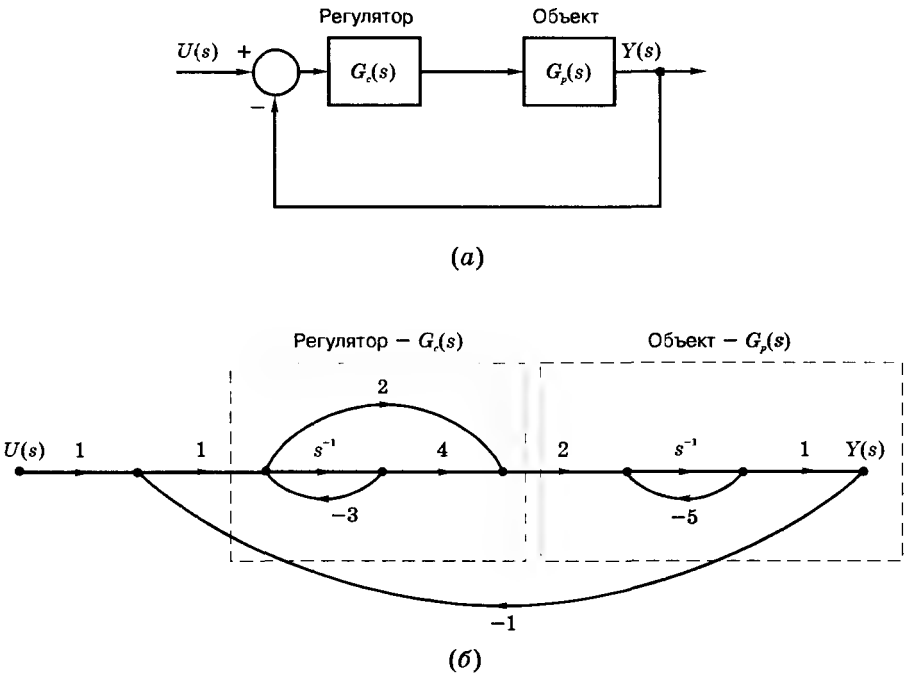


Рис. 3.4 (3)

- (в) Получите выражение для передаточной функции замкнутой системы $Y(s)/U(s)$.
- (г) Покажите, что знаменатель этой передаточной функции равен $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ — матрица, найденная в п. (а).
- (д) Подтвердите результат п. (г), вычислив Δ по формуле Мейсона. Обратите внимание, что в данной задаче знаменатель передаточной функции замкнутой системы получен тремя разными способами.
- (е) Модифицируйте программу MATLAB из примера 3.4, чтобы проверить передаточную функцию замкнутой системы.

3.5. Повторите задачу 3.4 для случая, когда регулятор имеет передаточную функцию $G_c(s) = K$.

3.6. (а) Изобразите схему моделирования для системы, имеющей передаточную функцию

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s + 5}{s^2 + 5s + 6}.$$

(б) На основании схемы моделирования запишите уравнения состояния.

(в) Повторите пп. (а) и (б) для передаточной функции

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s}{s + 2}.$$

(г) Повторите пп. (а) и (б) для передаточной функции

$$G(s) = \frac{s^2 + 10s + 5}{s^2 + 5s + 6}.$$

(д) С помощью формулы Мейсона проверьте передаточные функции из пп. (а), (в) и (г).

(е) Модифицируйте программу MATLAB из примера 3.4, чтобы проверить передаточные функции из п. (д).

3.7. Рассмотрите электродвигатель постоянного тока, используемый для вращения валков прокатного стана (см. пример 3.3). В данной задаче предположите, что регулируемой величиной является не скорость вращения, а угол поворота.

(а) Выбрав в качестве переменных состояния $x_1 = i_a$, $x_2 = \theta$, $x_3 = d\theta/dt$ и приняв за выход $y = \theta$, запишите уравнения состояния для двигателя.

(б) Изобразите схему моделирования, соответствующую уравнениям, полученным в п. (а). Обратите внимание, что если модель строится на основе законов физики, то она не представляется ни в канонической форме управляемости, ни в канонической форме наблюдаемости.

(в) Используя формулу Мейсона и схему из п. (б), убедитесь, что передаточная функция $\Theta(s)/E_a(s)$ совпадает с выражением, полученным в разделе 2.7.

3.8. Уравнения для схемы, изображенной на рис. 3.8 (3), были получены в примере 2.2 (см. раздел 2.2).

(а) Представьте эти уравнения в виде уравнений состояния, используя переменные $x(t) = q(t) = \int i(t) dt$, $u(t) = v_1(t)$, $y(t) = v_2(t)$.

(б) Изобразите схему моделирования, соответствующую уравнениям состояния.

(в) В примере 2.3 была получена передаточная функция данной схемы:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1}.$$

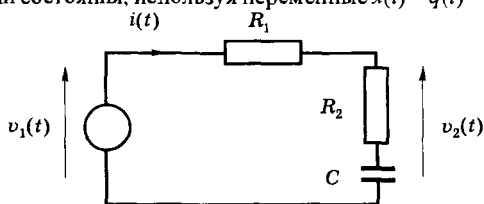


Рис. 3.8 (3)

Подтвердите это выражение с помощью формулы Мейсона.

(г) Проверьте с помощью формулы (3-42) передаточную функцию, полученную в п. (в).

- 3.9. Рассмотрите жесткий спутник, изображенный на рис. 3.9 (3), с которым мы встречались в примере 2.13 (раздел 2.6). Двигатели развивают вращающий момент, а движение спутника описывается уравнением $\tau(t) = J d^2\theta(t)/dt^2$.

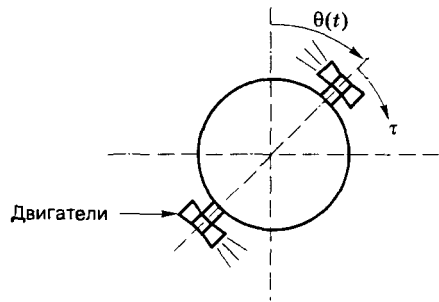


Рис. 3.9 (3)

(а) Разработайте модель спутника в переменных состояния, считая входом момент τ , а выходом — угол поворота θ .

(б) Изобразите схему моделирования системы.

(в) С помощью формулы Мейсона по схеме моделирования получите передаточную функцию системы.

(г) Полагая $J = 1$, проверьте с помощью MATLAB передаточную функцию, найденную в п. (в).

- 3.10. На рис. 3.10 (3), (а) показана схема теплового объекта. Это большая комната, в которой производится испытание крупногабаритных приборов при различных температурных режимах. Комната обогревается с помощью паровой батареи, а подача пара регулируется вентилем с электроприводом. Температура в комнате измеряется с помощью термистора. Открытие двери оказывает влияние на температуру и, следовательно, должно рассматриваться как возмущение.

Структурная схема данного объекта приведена на рис. 3.10 (3), (б). Управляющим воздействием является напряжение $m(t)$, поступающее на электропривод вентили в линии подачи пара. Открытие двери комнаты моделируется в виде ступенчатой функции $d(t) = bu(t)$. Когда дверь закрыта, $d(t) = 0$.

(а) Постройте модель второго порядка в переменных состояния, учитывающую два входа, $m(t)$ и $d(t)$, и один выход, $c(t)$.

(б) Постройте модель первого порядка в переменных состояния при тех же входах и выходах, что и в п. (а). Это можно сделать, т.к. оба блока на рис. 3.10 (б) имеют одинаковые характеристические уравнения.

(в) Найдите матричную передаточную функцию $G(s)$, где

$$C(s) = G(s)U(s),$$

причем $G(s)$ — матрица размерности (1×2) , а $U(s) = [M(s) D(s)]^T$.

- 3.11. На рис. 3.11 (3) изображена упрощенная структурная схема системы управления скоростью автомобиля. Соленоид управляет положением дросселя карбюратора, двигатель представлен инерционным звеном с постоянной времени 1 с, автомобиль и нагрузка представлены также инерционным звеном с постоянной времени 3 с. В данной задаче предполагается, что возмущение отсутствует.

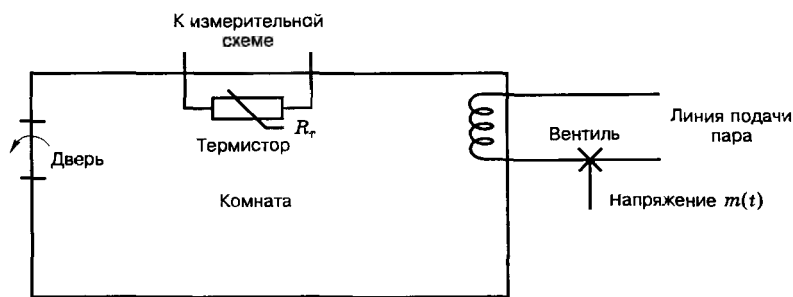
(а) Определите передаточную функцию $G_p(s) = V(s)/M(s)$. Формулу Мейсона здесь использовать нельзя. Почему?

(б) Изобразите модель объекта из п. (а) в переменных состояния, считая что одной из переменных состояния является выходная переменная двигателя, а второй — скорость автомобиля.

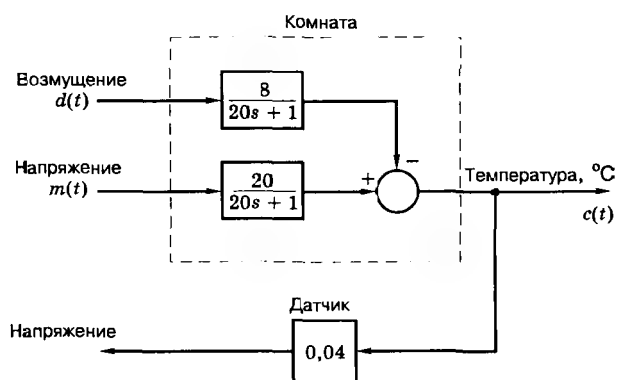
(в) Пусть $G_c(s) = 1$. Изобразите модель в переменных состояния для замкнутой системы, считая, что переменные состояния — те же, что и в п. (б).

(г) Определите передаточную функцию замкнутой системы

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}.$$

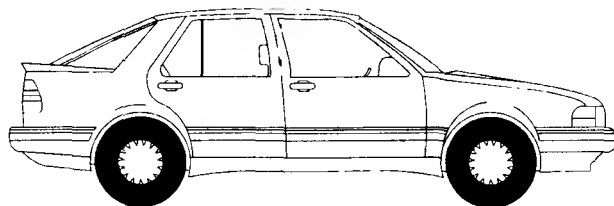


(a)

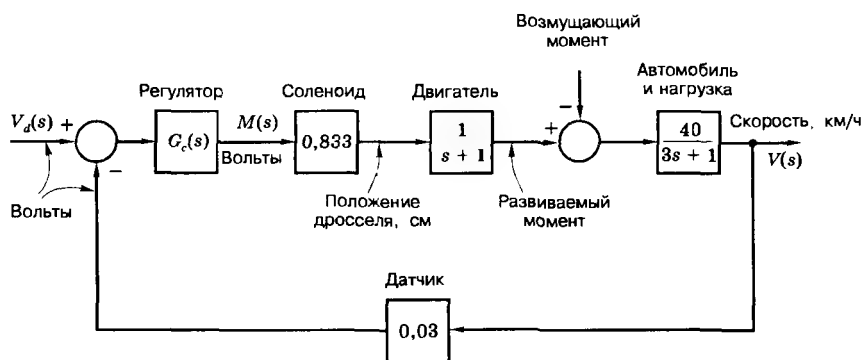


(б)

Рис. 3.10 (3)



(a)



(б)

Рис. 3.11 (3)

(д) Проверьте результат п. (г) с помощью MATLAB, а также по модели в переменных состояния.

3.12. Проанализируйте механическую систему, изображенную на рис. 3.12 (3). Все параметры заданы в согласованных единицах.

- Запишите уравнения состояния для системы.
- По полученным уравнениям изобразите схему моделирования.
- К схеме п. (б) примените формулу Мейсона и найдите передаточную функцию $Y(s)/F(s)$.
- Проверьте результат п. (в) с помощью MATLAB, используя уравнения состояния п. (а).

3.13. Система первого порядка задана уравнениями состояния:

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 4u(t),$$

$$y(t) = x(t).$$

- Найдите преобразование Лапласа для матрицы перехода.
- Найдите матрицу перехода.
- Используя выражение (3-24), найдите $x(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $x(0) = 0$.
- С помощью выражения (3-24) найдите $x(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $x(0) = -1$. Используйте результаты пп. (б) и (в).
- Проверьте результат п. (в) с помощью передаточной функции.
- Проверьте результат п. (г), используя преобразование Лапласа для уравнения состояния.
- С помощью MATLAB проверьте результат п. (г).

3.14. Повторите все пункты задачи 3.13 для системы первого порядка:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

$$y(t) = x(t) + u(t).$$

3.15. Даны уравнения состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

- Найдите преобразование Лапласа для матрицы перехода.
- Найдите матрицу перехода.
- Используя выражение (3-24), найдите $x(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $\mathbf{x}(0) = 0$.
- Найдите $\mathbf{x}(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2]^T$. Используйте результаты пп. (б) и (в).
- Проверьте результат п. (в) для $y(t) = x_1(t)$ с помощью передаточной функции.
- Модифицируйте программу MATLAB из примера 3.4 с целью проверки результата п. (г) и выполните ее.

3.16. Даны уравнения состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

- Найдите преобразование Лапласа для матрицы перехода.

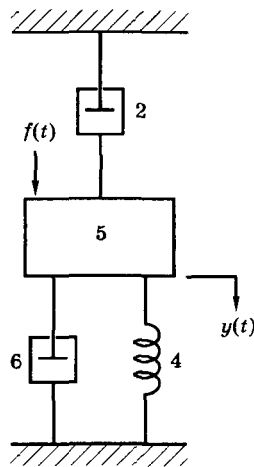


Рис. 3.12 (3)

- (б) Найдите матрицу перехода.
- (в) Используя выражение (3-24), определите $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $x_1(0) = x_2(0) = 0$.
- (г) Определите $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = -1$. Используйте результаты п. (в).
- (д) Воспользовавшись понятием передаточной функции, проверьте выражение $x_1(t)$, полученное в п. (в).
- (е) Модифицируйте программу MATLAB из примера 3.4 для проверки результата п. (г).

3.17. Используя уравнения состояния и формулу (3-42), проверьте передаточные функции, найденные в следующих задачах.

- (а) Задача 3.6 (д).
- (б) Задача 3.9 (в).
- (в) Задача 3.12 (г).
- (г) Задача 3.13 (д).
- (д) Задача 3.14 (д).

3.18. Для спутника из задачи 3.9 при $J = 0,1$ уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t),$$

где приняты обозначения $u(t) = \tau(t)$ и $y(t) = \theta(t)$.

- (а) Найдите преобразование Лапласа для матрицы перехода.
- (б) Найдите матрицу перехода.
- (в) Используя выражение (3-24), найдите $\mathbf{x}(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $\mathbf{x}(0) = 0$.
- (г) Найдите $\mathbf{x}(t)$, $t > 0$, если $u(t)$ — единичная ступенчатая функция, а $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.
- (д) Проверьте результат п. (в) с помощью передаточной функции.
- (е) Модифицируйте программу MATLAB из примера 3.4 с целью проверки результата п. (г) и выполните ее.
- (ж) Опишите поведение физической системы при $u(t) = 0$ и начальных условиях из п. (г), т.е. что вы увидите, наблюдая за реальным спутником?

3.19. Рассмотрите жесткий спутник на рис. 3.9 (3). Двигатели развивают момент τ , а движение описывается уравнением $\tau(t) = Jd^2\theta(t)/dt^2$.

- (а) Получите модель системы в переменных состояния, считая момент τ входной величиной, угол θ — выходной, а переменными состояния — θ и $\dot{\theta}$.
- (б) Изобразите схему моделирования системы.
- (в) Задано преобразование подобия

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t).$$

Получите модель в переменных состояния для нового вектора $\mathbf{v}(t)$.

- (г) Изобразите схему моделирования, соответствующую уравнениям состояния относительно вектора $\mathbf{v}(t)$, и, используя формулу Мейсона, проверьте передаточную функцию.
- (д) По образцу рис. 3.11 модифицируйте схему моделирования из п. (б), чтобы показать, как формируются компоненты вектора $\mathbf{v}(t)$. Сравните передаточные функции от входа $\tau(t)$ к переменным состояния $v_1(t)$ и $v_2(t)$ для двух схем моделирования.

(е) Исследуйте с помощью компьютера поведение двух моделей при единичном ступенчатом воздействии, полагая $J = 1$. Выходные переменные будут равны, а это значит, что две модели имеют одну и ту же связь между входом и выходом.

(ж) Полагая $J = 1$, с помощью MATLAB проверьте результат п. (в).

3.20. Для двух моделей в переменных состояния из задачи 3.19 покажите, что:

(а) $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v|$.

(б) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_v|$.

(в) $\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}_v$.

(г) $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v$.

3.21. Рассмотрите систему:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Введем преобразование подобия [см. (3-49)]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t).$$

(а) Запишите уравнения состояния относительно нового вектора $\mathbf{v}(t)$.

(б) Изобразите схемы моделирования для случаев, когда состояние системы представлено вектором $\mathbf{x}(t)$ и вектором $\mathbf{v}(t)$.

(в) С помощью формулы Мейсона покажите, что обе схемы моделирования, полученные в п. (б), имеют одну и ту же передаточную функцию.

(г) Путем моделирования исследуйте две системы при единичном ступенчатом воздействии. Выходные переменные будут равны, а это значит, что две модели имеют одну и ту же связь между входом и выходом.

(д) С помощью MATLAB проверьте результат п. (а).

3.22. Для двух моделей в переменных состояния из задачи 3.21 покажите, что:

(а) $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v|$.

(б) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_v|$.

(в) $\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}_v$.

(г) $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v$.

3.23. Моделированием с помощью MATLAB проверьте результат п. (г) из следующих задач.

(а) Задача 3.13.

(б) Задача 3.14.

(в) Задача 3.15.

(г) Задача 3.16.

(д) Задача 3.18.

3.24. Изобразите схемы аналогового моделирования для следующих передаточных функций:

(а) $G(s) = \frac{8,7}{s + 5}$;

(б) $G(s) = \frac{15s + 10,5}{s^2 + 9,7s + 83,4}$.

3.25. Дана система n -го порядка с передаточной функцией общего вида:

$$G(s) = \frac{b_n s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

- (а) Запишите уравнения состояния для этой системы в канонической форме управляемости.
(б) Запишите уравнения состояния для этой системы в канонической форме наблюдаемости.

3.26. Заданы уравнения состояния $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ и $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t)$. Определите передаточную функцию $Y(s)/U(s)$ по выражению (3-42).

3.27. Покажите, что $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_v(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v$, где матрицы связаны соотношениями $\mathbf{A}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, $\mathbf{B}_v = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}\mathbf{P}$.

4. Временные и частотные характеристики систем

Эта глава посвящена изучению реакции линейных стационарных систем на типовые внешние воздействия. Применительно к системам первого и второго порядков мы воспользуемся преобразованием Лапласа. Затем покажем, что реакцию систем более высокого порядка можно рассматривать как сумму соответствующих реакций систем первого и второго порядков; по этой причине особое внимание будет уделено изучению характеристик систем невысокого порядка.

В реальных условиях на системы управления обычно воздействуют сигналы, которые не являются аналитическими, т.е. мы не можем описать их математическими выражениями. Следовательно, для таких сигналов невозможно найти изображение по Лапласу. Но даже если бы такая возможность появилась, на это часто не стоит затрачивать усилий. Существуют, однако, исключения. Так, одним из распространенных входных сигналов является ступенчатая функция. Например, когда мы с помощью тумблера или реле включаем электрический нагреватель, подавая на него постоянное напряжение, то мы имеем дело со ступенчатой функцией. Или другой пример. Когда мы желаем повлиять на постоянную температуру, то часто это делается путем ступенчатого приращения сигнала на входе системы. Кроме того, ступенчатая входная функция представляет интерес потому, что, как будет показано ниже, реакция на такое воздействие содержит очень важную информацию о свойствах системы.

Менее распространенным входным сигналом в системах управления является линейная функция времени. Однако такие сигналы в ряде случаев имеют место. Например, при автоматической посадке самолета требуется выдерживать определенный угол наклона глиссады; обычно он составляет порядка 3° . При закаливании стали также требуется, чтобы температура в течение определенного промежутка времени увеличивалась с постоянной скоростью. Поэтому на входе системы регулирования температуры сигнал должен иметь вид линейной функции. По этим и некоторым другим причинам, о которых речь пойдет позже, для нас представляет интерес изучение реакции систем управления на линейное входное воздействие.

Третьим типом входного воздействия является синусоидальная функция. Важность этого воздействия не столь очевидна, поскольку мы обычно не встречаемся с задачами, когда система управления должна отслеживать (воспроизводить на выходе) синусоиду. Однако, если нам известна реакция линейной стационарной системы на гармонические колебания всех возможных частот, то тем самым мы получаем *полную информацию* об этой системе; мы можем решить задачу проектирования регулятора, основываясь только на этой информации. Довольно часто удается экспериментально измерить реакцию физической системы на гармонические колебания, и полученные таким способом характеристики имеют огромную практическую ценность.

Учитывая сказанное выше, мы в данной главе рассмотрим реакцию систем на ступенчатую и линейную входные функции, а также на синусоиду. Полученные результаты анализа понадобятся нам в дальнейшем.

4.1. Временные характеристики систем первого порядка

В данном разделе мы рассмотрим временные характеристики систем первого порядка. Передаточная функция системы первого порядка в общем виде может быть записана как

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}, \quad (4-1)$$

где $R(s)$ и $C(s)$ — соответственно, изображения по Лапласу входного и выходного сигналов.

Гораздо чаще передаточная функция первого порядка записывается в ином виде:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (4-2)$$

т.к. параметры K и τ имеют вполне определенный физический смысл. Выражение (4-2) называют типовой формой передаточной функции системы первого порядка. Из (4-1) и (4-2) очевидно, что

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{и} \quad b_0 = \frac{K}{\tau}. \quad (4-3)$$

Напомним, что при определении передаточной функции начальные условия игнорируются. Теперь мы покажем, как их можно учесть. Сначала представим (4-2) в виде

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) C(s) = \frac{K}{\tau} R(s). \quad (4-4)$$

Дифференциальное уравнение получим, применив обратное преобразование Лапласа к (4-4):

$$\dot{c}(t) + \frac{1}{\tau} c(t) = \frac{K}{\tau} r(t). \quad (4-5)$$

Теперь снова преобразуем по Лапласу уравнение (4-5) и учтем начальное условие:

$$sC(s) - c(0) + \frac{1}{\tau} C(s) = \frac{K}{\tau} R(s). \quad (4-6)$$

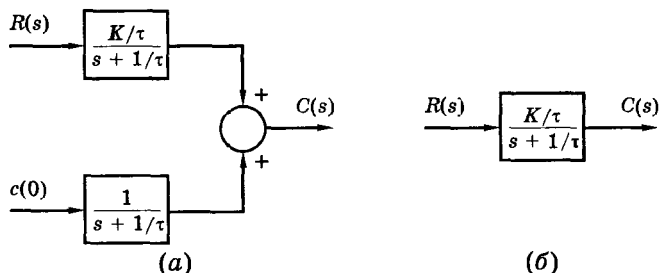
Решая это уравнение относительно $C(s)$, получим:

$$C(s) = \frac{c(0)}{s + (1/\tau)} + \frac{(K/\tau)R(s)}{s + (1/\tau)}. \quad (4-7)$$

Данное соотношение можно отобразить в виде структурной схемы, как показано на рис.4.1(а); однако начальные условия обычно не указываются в качестве входов на структурной схеме системы. Заметим, что если рассматривать начальные условия как вход, т.е. преобразование по Лапласу некоторой функции времени, то, поскольку $c(0) = \text{const}$, обратным преобразованием по Лапласу от константы является импульсная функция (δ -функция). Следовательно, *при таком представлении* системы начальное условие как входной сигнал надо считать δ -функцией с площадью (весом) $c(0)$, т.е. $c(0)\delta(t)$. Отсюда можно сделать вывод о практическом смысле δ -функции, хотя она и не является физически реализуемым сигналом. Так как при изображении структурных схем начальные условия обычно не учитываются, то мы будем представлять систему первого порядка в виде рис.4.1(б).

Рис. 4.1

Система первого порядка



4.1.1. Переходная функция системы

Рассмотрим систему первого порядка, представленную в типовой форме (4-2), и найдем ее реакцию на единичную ступенчатую функцию. В данном случае $R(s) = 1/s$ и в соответствии с (4-2) мы имеем:

$$C(s) = \frac{K/\tau}{s[s + (1/\tau)]} = \frac{K}{s} + \frac{-K}{s + (1/\tau)}. \quad (4-8)$$

Применяя к этому выражению обратное преобразование Лапласа, получим:

$$c(t) = K(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0. \quad (4-9)$$

Это выражение можно также представить в ином виде:

$$c(t) = K(1 - e^{-t/T})u(t).$$

Используя выражение (4-5), данную реакцию можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
dsolve('Dc = -c/tau + K/tau, c(0) = 0').
```

Первый член в этом выражении обусловлен полюсом $R(s)$ и называется *вынужденным движением*; поскольку эта составляющая не стремится к нулю с течением времени, то ее также называют *установившимся значением*. Второй член в выражении (4-9) обусловлен полюсом передаточной функции $G(s)$ и носит название *свободного (собственного) движения*. Вообще для реакции системы на единичное ступенчатое воздействие существует специальное название — *переходная функция*.

Реакция системы первого порядка на ступенчатое воздействие, определяемая выражением (4-9), представлена графиком на рис 4.2. Две составляющих реакции изображены отдельно друг от друга; на рисунке также представлена результирующая реакция. Заметим, что составляющая, уменьшающаяся по экспоненте, имеет начальный наклон K/τ , т.е.

$$\left. \frac{d}{dt} (-Ke^{-t/\tau}) \right|_{t=0} = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \Big|_{t=0} = \frac{K}{\tau}. \quad (4-10)$$

С математической точки зрения, экспоненциальная составляющая не может уменьшаться до нуля за конечный промежуток времени. Однако, если бы эта составляющая продолжала уменьшаться с начальной (постоянной) скоростью, то она достигла бы нуля за τ секунд. Поэтому параметр τ называется *постоянной времени* и измеряется в секундах.

В таблице 4.1 приведены значения экспоненциальной функции в моменты времени, кратные величине τ . Из таблицы видно, что экспонента спадает до менее чем 2% от своего начального значения за четыре постоянных времени и менее чем 1% — за пять постоянных времени. На практике обычно считают, что экспонента уменьшается до нуля за время от 4τ до 5τ . В данной книге мы будем использовать значение 4τ , хотя другие авторы иногда придерживаются иных критериев. Таким образом, можно считать, что реакция физи-

ческой системы первого порядка на ступенчатое воздействие практически заканчивается за несколько постоянных времени. Следовательно, постоянная времени является мерой быстродействия системы. Если, например, мы проектируем систему для управления положением пера плоттера (графического устройства цифрового компьютера), то мы не задумываясь можем сказать, что при постоянной времени 1 с система будет работать очень медленно, а при 0,1 с и менее она будет обладать хорошим быстродействием.

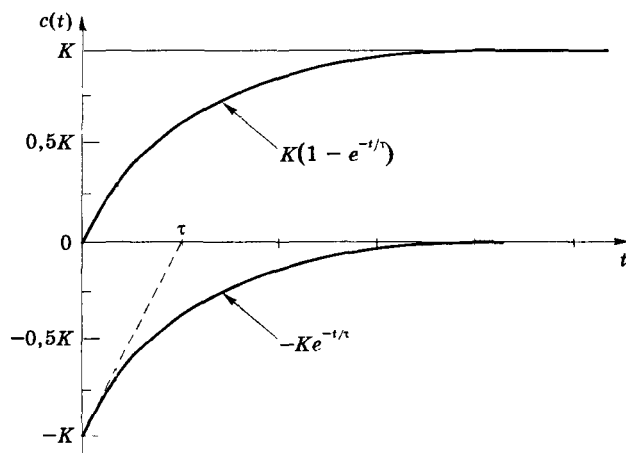


Таблица 4.1

t	$e^{-t/\tau}$
0	1
τ	0,3679
2τ	0,1353
3τ	0,0498
4τ	0,0183
5τ	0,0067

Рис. 4.2. Реакция системы первого порядка на ступенчатое воздействие

Взглянем еще раз на рис 4.2. Мы можем видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = K. \quad (4-11)$$

Этот предел называют *конечным, или установившимся, значением* реакции системы на единичное ступенчатое воздействие. Таким образом, в общем выражении передаточной функции первого порядка

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

оба параметра, τ и K , имеют определенный физический смысл. Этим, в частности, объясняется популярность записи передаточной функции первого порядка именно в таком виде. Далее рассмотрим небольшой пример.

Пример 4.1

Найдем реакцию на единичное ступенчатое воздействие системы с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{2,5}{0,5s + 1} = \frac{5}{s + 2}.$$

Имеем:

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{5}{s(s+2)} = \frac{5/2}{s} + \frac{-5/2}{s+2},$$

следовательно

$$c(t) = \frac{5}{2}(1 - e^{-2t}).$$

Мы видим, что установившееся значение реакции равно 2,5, а постоянная времени системы $\tau = 0,5$ с, т.е. выходная переменная достигает установившегося значения примерно за 2 с. Программа MATLAB, производящая разложение $C(s)$ на простые дроби и вычисляющая переход-

ную функцию, имеет вид:

```
Cnum = [0 0 5]; Cden = [1 2 0];
[r, p, k] = residue(Cnum, Cden)
pause
G = tf([0 5], [1 2]);
Step(G)
```

4.1.2. Коэффициент усиления системы

Теперь рассмотрим общий метод нахождения установившегося значения реакции на единичное ступенчатое воздействие для системы произвольного порядка. Воспользуемся теоремой о конечном значении из преобразования Лапласа (см. приложение Б):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s), \quad (4-12)$$

при условии, что $c(t)$ имеет конечное значение. В случае единичного ступенчатого воздействия $R(s) = 1/s$, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s). \quad (4-13)$$

Если $c(t)$ имеет конечное значение, то и предел в правой части этого равенства существует. Если же $c(t)$ не имеет конечного значения, то предел в правой части равенства может существовать, но никакого смысла не имеет. Поскольку входной сигнал равен единице, то $G(0)$ есть коэффициент пропорциональности между входом и выходом системы в установившемся режиме, независимо от порядка системы. Этот коэффициент имеет столь важное значение, что ему присвоено специальное название. Так как постоянный электрический сигнал называют сигналом постоянного тока, то по аналогии мы будем классифицировать $G(0)$ как коэффициент усиления системы по постоянному току (или просто коэффициент усиления).

Коэффициент усиления — это коэффициент пропорциональности между постоянным входным сигналом и установившимся значением выходного сигнала (если оно существует) и он равен передаточной функции системы при $s = 0$.

Отметим, что коэффициент усиления системы имеет смысл даже тогда, когда входной сигнал не является ступенчатой функцией. Необходимо только, чтобы входная функция $r(t)$ принимала постоянное значение спустя более чем четыре постоянных времени.

Это обстоятельство проиллюстрировано на рис. 4.3. Вход принимает постоянное значение R_c , а выход устанавливается на уровне C_c спустя время, равное 4τ . Тогда

$$\frac{C_c}{R_c} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s).$$

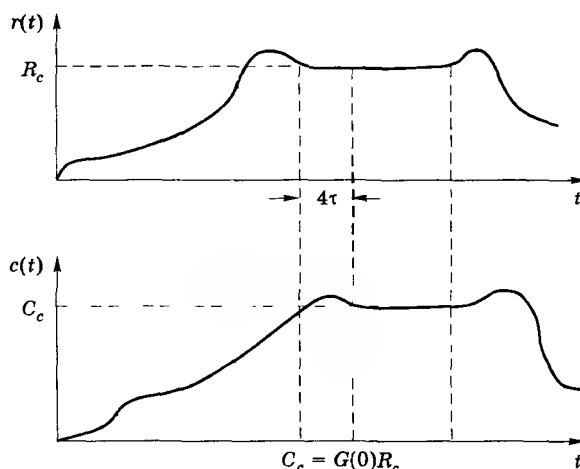


Рис. 4.3. Графическая интерпретация коэффициента усиления системы

4.1.3. Реакция системы на линейное воздействие

Теперь рассмотрим реакцию на линейное воздействие. Если входной сигнал $r(t) = t$, то $R(s) = 1/s^2$. Тогда на основании (4-2)

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{K/\tau}{s^2[s + (1/\tau)]} = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s + (1/\tau)}. \quad (4-14)$$

Следовательно

$$c(t) = Kt - K\tau + K\tau e^{-t/\tau}. \quad (4-15)$$

Эта реакция проверяется с помощью следующей программы MATLAB:

```
syms s F K Tau
F = (K/Tau)/(s^2*(s + 1/Tau));
ilaplace(F)
```

Таким образом, реакция на линейное воздействие имеет три составляющих: линейную функцию, константу и экспоненту. В связи с этим следует сделать два важных замечания.

Во-первых, экспоненциальная составляющая имеет ту же самую постоянную времени, что и в случае реакции на ступенчатое воздействие. Однако величина этой составляющей отличается от соответствующего слагаемого в выражении (4-9): она содержит множитель τ . Поэтому, если τ много больше единицы, то экспонента вносит основной вклад в реакцию системы. Это может создать определенные проблемы при проектировании систем, предназначенных для отработки линейных входных воздействий.

Во-вторых, установившееся движение системы определяется уравнением

$$c_{ss}(t) = Kt - K\tau, \quad (4-16)$$

где $c_{ss}(t)$ есть часть реакции $c(t)$, образованная слагаемыми, которые не стремятся к нулю с течением времени. Позже мы дадим определение *ошибки системы* как разности между желаемым значением выходной переменной и ее действительным значением. Вообще желательно, чтобы в установившемся режиме система управления обладала нулевой ошибкой. В нашем примере, поскольку мы хотим, чтобы система воспроизводила на выходе линейную функцию, ошибка будет представлена членом $K\tau$. При проектировании системы управления может быть выдвинуто требование отсутствия ошибки или, по крайней мере, ее минимизации в случае входного сигнала, изменяющегося по линейному закону. Подобная проблема будет рассмотрена далее в главах, посвященных синтезу систем управления.

4.2. Временные характеристики систем второго порядка

В данном разделе мы рассмотрим реакцию систем второго порядка на типовые внешние воздействия. Предполагается что передаточная функция системы имеет вид:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (4-17)$$

Однако, как и в случае системы первого порядка, коэффициенты обычно записывают так, чтобы они имели физический смысл. *Стандартная форма* передаточной функции второго порядка имеет вид:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4-18)$$

где ζ — безразмерный коэффициент затухания, а ω_n — собственная частота колебаний (частота при отсутствии затухания). Заметим также, что коэффициент усиления, $G(0)$, равен единице. Позже мы рассмотрим случаи, когда коэффициент усиления отличен от единицы и когда числитель отличен от константы. Заметим также, что все характеристики системы второго порядка полностью определяются значениями ζ и ω_n , т.к. только эти параметры входят в передаточную функцию (4-18).

Рассмотрим сначала реакцию на единичное ступенчатое воздействие:

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (4-19)$$

Обратное преобразование Лапласа мы здесь применять не будем (см. задачу 4.8); однако считая, что полюсы $G(s)$ являются комплексными, результат получим в виде:

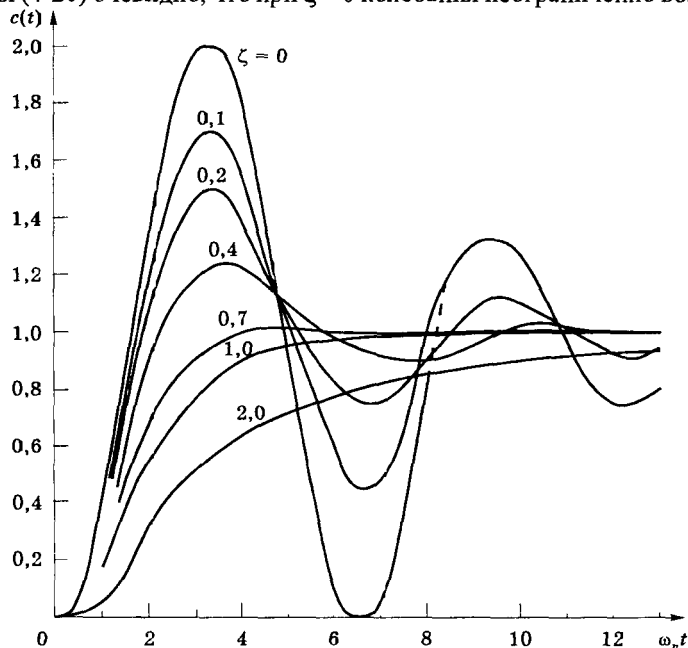
$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta), \quad (4-20)$$

где $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ и $\theta = \arctg(\beta/\zeta)$. В этом выражении $\tau = 1/\zeta\omega_n$ есть постоянная времени экспоненты, по которой затухает синусоидальная составляющая (этим членом мы будем пренебрегать спустя приблизительно четыре постоянных времени), а $\beta\omega_n$ — частота затухающих гармонических колебаний.

Теперь исследуем типичные реакции системы на ступенчатое входное воздействие. Выражение (4-20) зависит от параметров ζ и ω_n . Если известно значение ζ , то мы еще не можем изобразить график $c(t)$, поскольку не задано ω_n . Чтобы упростить процедуру, мы построим график $c(t)$ для разных значений ζ в зависимости от $\omega_n t$. Семейство этих кривых изображено на рис. 4.4 для $0 \leq \zeta \leq 2$. Заметим, что при $0 < \zeta < 1$ процесс имеет вид затухающей синусоиды. Для $\zeta = 0$ получаем незатухающие колебания, а при $\zeta \geq 1$ колебания не наблюдаются. Из выражения (4-20) очевидно, что при $\zeta < 0$ колебания неограниченно воз-

Рис. 4.4

Реакция системы второго порядка на единичное ступенчатое воздействие



растают. В этой главе мы ограничимся случаем, когда $\zeta \geq 0$. Программа, вычисляющая средствами MATLAB некоторые из кривых рис. 4.4, имеет следующий вид:

```
zeta = [0.2 0.5 1 2]
for k = 1 : 4
    G = tf([1], [1 2*zeta(k) 1]);
    stepG
    hold on
end
hold off
```

Передаточная функция $G(s)$ вида (4-18) имеет два полюса

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

При $\zeta > 1$ эти полюсы являются вещественными и различными, и синусоидальная составляющая реакции $c(t)$ заменяется суммой двух экспонент, т.е.

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2}, \quad (4-21)$$

где $\tau_1 = 1/(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})$ и $\tau_2 = 1/(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})$ есть две постоянные времени системы. При $\zeta = 1$ полюсы $G(s)$ вещественные и одинаковые, поэтому

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau} + k_2 t e^{-t/\tau}, \quad \tau = 1/\omega_n.$$

При $0 < \zeta < 1$ говорят, что система *недодемпфирована*, при $\zeta = 0$ *недемпфирована*, при $\zeta = 1$ обладает *критическим демпфированием*, а при $\zeta > 1$ *передемпфирована*.

Для линейной стационарной системы

$$C(s) = G(s)R(s). \quad (4-22)$$

Если $r(t)$ — единичная импульсная функция (δ -функция), то $R(s) = 1$ и

$$c(t) = L^{-1}\{G(s)\} = g(t), \quad (4-23)$$

где $g(t)$ носит название *импульсной переходной функции* (иначе — *весовой функции*). Тогда, переходя от (4-22) к оригиналу с помощью интеграла свертки (см. приложение Б), получим для произвольного входного сигнала $r(t)$:

$$c(t) = \int_0^t g(\tau) r(t - \tau) d\tau. \quad (4-24)$$

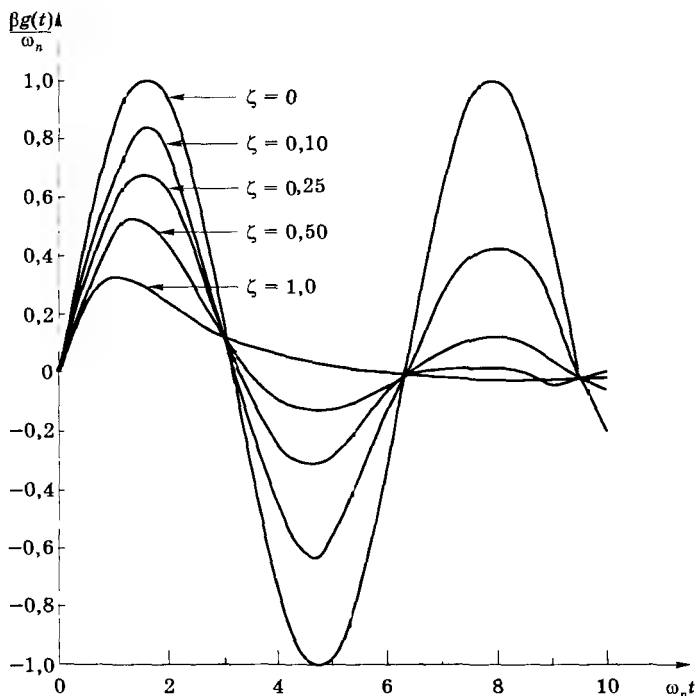
[Заметим, что в (4-24) τ есть переменная интегрирования и она не имеет никакого отношения к постоянной времени.]

Следовательно, поведение системы при подаче на ее вход произвольного сигнала $r(t)$ полностью определяется ее импульсной переходной функцией. Вспомним (см. раздел 4.1), что в системе первого порядка начальное условие можно было смоделировать в виде δ -функции. В системах более высокого порядка влияние начальных условий нельзя смоделировать так же просто, как в системе первого порядка. Но, в то же время, импульсная переходная функция любой системы позволяет судить о характере реакции, вызванной начальными условиями, и, следовательно, о форме переходной функции. На рис. 4.5 изображено семейство импульсных переходных функций системы второго порядка (4-18). Эти кривые являются графиками функции

$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right] = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t. \quad (4-25)$$

Рис. 4.5

Импульсная
переходная функция
системы второго
порядка



Сравните рис. 4.4 с рис. 4.5 и обратите внимание на то, что графики очень похожи. Действительно, это так, поскольку импульсная переходная функция системы представляет собой производную от ее переходной функции (см. задачу 4.9). Импульсную переходную функцию системы второго порядка можно также рассматривать как реакцию на определенные начальные условия при $r(t) = 0$.

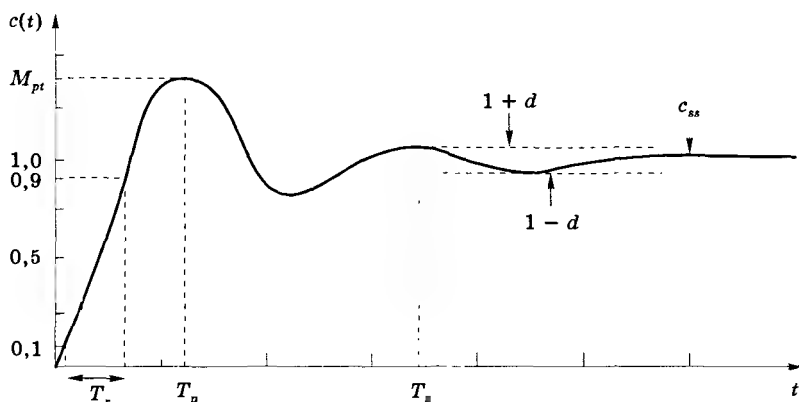
4.3. Требования к временным характеристикам при синтезе системы

Прежде, чем заниматься синтезом системы управления, необходимо сформулировать определенные требования к характеристикам, которыми эта система должна обладать. Некоторые из требований могут относиться к виду переходной функции системы. В данном разделе мы подробно рассмотрим эти требования.

Типичная переходная функция системы второго порядка изображена на рис. 4.6. Введем некоторые показатели, характерные для этой функции. *Время нарастания* T_r , определим как время, необходимое для изменения переходной функции от 10% до 90% от ее установившегося значения, как показано на рис. 4.6. Максимальное значение переходной функции обозначим M_{pl} , время достижения этого максимума — T_p , а *процентное превышение* установившегося значения c_{ss} будем рассчитывать по формуле:

$$\text{процентное превышение} = \frac{M_{pl} - c_{ss}}{c_{ss}} \times 100. \quad (4-26)$$

Рис. 4.6
Типичная
переходная
функция



(В отечественной литературе принято эту величину называть максимальным относительным перерегулированием — *прим. перев.*) На рис. 4.6 $c_{ss} = 1$ [см. также (4-20)].

Время установления T_s — это время, необходимое для того, чтобы выходной сигнал вошел в определенную зону, прилегающую к установившемуся значению, и далее оставался в пределах этой зоны. Ширину зоны обычно принимают равной $\pm 5\%$ или $\pm 2\%$ от установившегося значения. У системы второго порядка переходная функция входит в 2-процентную зону приблизительно за четыре постоянных времени (см. таблицу 4.1). Независимо от того, какая ширина зоны выбрана для определения времени установления, последнее в случае недодемпфированной системы второго порядка всегда пропорционально постоянной времени τ , т.е.

$$T_s = k\tau = \frac{k}{\zeta\omega_n}, \quad (4-27)$$

где k определяется процентным отклонением от установившегося значения. Как мы заметили ранее, везде в этой книге будем использовать значение $k = 4$.

Показатели T_r , T_s и c_{ss} , введенные для недодемпфированной системы, сохраняют тот же смысл и для передемпфированной системы и для системы с критическим демпфированием. Что касается параметров M_{pt} , T_p и процентного превышения, то, разумеется, они в этих случаях смысла не имеют.

Теперь нам предстоит получить аналитические выражения для оценки максимального перерегулирования и показателя T_p на рис. 4.6. Напомним, что импульсная переходная функция системы второго порядка имеет вид:

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \beta\omega_n t. \quad (4-28)$$

Как было сказано выше, она представляет собой производную от переходной функции на рис. 4.6. Поэтому первый момент времени (после начала процесса), при котором выражение (4-28) обращается в нуль, одновременно является временем, при котором касательная к переходной функции имеет нулевой наклон, т.е. это и есть значение T_p . Следовательно,

$$\beta\omega_n T_p = \pi, \quad \beta = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

или

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (4-29)$$

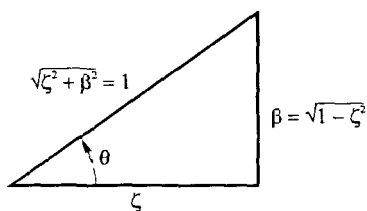


Рис. 4.7. Связь между θ , ζ и β

Переходная функция в этот момент времени имеет максимальное значение. Вычисление $\sin(\beta\omega_n t + \theta)$ в (4-20) при $t = T_p$ дает результат:

$$\sin(\beta\omega_n t + \theta)|_{\beta\omega_n t = \pi} = -\sin \theta = \sin\left(\arctg \frac{\beta}{\zeta}\right) = -\frac{\beta}{1}, \quad (4-30)$$

что ясно из рис. 4.7. Тогда из (4-20) и (4-30) следует:

$$c(t)|_{t=T_p} = M_{pl} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (4-31)$$

Таким образом, из (4-26) имеем:

$$\text{максимальное перерегулирование} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%. \quad (4-32)$$

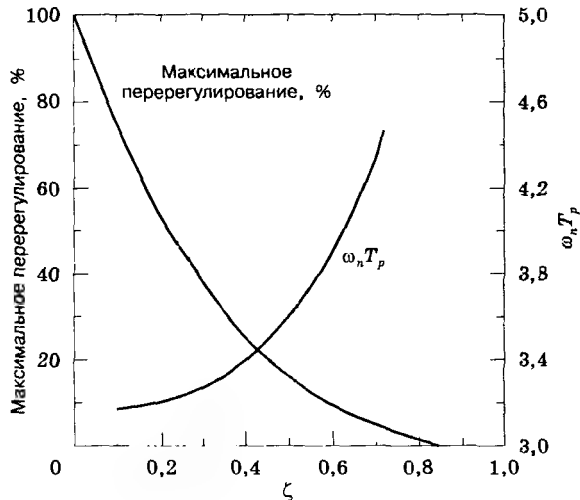
Можно записать (4-29) в виде

$$\omega_n T_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (4-33)$$

Как видим, этот показатель зависит только от параметра ζ , и эта зависимость графически представлена на рис. 4.8. Показатель T_p зависит не только от ζ , но также и от частоты ω_n . Поэтому соответствующая кривая на рис. 4.8 построена для произведения $\omega_n T_p$. Поскольку показатель T_p можно рассматривать в качестве грубой оценки времени нарастания, то рис. 4.8 пригоден и для нахождения первого приближения для T_r . Применение этих кривых проиллюстрируем на следующем примере.

Рис. 4.8

Связь между максимальным перерегулированием, ζ , ω_n и T_p для системы второго порядка



Пример 4.2

Рассмотрим задачу синтеза следящей системы (рис.4.9). Обычно сигнал на выходе сумматора не обладает достаточной мощностью, чтобы воздействовать на двигатель, поэтому в системе обязательно присутствует усилитель мощности. Система в замкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$T(s) = \frac{0,5K_a/[s(s+2)]}{1 + 0,5K_a/[s(s+2)]} = \frac{0,5K_a}{s^2 + 2s + 0,5K_a} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

где K_a — коэффициент усиления усилителя мощности. Предполагается, что K_a — единственный варьируемый параметр системы. Следовательно, при синтезе системы мы можем задать только один из параметров, ζ или ω_n ; выбором коэффициента усиления K_a мы не можем независимо задать значения ζ и ω_n .

Предположим, что двигатель управляет положением пера плоттера, и мы не можем допустить перерегулирования. На рис. 4.4 быстрее всего при отсутствии перерегулирования заканчивается процесс, соответствующий $\zeta = 1$, поэтому мы выбираем именно это значение. Исходя из передаточной функции, имеем:

$$2\zeta\omega_n = 2(1)\omega_n = 2,$$

следовательно, $\omega_n = 1$. Из той же передаточной функции:

$$\omega_n^2 = (1)^2 = 0,5K_a,$$

откуда $K_a = 2,0$. Следовательно, установив коэффициент усиления $K_a = 2,0$, мы получим максимальное быстродействие системы управления пером плоттера без перерегулирования, но при этом мы не уверены, что оно будет наилучшим.

Время установления будет равно

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \text{ с.}$$

Такой плоттер вряд ли удовлетворит нас в большинстве практических случаев. Чтобы улучшить характеристики плоттера, мы в первую очередь должны выбрать другой, менее инерционный двигатель (см. задачу 4.10). Кроме того, возможно появится необходимость ввести в замкнутую систему корректирующее устройство, но этот вопрос мы рассмотрим в главах, посвященных синтезу систем управления.

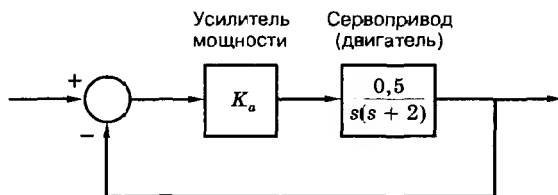


Рис. 4.9. Система к примеру 4.2

4.3.1. Временные характеристики и расположение полюсов

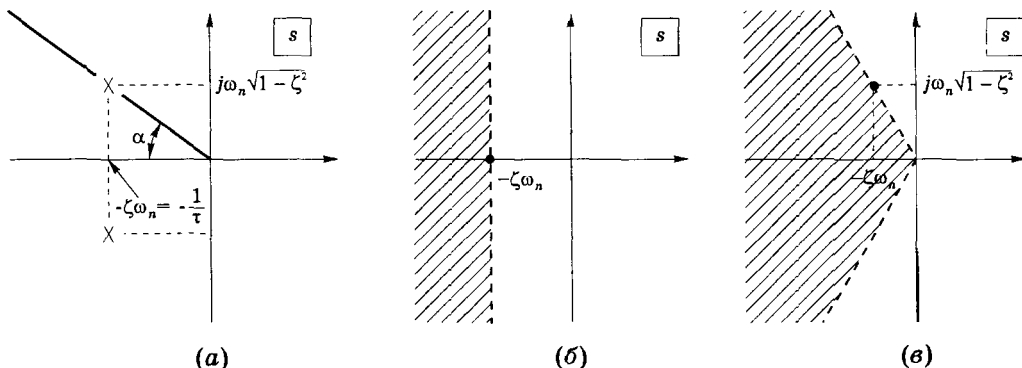
Параметры переходной функции системы второго порядка можно также связать с расположением полюсов передаточной функции. Поскольку передаточная функция имеет вид

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

то ее полюсы равны $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Их расположение показано на рис. 4.10 (а). Время установления T_s связано с расположением полюсов соотношением (4-27), которое приводится здесь в качестве повторения:

$$[4-27] \quad T_s = k\tau = \frac{k}{\zeta\omega_n},$$

где k обычно принимается равным четырем. То есть, время установления обратно пропорционально вещественной части полюсов. Если при синтезе системы требуется, чтобы время установления было меньше или равно некоторому значению T_{sm} , то должно выполняться неравенство $\zeta\omega_n \geq k/T_{sm}$, и полюсы обязаны располагаться в заштрихованной области на рис. 4.10 (б).

Рис. 4.10. Расположение полюсов на s -плоскости

Угол α на рис. 4.10 (а) определяется выражением

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta. \quad (4-34)$$

Максимальное перерегулирование тогда рассчитывается по формуле:

$$[4-32] \quad \text{максимальное перерегулирование} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%,$$

или

$$\text{максимальное перерегулирование} = e^{-\pi/\lg \alpha} \times 100\%.$$

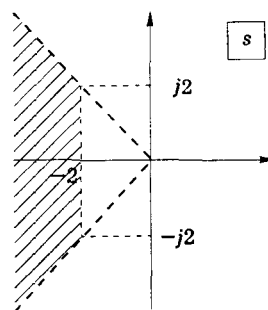
Уменьшение угла α приводит также к уменьшению перерегулирования. Поэтому, если перерегулирование не должно превышать некоторого заданного значения, расположение полюсов должно быть ограничено заштрихованной областью на рис. 4.10 (в). Данные соотношения проиллюстрируем следующим примером.

Пример 4.3

Предположим, что при синтезе системы второго порядка максимальное перерегулирование не должно превышать 4,32%, что соответствует значению $\zeta = 0,707$ (часто используемая величина). Тогда $\alpha = \arctg 1 = \arccos 0,707 = 45^\circ$. Предположим также, что максимально допустимое время установления равно 2 с. Тогда $\tau \leq 0,5$ и

$$\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau} \geq 2.$$

Следовательно, область расположения полюсов системы второго порядка ограничена заштрихованной областью на рис. 4.11. Полюсы, которые точно соответствуют заданным ограничениям, имеют значение $s = -2 \pm j2$.

Рис. 4.11
Расположение полюсов к примеру 4.3

Подводя итоги, еще раз приведем основные соотношения, связывающие параметры передаточной функции системы второго порядка с показателями переходной функции:

$$[4-27] \quad T_s = k\tau = \frac{k}{\zeta\omega_n},$$

где принимается значение $k = 4$;

$$[4-32] \quad \text{максимальное перегуливание} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%;$$

$$[4-33] \quad \omega_n T_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}};$$

угол α , определяющий на рис. 4.10 зону расположения полюсов передаточной функции на s -плоскости,

$$[4-34] \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta.$$

4.4. Частотные характеристики систем

В предыдущих разделах мы исследовали реакцию систем первого и второго порядков на ступенчатое и линейное входные воздействия. Здесь мы рассмотрим реакцию систем на синусоидальное воздействие, которая обычно называется *частотной характеристикой*. Далее мы покажем, что частотная характеристика имеет гораздо больший смысл, нежели просто реакция системы на синусоидальный сигнал.

Предположим, что на вход системы с передаточной функцией $G(s)$ подан синусоидальный сигнал

$$r(t) = A \cos \omega_1 t. \quad (4-35)$$

Тогда

$$R(s) = \frac{As}{s^2 + \omega_1^2} \quad (4-36)$$

и

$$C(s) = G(s)R(s) = G(s) \frac{As}{(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)}, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (4-37)$$

Это выражение мы можем разложить на простые дроби

$$C(s) = \frac{k_1}{s - j\omega_1} + \frac{k_2}{s + j\omega_1} + C_g(s), \quad (4-38)$$

где $C_g(s)$ включает в себя все члены разложения, обусловленные знаменателем $G(s)$. Предполагается, что все составляющие реакции системы, соответствующие слагаемому $C_g(s)$, с течением времени стремятся к нулю. Поэтому установившееся движение системы определяется только первыми двумя членами выражения (4-38). Это означает, что в установившемся режиме реакция системы на синусоидальное воздействие также будет синусоидой той же частоты.

Из (4-37) и (4-38) имеем:

$$k_1 = \frac{j\omega_1}{j2\omega_1} AG(j\omega_1) = \frac{1}{2} AG(j\omega_1), \quad (4-39)$$

$$k_2 = \frac{-j\omega_1}{-j2\omega_1} AG(-j\omega_1) = \frac{1}{2} AG(-j\omega_1), \quad (4-40)$$

т.е. k_2 является комплексно сопряженным значению k_1 .

Так как при данном значении ω_1 , $G(j\omega_1)$ является комплексным числом, его можно представить в виде

$$G(j\omega_1) = |G(j\omega_1)|e^{j\varphi}, \quad (4-41)$$

где $|G(j\omega_1)|$ есть модуль, а φ — аргумент комплексного числа. Тогда, в соответствии с (4-38) – (4-41), реакция системы $c(t)$ в установившемся режиме будет равна

$$\begin{aligned} c_{ss}(t) &= k_1 e^{j\omega_1 t} + k_2 e^{-j\omega_1 t} = \frac{A}{2} |G(j\omega_1)| e^{j\varphi} e^{j\omega_1 t} + \frac{A}{2} |G(j\omega_1)| e^{-j\varphi} e^{-j\omega_1 t} = \\ &= A |G(j\omega_1)| \frac{e^{j(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi)}}{2} = A |G(j\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \varphi), \end{aligned} \quad (4-42)$$

поскольку

$$|G(-j\omega_1)| = |G(j\omega_1)|. \quad (4-43)$$

В формуле (4-42) $\varphi = \varphi(j\omega_1)$. Отсюда видно, что коэффициент усиления системы для синусоидального сигнала равен модулю передаточной функции при $s = j\omega_1$, а фазовый сдвиг выходного гармонического сигнала относительно входной синусоиды равен аргументу $G(j\omega_1)$. Реакцию системы на синусоидальный сигнал проиллюстрируем следующим примером.

Пример 4.4

Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{5}{s + 2},$$

на вход которой подан сигнал $r(t) = 7 \cos 3t$.

Тогда

$$G(s)|_{s=j3} = \frac{5}{2 + j3} = 1,387 e^{-j56,3^\circ},$$

и выходной сигнал в установившемся режиме равен

$$c_{ss}(t) = (1,387)(7) \cos(3t - 56,3^\circ) = 9,709 \cos(3t - 56,3^\circ).$$

Поскольку постоянная времени системы равна 0,5 с, то установившийся режим будет достигнут примерно через 2 с с момента приложения входного сигнала. Комплексный коэффициент передачи $G(j3)$ вычисляется с помощью простой программы MATLAB:

```
G = tf([5], [1 2]);
Gj3 = evalfr (G, j*3);
mag Gj3 = abs(Gj3)
phase Gj3 = angle(Gj3) * 180/pi
```

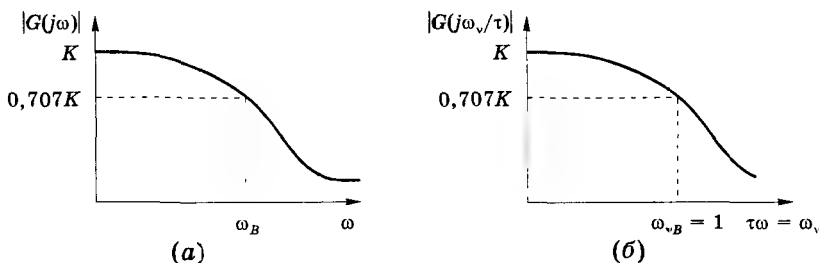
Еще раз отметим, что реакция системы на синусоидальный сигнал в установившемся режиме определяется ее передаточной функцией $G(s)$, вычисленной при $s = j\omega_1$, где ω_1 — частота синусоиды. Функция $G(j\omega)$ при $0 \leq \omega < \infty$ называется *частотной функцией*. Для конкретного значения ω функция $G(j\omega)$ превращается в комплексное число, следовательно, $G(j\omega)$ — комплексная функция.

4.4.1. Системы первого порядка

Рассмотрим сначала частотные характеристики системы первого порядка, передаточная функция которой имеет вид:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}.$$

Рис. 4.12
Иллюстрация
полосы
пропускания



Частотная функция этой системы

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4-44)$$

где амплитудная и фазовая частотные характеристики определяются выражениями:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \tau\omega. \quad (4-45)$$

В этом разделе нас в первую очередь интересует амплитудная частотная характеристика. На рис. 4.12 (а) изображен график функции $|G(j\omega)|$, определяемой выражением (4-45). На графике ω_B обозначает частоту, при которой коэффициент усиления системы в $\sqrt{2}$ раз меньше его значения при очень низких частотах; эта частота определяет *полосу пропускания* системы. Понятие полосы пропускания возникло при исследовании усилителей, и оно характеризует частоту, при которой мощность сигнала на выходе усилителя уменьшается в 2 раза по сравнению с ее максимальным значением на низких частотах. Для системы первого порядка (4-43) полоса пропускания определяется из уравнения:

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_B^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}, \quad (4-46)$$

откуда $\omega_B = 1/\tau$. Следовательно, мы видим, что постоянная времени τ имеет определенный смысл и в частотной области.

Иногда удобно использовать понятие нормированной частоты $\omega_v = \tau\omega$. Тогда

$$G_n(j\omega_v) = G(j\omega)|_{\omega=\omega_v/\tau} = G(j\omega_v/\tau) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_v^2}} e^{j\varphi}. \quad (4-47)$$

График амплитудной частотной характеристики, полученной в результате нормирования частоты, показан на рис. 4.12 (б). Полоса пропускания теперь определяется частотой $\omega_{vB} = 1$, что и следовало ожидать.

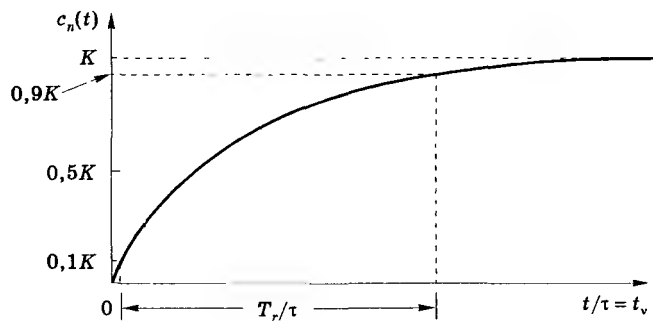
Аналогичным образом, если нормировать время, т.е. положить $t_v = t/\tau$, то переходная функция в зависимости от нормированного времени будет иметь выражение

$$c_n(t_v) = c(t)|_{t=\tau t_v} = K(1 - e^{-t_v}), \quad (4-48)$$

и она уже не зависит от τ . График нормированной переходной функции приведен на рис. 4.13.

Предположим теперь, что в данной системе первого порядка желательно уменьшить время нарастания в 2 раза. Это означает, что в выражении $G(s)$ новая постоянная времени должна быть равна $\tau/2$. Тогда, в соответствии с (4-46), полоса пропускания увеличится в 2 раза. Вообще для системы первого порядка, во сколько раз мы хотим уменьшить время нарастания, во столько же раз необходимо увеличить полосу пропускания.

Рис. 4.13
Нормированная
переходная функция



4.4.2. Системы второго порядка

Далее рассмотрим систему второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}. \tag{4-49}$$

Ее частотная функция

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta(\omega/\omega_n)}. \tag{4-50}$$

Воспользуемся нормированной частотой $\omega_v = \omega/\omega_n$ и получим выражение для амплитудной частотной характеристики:

$$|G_n(j\omega_v)| = |G(j\omega)|_{\omega=\omega_n\omega_v} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_v^2)^2 + (2\zeta\omega_v)^2}}. \tag{4-51}$$

Эта характеристика представлена графически на рис. 4.14 для различных значений ζ . Некоторые кривые на рис. 4.14 могут быть построены с помощью программы MATLAB:

```
w = 0:0.5:3;
z = [0.25 0.5 0.707 1];
for k = 1:4
    Gnum = [0 0 1]; Gden = [1 2*z(k) 1];
    Gjomega = freqs(Gnum, Gden, w);
    Gmag = abs(Gjomega);
    plot(w, Gmag);
    title('Frequency Response of G(s)')
    xlabel('Omega')
    ylabel('G(j*omega)')
    grid
    hold on
end
hold off
```

Из рис. 4.14 видно, что при заданном значении ζ отношение $\omega_B/\omega_n = \text{const}$. Следовательно, при фиксированном значении ζ увеличение ω_n во столько же раз увеличивает полосу пропускания. Напомним выражение (4-33):

[4-33]
$$\omega_n T_p = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Отсюда вытекает, что при постоянном ζ увеличение ω_n во столько же раз уменьшает T_p и, следовательно, время нарастания. То есть, при постоянном ζ мы получаем тот же резуль-

тат, что и для системы первого порядка. В обеих системах увеличение полосы пропускания в определенное число раз во столько же раз уменьшает время нарастания.

Результат, полученный в предыдущем разделе, является точным только для систем первого и второго порядка. Для остальных систем он является приближенным. Можно сказать только одно: для повышения быстродействия системы нужно увеличивать ее полосу пропускания. Существует приближенное соотношение [2]:

$$\omega_B T_r \approx \text{const}, \quad (4-52)$$

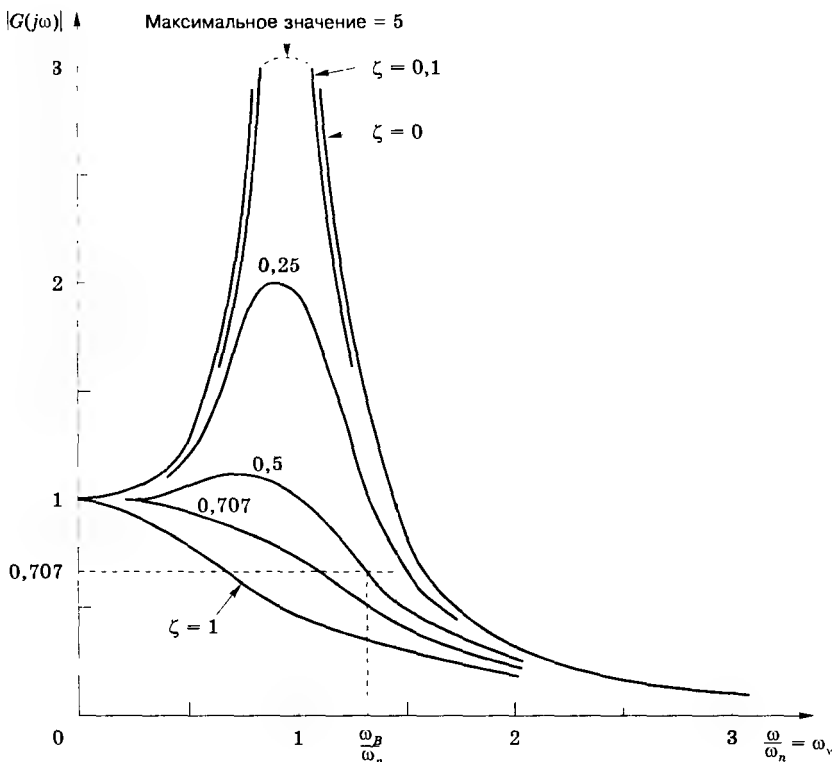
где константа имеет значение что-то около 2. Для систем второго порядка с передаточной функцией (4-49) или (4-51) можно установить точное соответствие между полосой пропускания и временем нарастания. Показатель T_r легко получить непосредственно из рис. 4.4 для разных значений ζ . Заметим, что действительное время нарастания в секундах равно $T_r = T_{rv}/\omega_n$, где T_{rv} — нормированное время нарастания, измеряемое в единицах $\omega_n t$ (см. рис. 4.4). Полосу пропускания можно определить по рис. 4.14, причем действительная полоса пропускания рассчитывается по формуле $\omega_B = \omega_{Bv} \omega_n$, где ω_{Bv} — нормированное значение, измеряемое в единицах оси абсцисс рис. 4.14. Таким образом, произведение полосы пропускания на время нарастания

$$\omega_B T_r = (\omega_{Bv} \omega_n) \frac{T_{rv}}{\omega_n} = \omega_{Bv} T_{rv}.$$

Это произведение не зависит от ω_n и изображено графически на рис. 4.15 в зависимости от ζ для значений $0 \leq \zeta \leq 2$. Заметим, что при увеличении ζ произведение $\omega_B T_r$ стремится к значению 2,20, которое соответствует системе первого порядка (см. задачу 4.17).

Рис. 4.14

Частотные характеристики системы второго порядка



Очень важно также соотнести максимальное значение амплитудной частотной характеристики на рис. 4.14 с максимумом переходной функции системы на рис. 4.4. Ранее было показано, что максимальное значение переходной функции зависит только от коэффициента затухания ζ . Выражение (4-51) определяет амплитудную частотную характеристику в зависимости от нормированной частоты $\omega_v = \omega/\omega_n$. Чтобы найти максимальное значение этой характеристики, продифференцируем (4-51) и приравняем результат нулю. Заменяя ω_v на ω/ω_n и решая полученное уравнение, найдем частоту, при которой достигается максимум амплитудной частотной характеристики:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta < 0,707. \tag{4-53}$$

Подставляя это значение в (4-51), получим максимальное значение амплитудной частотной характеристики, $M_{p\omega}$:

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \tag{4-54}$$

Таким образом, максимум амплитудной частотной характеристики зависит только от ζ , так же, как и максимум переходной функции. Эти зависимости в виде графиков представлены на рис. 4.16.

Появление максимума на амплитудной частотной характеристике называют *резонансом*, а ω_r на рис. 4.16 носит название *резонансной частоты*. Для системы второго порядка максимум амплитудной частотной характеристики непосредственно связан с величиной максимального перерегулирования в переходной функции. Для систем более высокого

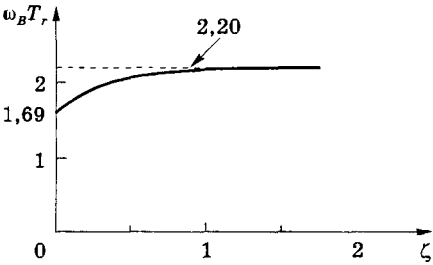
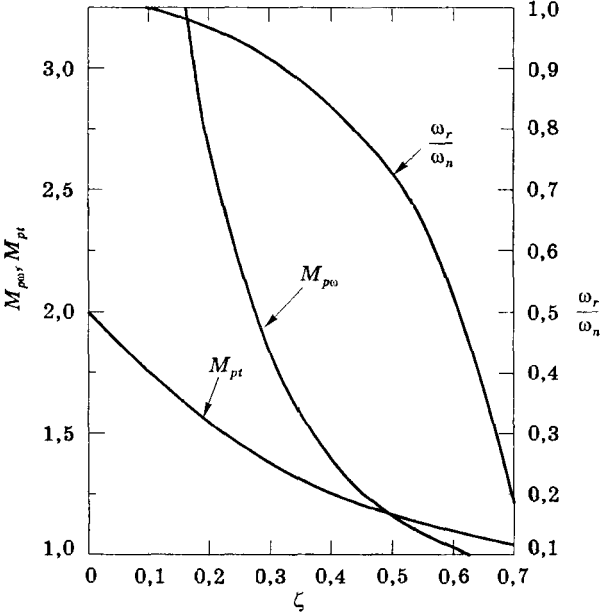


Рис. 4.15. Зависимость произведения полосы пропускания на время нарастания от параметра ζ

Рис. 4.16
Характеристики системы второго порядка



порядка в общем случае, чем больше максимум амплитудной частотной характеристики (чем сильнее выражен резонанс), тем больше перерегулирование в переходной функции. По этой причине желательно, чтобы системы управления не обладали явно выраженными резонансными свойствами. При синтезе систем обычно накладывается ограничение на величину $M_{p\omega}$. Более подробно явление резонанса рассматривается в главе 8.

4.5. Масштабирование времени и частоты

В данном разделе мы рассмотрим общую методику масштабирования времени и частоты. Смысл масштабирования заключается в следующем. Хотя большинство передаточных функций, фигурирующих в данной книге, имеют постоянные времена, близкие к единице, их можно рассматривать как передаточные функции с произвольными постоянными времени, но в измененном масштабе времени.

Рассмотрим сначала эффект масштабирования времени. Пусть t — время до масштабирования, t_v — время в измененном масштабе, а σ — коэффициент масштабирования. Заметим, что t и t_v имеют размерность времени, т.е. σ — безразмерный параметр. Масштабирование времени определим следующим соотношением:

$$t = \sigma t_v \Rightarrow t_v = \frac{t}{\sigma}. \quad (4-55)$$

Пусть $c(t)$ — некоторая функция до масштабирования, а $c_s(t_v)$ — та же функция после изменения масштаба времени (индекс s указывает на произведенное масштабирование), так что

$$c_s(t_v) = c(t)|_{t=\sigma t_v} = c(\sigma t_v). \quad (4-56)$$

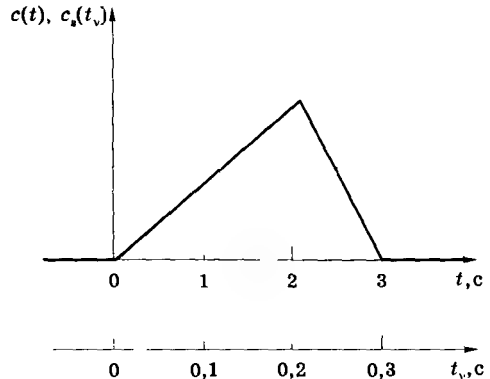
Приведем пример изменения масштаба времени для случая $\sigma = 10$. На рис. 4.17 изображен график функции $c(t)$ в зависимости от времени t , а мы хотим получить график $c_s(t_v) = c(10t_v)$ в зависимости от t_v . Ось переменной t_v , где $t_v = 0,1t$ [в соответствии с (4-55)], изображена ниже оси t , следовательно построенный график соответствует функции $c_s(t_v)$ в масштабе переменной t_v . Из этого примера можно сделать вывод, что $\sigma > 1$ приводит к «сжатию» сигнала, т.е. скорость изменения сигнала в любой момент времени увеличивается в σ раз. При $\sigma < 1$ сигнал «растягивается» во времени. Но в любом из этих случаев амплитуда сигнала не изменяется.

Теперь посмотрим, как повлияет изменение масштаба времени на частоту. Для синусоидального сигнала $c(t) = \cos \omega t$ масштабирование времени приводит к результату:

$$c_s(t_v) = \cos \omega t |_{t=\sigma t_v} = \cos \omega \sigma t_v = \cos (\omega \sigma) t_v = \cos \omega_v t_v, \quad (4-57)$$

Рис. 4.17

Изменение масштаба по оси времени



где ω_v обозначает частоту в измененном масштабе (как видим, частота изменилась в σ раз). И снова, при $\sigma > 1$, наблюдается эффект «сжатия» сигнала, т.к. масштабирование времени $t = \sigma t_v$ проявляется в частотной области как $\omega_v = \sigma \omega$, или $\omega = \omega_v / \sigma$. Таким образом, *изменение масштаба времени приводит к изменению масштаба частоты*. Эти эффекты были продемонстрированы в разделе 4.4 на примере характеристик систем первого и второго порядка.

Покажем, как отразится масштабирование времени на линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами. Рассмотрим i -ю производную функции $c(t)$. На основании (4-55):

$$\left. \frac{d^i c(t)}{dt^i} \right|_{t=\sigma t_v} = \frac{d^i c(\sigma t_v)}{d(\sigma t_v)^i} = \frac{1}{\sigma^i} \frac{d^i c_s(t_v)}{dt_v^i}. \quad (4-58)$$

Следовательно, для дифференциального уравнения n -го порядка, связывающего входную $r(t)$ и выходную $c(t)$ переменные, при $a_n = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = \\ = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (4-59)$$

изменение масштаба времени $t = \sigma t_v$ приведет к результату:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^n} \frac{d^n c_s(t_v)}{dt_v^n} + \frac{a_{n-1}}{\sigma^{n-1}} \frac{d^{n-1} c_s(t_v)}{dt_v^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{\sigma} \frac{dc_s(t_v)}{dt_v} + a_0 c_s(t_v) = \\ = \frac{b_m}{\sigma^m} \frac{d^m r_s(t_v)}{dt_v^m} + \frac{b_{m-1}}{\sigma^{m-1}} \frac{d^{m-1} r_s(t_v)}{dt_v^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{\sigma} \frac{dr_s(t_v)}{dt_v} + b_0 r_s(t_v). \end{aligned} \quad (4-60)$$

Передаточная функция системы, соответствующая уравнению (4-59), т.е. до масштабирования, имеет вид:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (4-61)$$

После изменения масштаба времени, на основании уравнения (4-60) получим:

$$\begin{aligned} \frac{C_s(s_v)}{R_s(s_v)} = G_s(s_v) = \frac{\frac{b_m}{\sigma^m} s_v^m + \frac{b_{m-1}}{\sigma^{m-1}} s_v^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{\sigma} s_v + b_0}{\frac{1}{\sigma^n} s_v^n + \frac{a_{n-1}}{\sigma^{n-1}} s_v^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{\sigma} s_v + a_0} = \\ = \frac{\sigma^{n-m} b_m s_v^m + \sigma^{n-m+1} b_{m-1} s_v^{m-1} + \dots + \sigma^{n-1} b_1 s_v + \sigma^n b_0}{s_v^n + \sigma a_{n-1} s_v^{n-1} + \dots + \sigma^{n-1} a_1 s_v + \sigma^n a_0}, \end{aligned} \quad (4-62)$$

где s_v есть переменная преобразования Лапласа для времени t_v .

Влияние изменения масштаба времени на передаточную функцию системы заключается в замене коэффициентов числителя b , на $\sigma^{n-1} b$, и коэффициентов знаменателя a , на $\sigma^{n-1} a$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 4.5

Рассмотрим систему первого порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{8}{4s + 1} = \frac{2}{s + 0,25}.$$

Как видим, система имеет коэффициент усиления 8 и постоянную времени 4 с. Мы хотим отмасштабировать передаточную функцию таким образом, чтобы процесс на выходе системы протекал в 1000 раз быстрее (т.е. чтобы постоянная времени уменьшилась в 1000 раз и была равна 0,004 с, или 4 мс), но при этом сохранял свою форму. Таким образом, $\sigma = 1000$ и $t = 1000t_v$. Из выражения (4-62) при $n = 1$ имеем:

$$G_s(s_v) = \frac{(1000)2}{s_v + (1000)0,25} = \frac{2000}{s_v + 250} = \frac{8}{0,004s_v + 1}.$$

Как видим, постоянная времени теперь равна 4 мс, а коэффициент усиления по-прежнему равен 8, т.е. масштаб процесса по оси ординат не изменяется при любом входном сигнале. Теперь рассмотрим систему второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 2(0,1)(3)s + 9} = \frac{(3)^2}{s^2 + 2(0,1)(3)s + (3)^2},$$

т.е. $\zeta = 0,1$, $\omega_n = 3$, а постоянная времени $\tau = 1/(\zeta\omega_n) = 3,33$ с. Снова потребуем, чтобы после масштабирования процесс на выходе системы сохранял свою форму, но протекал в 1000 раз быстрее. То есть, $\sigma = 1000$ и $t = 1000t_v$. Из выражения (4-62) при $n = 2$ имеем:

$$G_s(s_v) = \frac{(3)^2(1000)^2}{s_v^2 + 2(0,1)(3)(1000)s_v + (3)^2(1000)^2} = \frac{9000000}{s_v^2 + 600s_v + 9000000}.$$

Мы видим, что при изменении масштаба времени параметр ζ остался прежним, но $\omega_{nv} = 3000$, а постоянная времени $\tau_v = 1/(\zeta\omega_{nv}) = 0,00333$ с, т.е. скорость протекания процесса на выходе системы увеличилась в 1000 раз, что и требовалось.

В конце данного раздела подведем некоторые итоги. Изменение масштаба времени $t_v = t/\sigma$ оказывает следующее влияние на реакцию системы:

1. Амплитуда (форма) реакции не изменяется.
2. Постоянные времени τ_v после масштабирования принимают значение $\tau_v = \tau/\sigma$, где τ — постоянные времени до масштабирования.
3. Коэффициенты затухания ζ , не изменяются.

4.6. Характеристики систем более высокого порядка

До сих пор мы рассматривали только системы первого и второго порядка. В данном разделе мы распространим полученные результаты на системы более высокого порядка.

Сначала, однако, нам потребуется рассмотреть систему второго порядка с неединичным коэффициентом усиления. Передаточная функция такой системы имеет вид:

$$G_K(s) = KG(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4-63)$$

где K — коэффициент усиления, а $G(s)$ — передаточная функция второго порядка стандартного вида. Очевидно, что частотная характеристика, соответствующая $G(s)$ и изображен-

ная на рис. 4.14, может быть использована и для $G_K(s)$, если все числа на оси ординат увеличить в K раз. При этом форма частотной характеристики не изменится. Переходная функция этой системы (по Лапласу) имеет вид;

$$C_K(s) = G_K(s) \frac{1}{s} = KG(s) \frac{1}{s} = KC(s), \quad (4-64)$$

где $C(s)$ — переходная функция системы с единичным коэффициентом усиления (рис. 4.6). Таким образом, переходная функция системы с неединичным коэффициентом усиления получается путем умножения на величину K переходной функции системы с единичным коэффициентом усиления, а форма ее при этом не изменяется. Этот вывод справедлив только для передаточной функции вида (4-63), но не для любой системы.

Приступим к исследованию характеристик систем высокого порядка. Сначала рассмотрим передаточную функцию третьего порядка, разложенную на простые дроби:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2 / \tau}{(s + 1/\tau)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k_1}{s + 1/\tau} + \frac{k_3 s + k_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (4-65)$$

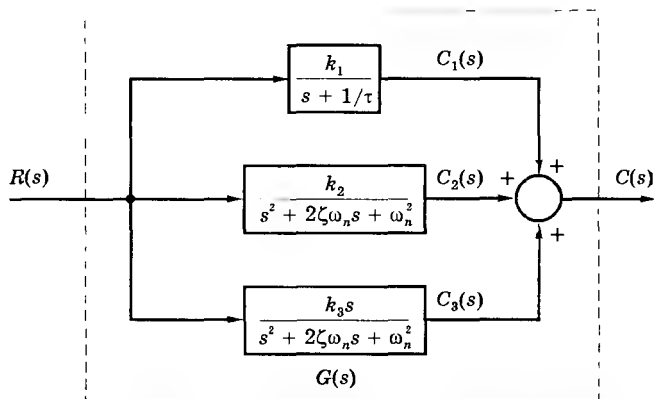
Заметим, что числитель соответствует системе с неединичным коэффициентом усиления. Выход системы можно выразить как

$$\begin{aligned} C(s) = G(s)R(s) &= \frac{k_1}{s + 1/\tau} R(s) + \frac{k_3 s + k_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \\ &= \frac{k_1}{s + 1/\tau} R(s) + \frac{k_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) + \frac{k_3 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \\ &= C_1(s) + C_2(s) + C_3(s). \end{aligned} \quad (4-66)$$

Таким образом, реакция этой системы третьего порядка может быть представлена в виде суммы реакций системы первого порядка и двух систем второго порядка, как показано на рис. 4.18.

Рис. 4.18

Реакция системы третьего порядка



Предположим, что в выражении (4-66) вход представляет собой единичную ступенчатую функцию. Первый член $C_1(s)$ соответствует переходной функции системы первого порядка с коэффициентом усиления $k_1\tau$ [см. (4-9)]. Третий член в (4-66), $C_3(s)$, можно представить в виде

$$C_3(s) = \frac{k_3 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) = \frac{k_3}{k_2} [sC_2(s)] \quad (4-67)$$

и, следовательно,

$$c_3(t) = \frac{k_3}{k_2} \frac{dc_2(t)}{dt}, \quad (4-68)$$

где $c_2(t)$ — переходная функция системы второго порядка (4-20), но с коэффициентом усиления k_2/ω_n^2 . Таким образом, переходная функция данной системы третьего порядка состоит из трех составляющих:

1. Переходной функции системы первого порядка с коэффициентом усиления $k_1\tau$ и постоянной времени τ .
2. Переходной функции стандартной системы второго порядка с коэффициентом усиления k_2/ω_n^2 , коэффициентом затухания ζ и собственной частотой ω_n .
3. Производной от предыдущей переходной функции, с теми же самыми ζ и ω_n , но с другим коэффициентом пропорциональности.

Мы видим, что переходная функция системы третьего порядка является сложной зависимостью от всех параметров передаточной функции. Однако можно сделать некоторые общие замечания. В рассмотренном примере известны постоянные времени слагаемых первого и второго порядка. Поскольку переходная функция равна сумме составляющих, зависящих от этих постоянных времени, то время установления будет приблизительно в четыре раза превышать наибольшую из постоянных времени; иначе говоря, время установления определяется самым «медленным» членом в реакции $c(t)$.

Что касается оценки максимального перерегулирования и времени нарастания, то она является более сложной. Коэффициент затухания ζ в слагаемом второго порядка дает лишь приблизительную оценку перерегулирования с помощью номограммы на рис. 4.8. Время нарастания оценить еще труднее. По-видимому, для этих целей лучше использовать полосу пропускания системы и соотношение (4-52), т.к. оно применимо к системам практически любого порядка. Ниже приводится иллюстративный пример.

Пример 4.6

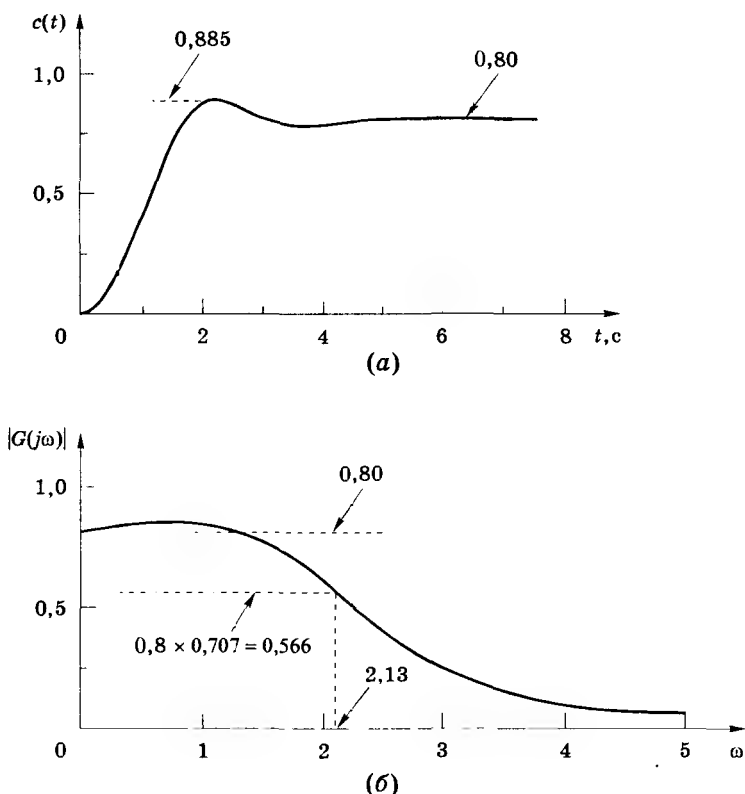
Рассмотрим систему третьего порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{8}{(s+2,5)(s^2+2s+4)} = \frac{1,524}{s+2,5} - \frac{1,524s-0,762}{s^2+2s+4}.$$

Передаточная функция первого порядка имеет постоянную времени 0,4 с. У передаточной функции второго порядка коэффициент затухания $\zeta = 0,5$, а собственная частота $\omega_n = 2$. Следовательно, постоянная времени равна 1,0 с, и время установления для системы можно оценить как приблизительно 4 с (т.е. в четыре раза больше максимальной постоянной времени). На рис. 4.8 значению $\zeta = 0,5$ соответствует максимальное перерегулирование около 17%, но так было бы в системе второго порядка. Для нашей системы третьего порядка переходная функция была получена путем моделирования; она изображена на рис. 4.19 (а). Из графика следует, что действительное время установления равно 3,2 с, а действительное перерегулирование составляет 11%.

Амплитудная частотная характеристика была рассчитана на цифровом компьютере; она изображена на рис. 4.19 (б). Полоса пропускания $\omega_p = 2,13$ рад/с. Моделирование дало действительное время нарастания 1,05 с, следовательно произведение полосы пропускания на время нарастания равно 2,24. Если, например, требуется, чтобы время нарастания было равно 0,5 с, то в соответствии с (4-52) полосу пропускания системы надо увеличить приблизительно до 4 рад/с. Способы расширения полосы пропускания систем управления рассматриваются в главах, посвященных синтезу.

Рис. 4.19
Характеристики
к примеру 4.6



Частотная характеристика рис. 4.19 (б) может быть вычислена с помощью следующей программы MATLAB:

```
w = logspace(-1,1);
Gnum = [0 0 0 8]; Gden1 = [1 2.5]; Gden2 = [1 2 4];
Gden = conv(Gden1, Gden2);
Gjomega = freqs(Gnum, Gden, w);
Gmag = abs(Gjomega);
plot(w, Gmag);
title('Frequency Response of G(s)')
xlabel('Omega')
ylabel('G(j*omega)')
grid
```

Рассмотренная методика может быть применима и к системам порядка выше третьего. В этом случае систему следует представить в виде параллельного соединения нескольких систем первого и второго порядка. Анализ постоянных времени дает возможность оценить время установления. Различные коэффициенты затухания позволят предсказать вид переходной функции, а комбинации коэффициентов затухания и собственных частот дадут оценку времени нарастания. Однако эти результаты являются весьма приближенными, а в ряде случаев могут быть и вовсе ошибочными. Вклад некоторых подсистем в выходной сигнал может быть настолько незначительным, что эти подсистемы должны быть исключены из рассмотрения. Тем самым появляется возможность понижения порядка модели, о чем и пойдет речь в следующем разделе.

4.7. Понижение порядка моделей

Эту главу мы начали с рассмотрения моделей первого и второго порядка. Затем было показано, что модели более высокого порядка можно представить в виде параллельного соединения моделей первого и второго порядка, а характеристики сложных систем оценивать исходя из свойств простейших моделей. Эти оценки не всегда могут быть точными; никаких общих закономерностей здесь не существует.

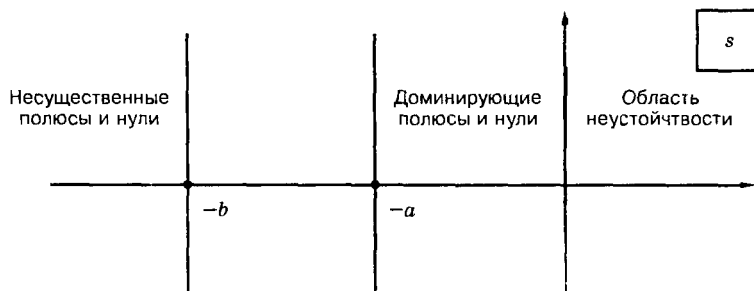
В данном разделе мы затронем проблему понижения порядка моделей. В ряде случаев у нас есть возможность свести модель высокого порядка к модели более низкого, иногда даже первого или второго, порядка и при этом существенно не проиграть в точности оценки ее характеристик. Ранее мы уже говорили о том, что любая модель реальной физической системы неточно отражает ее свойства, и повышения точности можно добиться только путем увеличения порядка модели. Следовательно, идя от обратного, *любую физическую систему всегда можно описать моделью сравнительно невысокого порядка, пренебрегая некоторыми ее характеристиками.*

Возникает естественный вопрос: а какую цель мы преследуем, заведомо понижая точность модели? Этому есть несколько причин:

1. Для моделей (систем) невысокого порядка гораздо проще решаются задачи анализа и синтеза.
2. Чем ниже порядок модели, тем выше точность вычислений на цифровом компьютере.
3. Если модель имеет первый или второй порядок, мы располагаем обширной информацией, необходимой для анализа и синтеза.
4. Несмотря на то, что модели высокого порядка и сами по себе никогда не обладают абсолютной точностью, в ряде случаев понижение их порядка может дать результаты, по точности не уступающие точности модели высокого порядка. Нарращивание порядка модели не всегда оправдано с точки зрения повышения точности.
5. При работе с моделями невысокого порядка существенную помощь оказывает интуиция. Значение интуиции, подкрепленной практическим опытом проектирования систем управления, вряд ли можно переоценить.

При понижении порядка системы s -плоскость можно разделить на отдельные области, как показано на рис. 4.20 [3]. Это деление является весьма приближенным, и оно зависит от конкретного вида передаточной функции. Доминирующие полюсы обычно обуславливают медленно протекающие составляющие выходного сигнала системы. Напротив, несущественные полюсы дают более быстро протекающие компоненты, и во многих случаях ими можно пренебречь. Приближенно можно считать, что отношение b/a должно

Рис. 4.20
Области
 s -плоскости



быть от 5 до 10 или более. Еще раз подчеркнем, что это правило применимо не к любой передаточной функции. Математическое обоснование понижения порядка системы будет изложено в главах 7 и 8.

4.8. Заключение

В этой главе мы рассмотрели характеристики линейных стационарных непрерывных систем, т.е. систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Свойства таких систем можно представить одним из двух способов. Во-первых, если известна входная функция, то мы можем получить решение для выходной функции в зависимости от времени. Реакция системы при этом состоит из двух частей: переходная составляющая (собственное движение), вид которой полностью определяется свойствами системы, и вынужденная составляющая (установившееся движение), обусловленная входным воздействием.

Второй метод описания свойств системы основан на использовании частотных характеристик, т.е. реакции системы на синусоидальный сигнал. Если известны частотные характеристики, то, по сути, мы располагаем полной информацией о системе. В действительности, как мы увидим в главе 9, знание частотных характеристик объекта позволит нам синтезировать замкнутую систему управления; при этом совсем не нужно располагать передаточной функцией объекта. Преимущество данного метода заключается в том, что частотные характеристики реальной системы могут быть получены экспериментальным путем.

Во всех примерах данной книги постоянная времени имеет величину порядка 1 с. Был рассмотрен метод масштабирования, показывающий, как изменение постоянных времени сказывается на коэффициентах передаточной функции и как результаты примеров можно легко распространить на системы с существенно отличающимися постоянными времени.

В этой главе основной акцент был сделан на изучение характеристик систем первого и второго порядка. Однако было показано, что системы более высокого порядка всегда можно представить в виде параллельного соединения систем первого и второго порядка. Наконец, была высказана идея понижения порядка модели.

Литература

1. J.D.Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
2. M.E.Van Valkenburg. *Network Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.
3. B.C.Kuo. *Automatic Control Systems*, 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

Задачи

- 4.1. (а) На рис. 4.1 (3), (а) изображен объект первого порядка, переходная функция которого имеет вид рис. 4.1(3), (б). Определите параметры передаточной функции.
- (б) Объект охвачен обратной связью, как показано на рис. 4.1(3), (с). Изобразите переходную функцию замкнутой системы.

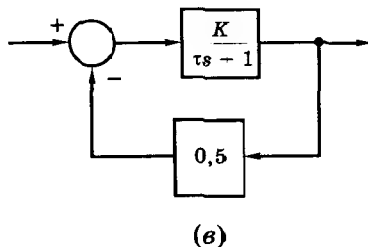
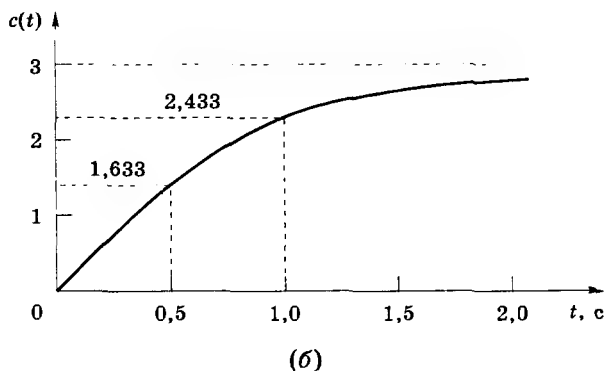
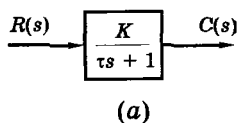


Рис. 4.1 (3)

4.2. Замкнутая система первого порядка на рис. 4.2 (3), (a) имеет переходную функцию, показанную на рис. 4.2 (3), (б). Установившееся значение $c(t)$ равно 0,96. Определите параметры K и τ .

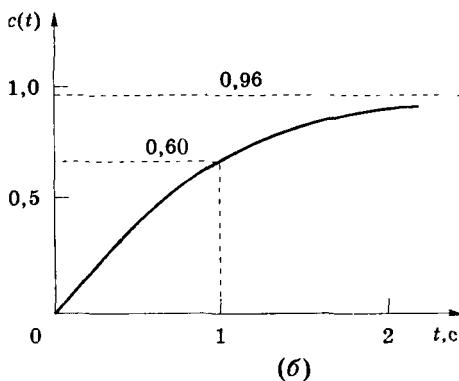
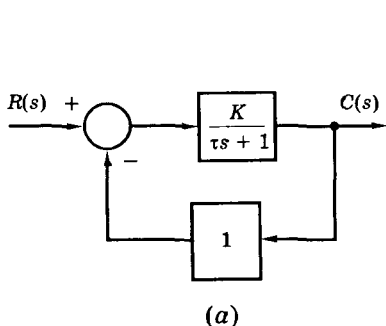
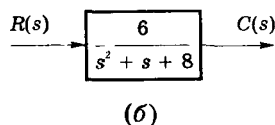
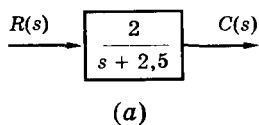


Рис. 4.2 (3)

- 4.3. (a) Изобразите переходную функцию системы рис. 4.3 (3), (a), произведя приблизительную разметку осей графика.
 (б) Промоделируйте систему и сравните ее переходную функцию с построенной в п. (a).
 (в) Повторите п. (a) для системы рис. 4.3 (3), (б).
 (г) Повторите п. (б) для системы рис. 4.3 (3), (б).

Рис. 4.3. (3)



- 4.4. (а) Для системы, изображенной на рис. 4.4 (3), нарисуйте переходную функцию, не получая математическое выражение для $c(t)$. Укажите приближенно численные значения на оси ординат и на оси абсцисс.

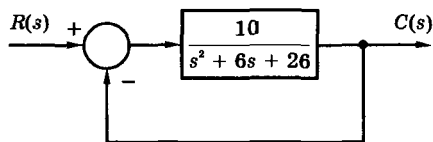


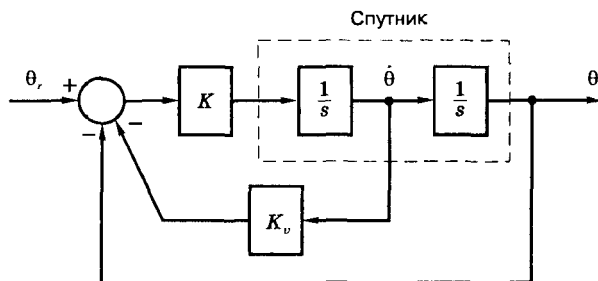
Рис. 4.4 (3)

- (б) С помощью SIMULINK промоделируйте систему в точном соответствии с рис. 4.4 (3) и сравните результаты с полученными в п. (а).

- 4.5. На рис. 4.5 (3) изображена система управления положением спутника. Модель спутника была получена в примере 2.13 (раздел 2.6). Момент инерции спутника J считается равным единице.

- (а) Запишите передаточную функцию системы.
- (б) Системе отдана команда изменить угловое положение спутника на 10° [$\theta_r(t) = 10u(t)$]. Каким будет это положение по окончании переходного процесса (когда система придет к установившемуся состоянию)?
- (в) Замкнутая система должна обрабатывать ступенчатое воздействие за минимальное время без перерегулирования, для чего необходимо иметь $\zeta = 1$. Найдите зависимость K_v от K , при которой будет выполняться выдвинутое требование.
- (г) Система из п. (в) должна достигать установившегося состояния примерно через 6 с после команды на изменение углового положения (т.е. после приложения входного воздействия). Определите значение K , при котором будет выполняться выдвинутое требование.
- (д) Промоделируйте систему с помощью MATLAB и проверьте результаты пп. (б), (в) и (г).
- (е) Угловая скорость спутника измеряется с помощью гироскопического датчика. Предположите, что датчик вышел из строя (это эквивалентно $K_v = 0$). Какова будет реакция системы на входной сигнал при отказе датчика? (Подобная ситуация действительно имела место во время одной из экспедиций на космическую станцию по программе НАСА.)
- (ж) Проверьте результат п.(е) путем моделирования системы.

Рис. 4.5 (3)



- 4.6. (а) Воспользовавшись SIMULINK, разработайте схему моделирования замкнутой системы управления положением спутника в точном соответствии с рис. 4.5 (3). Задайте значения $K = 0,444$ и $K_v = 3$.

- (б) Значения K и K_v из п. (а) дают $\zeta = 1$. Проведите исследование модели и убедитесь в правильности результата.

- 4.7. На рис 4.7 (3) изображена система третьего порядка

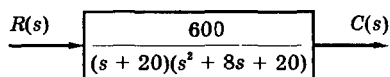


Рис. 4.7 (3)

- (а) Определите значение $c(t)$ в установившемся режиме, если $r(t) = 5u(t)$.

- (б) Приблизительно, сколько времени требуется для достижения реакцией системы установившегося значения?

- (в) Ожидаете ли вы, что переходный процесс будет иметь колебательный характер? Обоснуйте ваш ответ.

(г) Проверьте результаты, получив путем моделирования системы ее переходную функцию.

4.8. Докажите, что обратное преобразование Лапласа от (4-19) дает выражение (4-20), т.е.

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right] = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta),$$

где $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$, а $\theta = \arctg(\beta/\zeta)$.

4.9. (а) Докажите, что импульсная переходная функция системы, имеющей передаточную функцию $G(s)$, равна производной от переходной функции.

(б) Докажите, что для системы с передаточной функцией (4-18) ее импульсная переходная функция (4-25) является производной от переходной функции (4-20) той же системы.

(в) Докажите, что для системы с передаточной функцией $G(s)$ ее переходная функция есть производная от реакции той же системы на линейную функцию с единичным наклоном.

4.10. Система управления положением пера плоттера, рассмотренная в примере 4.2 (раздел 4.3), должна быть спроектирована таким образом, чтобы время установления равнялось 0,20 с. Имеющийся в распоряжении двигатель не позволяет этого добиться.

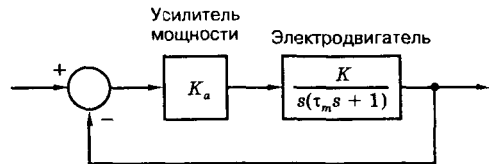


Рис. 4.10 (3)

(а) Если выбран электродвигатель с передаточной функцией $G(s) = K/[s(\tau_m s + 1)]$ и на его основе образована система рис. 4.10 (3), найдите значения K , K_a и τ_m так, чтобы они удовлетворяли заданному времени установления, и при этом процесс, вызванный ступенчатым входным воздействием, не имел перерегулирования ($\zeta = 1$).

(б) Путем моделирования проверьте полученное решение.

4.11. Рассмотрите систему на рис. 4.11 (3).

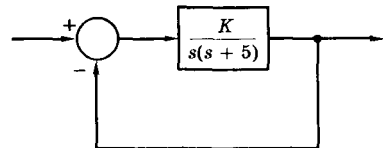


Рис. 4.11 (3)

(а) Определите диапазон изменения K , в котором система

- (1) недодемпфирована
- (2) обладает критическим демпфированием
- (3) передемпфирована.

(б) Определите значение K , при котором система будет обладать минимальным временем установления.

4.12. Ударил по струне «си» средней октавы ($f = 256$ Гц) гитары, и спустя примерно 2 с звук прекратился.

(а) Определите приблизительное значение коэффициента затухания ζ для этой струны.

(б) Определите приблизительное значение собственной частоты колебаний ω_n для этой струны.

(в) Получите передаточную функцию струны. Что в этом случае является входом и что — выходом?

(г) Перечислите все допущения, сделанные при построении модели струны.

4.13. Рассмотрите систему с передаточной функцией

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s + \alpha}.$$

(а) Определите область допустимых расположений полюса на s -плоскости, если система должна обладать временем установления менее 10 с.

(б) Найдите диапазон значений K_1 и α для условий п. (а).

4.14. Рассмотрите систему с передаточной функцией

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- (а) Определите область допустимых расположений полюсов на s -плоскости, если система должна обладать временем установления менее 2 с и перерегулированием не более 10%.
- (б) Найдите диапазон значений ζ и ω_n для условий п. (а).

4.15. Рассмотрите систему управления спутником, изображенную на рис. 4.5 (3).

- (а) Определите передаточную функцию замкнутой системы.
- (б) Найдите коэффициент усиления замкнутой системы.
- (в) В случае $K_v = 0$ найдите коэффициент передачи замкнутой системы (максимум амплитудной частотной характеристики) на резонансной частоте.
- (г) При синтезе системы выдвинуты следующие ограничения: максимальное значение коэффициента передачи замкнутой системы не должно быть больше 1.25, а постоянная времени не должна превышать 1 с. Найдите значения K и K_v , удовлетворяющие этим ограничениям. Обратите внимание, что за счет обратной связи по скорости удалось увеличить коэффициент затухания системы.
- (д) Проверьте результат п. (г) построением частотной характеристики с помощью MATLAB.

4.16. Рассмотрите систему из примера 4.6 (раздел 4.6), которая имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{8}{(s + 2.5)(s^2 + 2s + 4)}.$$

Переходная функция и частотная характеристика этой системы изображены на рис. 4.19. Конечное значение переходной функции равно 0,8, а начальное значение частотной характеристики также равно 0,8. Всегда ли эти два значения совпадают в случае устойчивой системы? Обоснуйте ваш ответ.

4.17. Докажите, что для системы первого порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

произведение полосы пропускания на время нарастания равно 2,197.

4.18. К системе на рис. 4.3 (3), (а) в момент времени $t = 0$ прикладывается входное воздействие $r(t) = 3\cos 2t$.

- (а) Определите реакцию системы в установившемся режиме.
- (б) Найдите диапазон времени t , в котором система находится в установившемся режиме.
- (в) Определите реакцию системы в установившемся режиме для $r(t) = 3\cos 8t$.
- (г) Почему в случае (а) амплитуда сигнала на выходе много больше, чем в п. (в), хотя амплитуда входного сигнала одна и та же?
- (д) Используя SIMULINK, запишите и выполните программу, с помощью которой можно проверить результаты пп. (а) и (б).

4.19. Рассмотрите следящую систему, изображенную на рис. 4.19 (3).

- (а) Определите передаточную функцию замкнутой системы.
- (б) Найдите коэффициент усиления замкнутой системы.

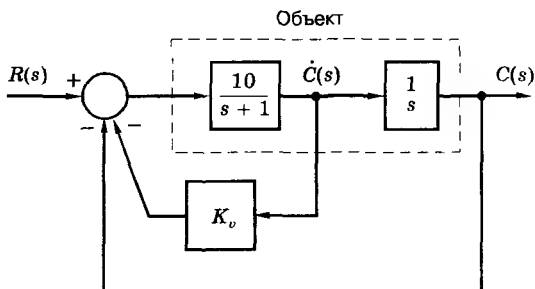


Рис. 4.19 (3)

- (в) Если $K_v = 0$, то найдите коэффициент передачи замкнутой системы (максимальное значение амплитудной частотной характеристики) на резонансной частоте.
- (г) При синтезе системы допускается иметь коэффициент усиления не более 1,26 на любой частоте. Определите значение K_v , удовлетворяющее этому ограничению. Обратите внимание, что за счет обратной связи по скорости удалось увеличить коэффициент затухания.
- (д) Проверьте результат п. (г) построением частотной характеристики с помощью MATLAB.

4.20. Система имеет стандартную передаточную функцию второго порядка.

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}.$$

- (а) Изобразите графически переходную функцию этой системы. Можете использовать любые рисунки из этой главы.
- (б) Найдите выражение для передаточной функции, если произведено масштабирование времени, т.е. $t_v = 0,01t$.
- (в) По результатам п. (б) определите значения ζ_v и ω_{nv} для передаточной функции после масштабирования.
- (г) Повторите п. (а) для системы с измененным масштабом времени.
- (д) Путем моделирования в MATLAB проверьте переходные функции, полученные в пп. (а) и (г).
- (е) Производится изменение масштаба путем замены $s_v = as$, где a — вещественный параметр. Исследуйте влияние такого масштабирования на временные характеристики системы.

4.21. (а) Задана система с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{500}{s + 200}.$$

Измените масштаб времени так, чтобы постоянная времени системы τ приняла значение 1 с.

- (б) Повторите п. (а) для системы с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{0,00016}{s^2 + 0,016s + 0,000256}.$$

- (в) С целью проверки вычислите постоянные времени непосредственно по передаточным функциям, найденным в пп. (а) и (б)
- (г) С помощью программы SIMULINK получите переходные функции для систем из пп. (а) и (б) и проверьте полученные ранее результаты.

4.22. Система имеет передаточную функцию третьего порядка:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s + 2)(s^2 + 20s + 200)}.$$

Обратите внимание, что коэффициенты числителя не заданы.

- (а) Оцените время нарастания, время установления и максимальное перерегулирование реакции системы на ступенчатое входное воздействие.
- (б) Используя MATLAB, промоделируйте систему и сравните действительные показатели реакции системы на ступенчатое входное воздействие с их оценкой для случаев, когда полином в числителе передаточной функции, $b_2 s^2 + b_1 s + b_0$, равен:
 - (1) $2s^2 + 240s + 800$;
 - (2) $2s^2 + 50s + 420$;
 - (3) $0,1s^2 + 402s + 820$.

5. Характеристики систем управления

В этой главе мы рассмотрим, какими характеристиками или свойствами должна обладать замкнутая система управления. Таких характеристик достаточно много, но часть из них не является абсолютно необходимой для *некоторых* систем управления, однако *все* системы обязаны обладать свойствами, которые мы кратко перечислим ниже и которые более детально будут рассмотрены в последующих разделах данной главы.

1. Во всех случаях мы требуем, чтобы система управления предсказуемым образом реагировала на входные воздействия и начальные условия. Для этого она должна быть *устойчивой*. Если система не является устойчивой, то она неработоспособна.
2. Поскольку никогда нельзя получить точную модель физической системы, то характеристики реальной замкнутой системы управления должны быть относительно нечувствительны к параметрам математической модели, которая использовалась при синтезе. Кроме того, параметры объекта управления могут изменяться с течением времени, а также в зависимости от окружающих условий, таких как температура, влажность, давление. Желательно, чтобы характеристики реальной системы управления, были нечувствительны к этим изменениям. Следовательно, нас будет интересовать проблема *чувствительности* замкнутой системы управления к изменению ее параметров.
3. Все реальные системы управления подвержены влиянию нежелательных внешних воздействий, называемых *возмущениями*. В принципе, система не должна реагировать на эти воздействия. Поэтому важную роль приобретает способность системы *подавлять (компенсировать) возмущения*.
4. При отработке системой входных воздействий определенного вида может возникать установившаяся ошибка. Для некоторых систем управления величина этой ошибки имеет критически важное значение. Поэтому одной из характеристик систем управления является их *точность в установившемся режиме*.
5. В разделе 5.2 мы определим *собственное движение* системы как ту часть полной реакции, которая присутствует всегда, независимо от входного сигнала. Если собственное движение с течением времени стремится к нулю, то его называют также *переходной составляющей* реакции. С ней мы встречались в главе 4, а в данной главе уделим ее анализу большее внимание.
6. И, наконец, мы рассмотрим связь всех перечисленных выше свойств с *частотными характеристиками замкнутой системы*.

5.1. Замкнутая система управления

В этом разделе мы будем иметь дело с одноконтурной замкнутой системой управления. Мы познакомимся с основными элементами, входящими в состав такой системы, и их функциональным назначением.

Рассмотрим систему управления, изображенную на рис. 5.1 (а). *Объект* — это физическая система или процесс, подлежащие управлению, вместе с усилителями мощности, исполнительными устройствами, редукторами и т.д. *Датчик* — это прибор, который измеряет выходной сигнал системы и преобразует его в сигнал соответствующей природы, подаваемый на сумматор. *Регулятор* — это динамическая система, целенаправленно вводимая в контур, чтобы придать замкнутой системе желаемые свойства.

Передаточные функции (математические модели) элементов системы управления указаны на рис 5.1 (б). По формуле Мейсона передаточная функция системы равна:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}. \quad (5-1)$$

Мы будем использовать следующие обозначения: $T(s)$ — передаточная функция замкнутой системы, $G(s)$ — передаточная функция прямой цепи, $H(s)$ — передаточная функция цепи обратной связи (при необходимости будем снабжать эти обозначения соответствующими индексами).

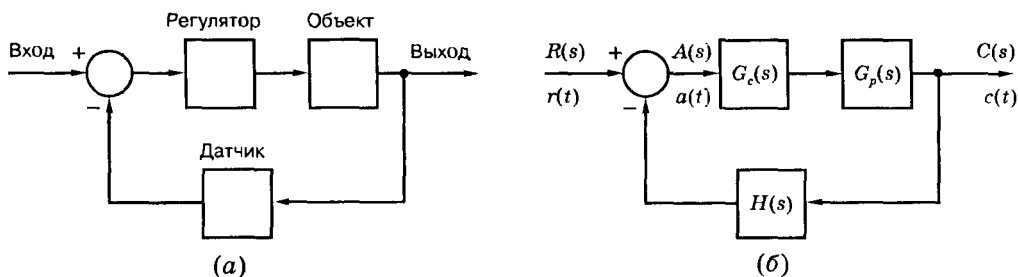


Рис. 5.1. Замкнутая система управления

Обычно датчик обладает намного меньшей инерционностью по сравнению с объектом. Иначе говоря, полоса пропускания датчика много больше полосы пропускания объекта. По этой причине датчик может быть смоделирован в виде идеального коэффициента усиления, который мы обозначаем H_k . Например, предположим, что входной величиной некоторого датчика температуры является температура в градусах Цельсия, а выходной величиной — напряжение, приращение которого составляет 50 мВ при изменении температуры на 1 °C. Тогда в полосе пропускания датчика его передаточная функция имеет вид коэффициента усиления

$$H_k = 50 \text{ мВ/}^{\circ}\text{C} = 0,05 \text{ В/}^{\circ}\text{C}.$$

Если считать датчик чистым коэффициентом усиления, то передаточная функция (5-1) сводится к виду:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H_k G_c(s)G_p(s)}. \quad (5-2)$$

Прежде, чем продолжить рассуждения, надо четко определить, с какими переменными мы имеем дело, рассматривая замкнутую систему управления. Для любой системы с одним входом и одним выходом (рис 5.1) справедливо следующее:

1. Система имеет переменную $c(t)$, которой мы хотим управлять. Ее называют *регулируемой переменной*, или *выходом системы*.
2. Система имеет *входную переменную*, или *вход*, $r(t)$, величина которой определяет *желаемое значение выхода системы* $c_d(t)$. Заметим, что при этом $r(t)$ и $c_d(t)$ не обязательно должны иметь одинаковую размерность. Кроме того, $c_d(t)$ — это совсем не та переменная, которая обозначена на рис. 5.1 (б).
3. Разность между желаемым значением выхода и его действительным значением есть *ошибка системы* $e(t)$:

$$\text{ошибка системы} = e(t) = c_d(t) - c(t). \quad (5-3)$$

4. Выход сумматора на рис. 5.1 (б), $a(t)$, есть *сигнал отклонения*, поскольку он несет информацию о реакции объекта.

Из рис. 5.1 следует также:

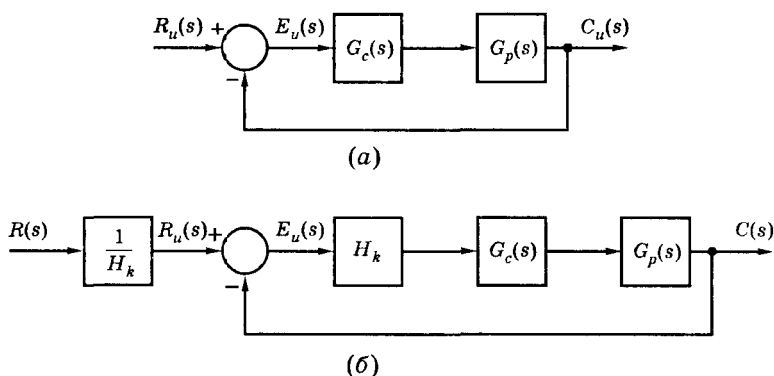
1. *Ошибка системы* не является внутренним сигналом этой системы.
2. В общем случае вход системы $r(t)$ — это не то же самое, что и желаемый выход системы $c_d(t)$.

Теперь дадим определение системы с единичной обратной связью, как показано на рис. 5.2 (а). Система с *единичной обратной связью* — это система, в которой коэффициент усиления в цепи обратной связи равен единице. Для системы с единичной обратной связью всегда справедливо следующее:

1. Размерность входа $r_u(t)$ совпадает с размерностью выхода $c_u(t)$.
2. Входной сигнал $r_u(t)$ одновременно является желаемым значением выхода $c_d(t)$.
3. Следовательно, ошибка системы есть не что иное, как сигнал отклонения, т.е.

$$e_u(t) = r_u(t) - c_u(t). \quad (5-4)$$

Рис. 5.2
Система
с единичной
обратной связью



Если датчик можно представить простым коэффициентом усиления, то структурная схема на рис. 5.1 сводится к эквивалентной схеме с единичной обратной связью. Результирующая структурная схема изображена на рис. 5.2 (б). Обратите внимание, что передаточная функция схемы на рис. 5.2 (б) соответствует выражению (5-2). В этом случае эквивалентная передаточная функция прямой цепи равна $H_k G_c(s) G_p(s)$, а входом системы с

единичной обратной связью является $R_u(s) = R(s)/H_k$. Очевидно, что если за вход мы принимаем $R_u(s)$, то система может быть представлена в виде рис. 5.2 (а). Будем называть эту схему *моделью с единичной обратной связью* (далее в книге мы часто будем прибегать к такой модели), для которой справедливы следующие предположения:

1. Датчик может рассматриваться как идеальный коэффициент усиления.
2. Эквивалентная передаточная функция прямой цепи равна $H_k G_c(s) G_p(s)$.
3. Входом модели с единичной обратной связью, $R_u(s)$, является вход реальной системы, умноженный на $1/H_k$.

Результат произведенных действий заключается в том, что в преобразованной модели входной сигнал $r_u(t)$, подаваемый на сумматор, имеет теперь ту же размерность, что и выходной сигнал системы. В реальной же системе входной сигнал всегда имеет размерность выходного сигнала датчика. *Сформулированные выше предположения справедливы для любой системы, модель которой имеет единичную обратную связь.* Если такие предположения не выполняются, то модель с единичной обратной связью использовать нельзя.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что в модели с единичной обратной связью вход $r_u(t)$ и выход $c_u(t)$ должны измеряться в одних и тех же единицах, т.е. если выход измеряется в градусах Цельсия, то и вход также должен измеряться в градусах Цельсия. Однако, если вход реальной системы равен $R(s)$, то в модели с единичной обратной связью входом должно быть $R(s)/H_k$. Следовательно,

вход реальной физической системы = $H_k r_u(t)$.

В предыдущем примере, при $H_k = 0,05$ В/°С, если мы хотим получить на выходе системы температуру 60 °С, (т.е. желаемое значение выхода равно 60 °С), то на вход реальной системы следует подать напряжение

$$r(t) = H_k r_u(t) = 0,05 \times 60 = 3 \text{ В.}$$

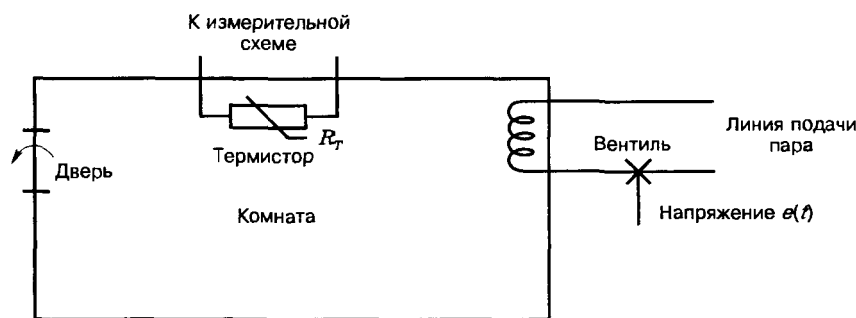
Как видим, вход реальной системы должен измеряться в тех же единицах, что и выход датчика.

Пример 5.1

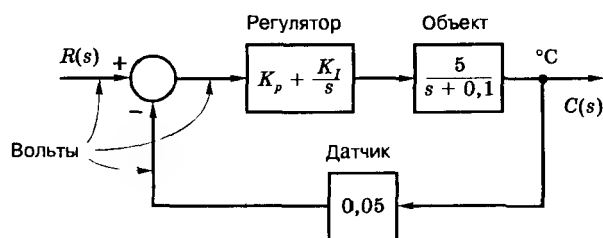
Рассмотрим систему регулирования температуры, изображенную на рис. 5.3. В системе используется пропорционально-интегральный регулятор с коэффициентами K_p и K_i , которые подлежат определению при синтезе. Это наиболее распространенный тип регуляторов, и более детально он будет рассмотрен в главах, посвященных синтезу систем. Предположим, что объектом регулирования является комната для испытаний аппаратуры при различных температурных режимах. Входом объекта является электрический сигнал (в вольтах), управляющий степенью открытия вентиля на линии подачи пара, обогревающего комнату. Выходом объекта является температура в градусах Цельсия, измеряемая в определенной точке комнаты.

Роль датчика выполняет измерительная схема, в которую включен термистор — полупроводниковый резистор, изменяющий свое сопротивление в зависимости от температуры. В данном случае датчик можно представить обычным коэффициентом усиления $H_k = 0,05$ В/°С. Заметим, что полоса пропускания объекта $\omega_B = 0,1$ рад/с (или $f_B = \omega_B/2\pi = 0,016$ Гц). Следовательно, температура в комнате будет изменяться очень медленно (с постоянной времени 10 с). Представив датчик коэффициентом усиления, мы предполагаем, что температура термистора может изменяться значительно быстрее, чем температура комнаты. То есть, полоса пропускания термистора намного больше, чем полоса пропускания комнаты.

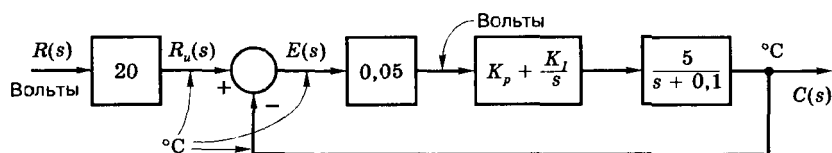
На основании изложенного эквивалентная структурная схема системы принимает вид рис. 5.3 (б). Схемы на рис. 5.3 (б) и (в) имеют одни и те же входы и выходы, а $E(s)$ на рис. 5.3 (в) соответствует преобразованию Лапласа ошибки системы, измеряемой в градусах Цельсия.



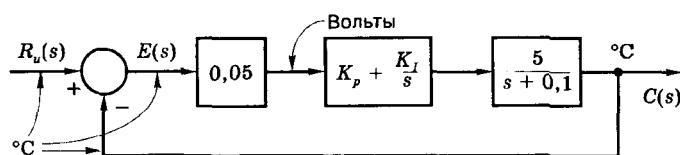
(a)



(б)



(в)



(з)

Рис. 5.3. Система к примеру 5.1

Эквивалентную схему можно еще более упростить, как показано на рис.5.3 (з). Здесь входное воздействие $R_u(s)$ имеет следующий вид:

$$R_u(s) = \frac{1}{H_k} R(s) = 20R(s).$$

Обычно удобнее всего работать со структурными схемами типа рис. 5.3 (з), т.к. в них входной и выходной сигналы, а также ошибка системы измеряются в одних и тех же единицах.

5.2. Устойчивость

При рассмотрении *физической* системы труднее всего ответить на вопрос о ее устойчивости. Обычно, говоря об устойчивости, мы имеем в виду, что система поддается управлению, т.е. устойчивая система всегда будет предсказуемым образом реагировать на входное воздействие. Для неустойчивой системы связь между входом и выходом не является такой очевидной. Примером неустойчивой физической системы может служить автомобиль, движущийся по мокрой дороге. Здесь практически отсутствует связь между действиями водителя с рулевым колесом и педалью тормоза и положением и скоростью автомобиля.

Хотя вопрос об устойчивости физической системы при всех возможных условиях является весьма и весьма непростым, для *линейных стационарных систем (моделей)* он решается достаточно легко. Для таких систем мы будем использовать следующее определение устойчивости типа «ограниченный вход — ограниченный выход»:

Система является устойчивой, если при любом ограниченном входном сигнале выходной сигнал также является ограниченным во все моменты времени.

В соответствии с этим определением разработаем критерий устойчивости линейных стационарных систем. Предположим, что мы имеем систему управления, конфигурация которой показана на рис. 5.1 (б). Обозначив $G(s) = G_c(s)G_p(s)$, на основании (5-1) запишем передаточную функцию:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (5-5)$$

Поскольку $G(s)$ и $H(s)$ есть дробно-рациональные функции переменной s , запишем их в виде:

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \quad \text{и} \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)},$$

где $N_G(s)$, $D_G(s)$, $N_H(s)$ и $D_H(s)$ — полиномы относительно s . Подставляя эти передаточные функции в (5-5), получим:

$$T(s) = \frac{N_G(s)/D_G(s)}{1 + N_G(s)N_H(s)/D_G(s)D_H(s)} = \frac{N_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (5-6)$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ — полиномы от s . Следовательно, $T(s)$ тоже является дробно-рациональной функцией переменной s .

Приравняв нулю знаменатель передаточной функции, мы получим *характеристическое уравнение* системы. Объяснение этому термину будет дано ниже. Для системы (5-6) характеристическое уравнение имеет вид:

$$Q(s) = D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s) = 0. \quad (5-7)$$

Обычно характеристическое уравнение записывают в иной форме. Если приравнять нулю знаменатель в (5-5):

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} = 0, \quad (5-8)$$

то получим уравнение вида (5-7). Следовательно, для записи характеристического уравнения системы можно использовать любую из модификаций (5-7) или (5-8).

Представим характеристическое уравнение (5-7) в виде произведения сомножителей:

$$Q(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0, \quad (5-9)$$

где $a_n = \text{const}$. Поскольку корни характеристического уравнения одновременно являются полюсами передаточной функции замкнутой системы, то мы будем оперировать этими понятиями взаимозаменяемо.

Теперь запишем выражение для выхода системы:

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)} R(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + C_r(s),$$

где $C_r(s)$ — сумма членов в разложении на простые дроби, которые обусловлены полюсами $R(s)$. Таким образом, $C_r(s)$ соответствует вынужденной составляющей реакции системы. Мы пока предполагаем, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней. Этот случай будет рассмотрен ниже. Обратное преобразование Лапласа от $C(s)$ дает

$$c(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} + c_r(t) = c_n(t) + c_r(t). \quad (5-10)$$

Мы назвали $c_n(t)$ *собственным движением* системы, поскольку эта составляющая обусловлена полюсами передаточной функции и, следовательно, не зависит от входа. Если $r(t)$ ограниченно, то и все слагаемые в $c_r(t)$ также будут ограничены, поскольку $c_r(t)$ функционально связана с $r(t)$. То есть, если выход становится неограниченным, то только потому, что по крайней мере один из членов собственного движения, $k_i e^{p_i t}$, является неограниченным. Этого не может произойти, если действительная часть каждого из корней характеристического уравнения p_i отрицательна.

Таким образом, мы приходим к заключению, что для того, чтобы линейная стационарная система была устойчива, все корни ее характеристического уравнения (полюсы передаточной функции) *должны располагаться в левой половине s -плоскости*. Если не все корни находятся в левой полуплоскости, то система не будет являться устойчивой. Если какие-то корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси (оси $j\omega$), а все остальные корни в левой полуплоскости, то выходная переменная будет иметь вид незатухающих колебаний при ограниченном входе, если только этот вход не является синусоидой (которая сама по себе ограничена), частота которой равна абсолютной величине корней на мнимой оси (как показано ниже в примере 5.2). В последнем случае выход будет неограниченным. Такую систему называют находящейся *на границе устойчивости*, поскольку лишь отдельные входные сигналы (синусоидальные, с частотой, равной значению полюсов) приводят к появлению неограниченного выхода. В *неустойчивой* системе по крайней мере один корень характеристического уравнения расположен в правой половине s -плоскости; в этом случае выход будет неограниченным при любом входном сигнале.

Выражение $c(t)$, определяемое формулой (5-10), действительно только для случая, когда все корни характеристического уравнения являются различными, т.е. нет кратных корней. При наличии корня кратности m разложение $C(s)$ на простые дроби будет давать составляющие вида

$$L^{-1} \left[\frac{k}{(s - p_i)^m} \right] = \frac{k}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_i t}. \quad (5-11)$$

Эта составляющая будет ограниченной только если действительная часть p , отрицательна, т.е. сохраняется то же самое условие устойчивости. Итак,

Линейная стационарная система является устойчивой, если все корни ее характеристического уравнения (полюсы передаточной функции) расположены в левой половине s -плоскости.

Далее рассмотрим пример.

Пример 5.2

Система с передаточной функцией

$$T(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

является устойчивой, т.к. ее характеристическое уравнение

$$Q(s) = (s+1)(s+2) = 0$$

имеет корни $s_1 = -1$ и $s_2 = -2$, которые расположены в левой полуплоскости. Собственное движение системы содержит составляющие $k_1 e^{-t}$ и $k_2 e^{-2t}$.

Другая система, имеющая передаточную функцию

$$T(s) = \frac{10s + 24}{s^3 + 2s^2 - 11s - 12} = \frac{10(s + 2,4)}{(s+1)(s-3)(s+4)},$$

является неустойчивой, т.к. один из полюсов, $s = 3$, расположен в правой половине s -плоскости. Собственное движение системы содержит составляющие $k_1 e^{-t}$, $k_2 e^{3t}$ и $k_3 e^{-4t}$. Неустойчивость системы обусловлена членом $k_2 e^{3t}$, который неограниченно возрастает с течением времени. Полюсы передаточной функции можно найти и с помощью программы MATLAB:

```
p = [1 2 -11 -12];  
r = roots(p)
```

Третья система имеет передаточную функцию

$$T(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

и находится на границе устойчивости, поскольку имеет полюсы $s = \pm j$. Собственное движение системы имеет вид $k \sin(t + \theta)$, которое является ограниченным. Однако, если на вход подан сигнал $u(t) = \sin t$, то выход определяется выражением

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2},$$

и $c(t) = t \sin t$, что соответствует неограниченно возрастающей функции. Как отмечалось ранее, систему, имеющую ограниченное собственное движение, но дающую неограниченный выход при определенных ограниченных входных сигналах, называют находящейся на границе устойчивости.

Как было показано, характеристическое уравнение образуется из знаменателя передаточной функции замкнутой системы. Если этот знаменатель имеет вид полинома, то он называется *характеристическим полиномом*. Поскольку в формуле Мейсона (см. раздел 2.4) для передаточной функции замкнутой системы знаменатель обозначен как Δ , то и характеристический полином может быть получен из Δ . Таким образом, характеристическое уравнение примет вид

$$\Delta(s) = 0, \quad (5-12)$$

где $\Delta(s)$ — это знаменатель в формуле Мейсона.

Характеристическое уравнение можно получить также на основании модели в переменных состояния:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (5-13)$$

Так как передаточная функция определяется выражением

$$[3-41] \quad T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

то его знаменатель равен $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, и характеристическое уравнение принимает вид

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (5-14)$$

В итоге характеристическое уравнение линейной стационарной системы можно определить тремя разными способами:

$$1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0, \quad (5-15)$$

$$[5-12] \quad \Delta(s) = 0,$$

$$[5-14] \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

Уравнение (5-15) применимо в случае одноконтурной системы рис. 5.1 (б), а (5-12) и (5-14) могут быть использованы для любой линейной стационарной системы.

5.3. Чувствительность

В этом разделе мы обсудим идею, которая послужила первой причиной использования обратной связи в системах управления. Большая часть классической теории управления базируется на результатах, полученных при проектировании электронных усилителей со стабильными характеристиками [1]. Идея заключается в том, чтобы характеристики усилителя в течение длительного времени не претерпевали существенных изменений, если даже параметры отдельных элементов усилителя изменяются очень сильно. Проблема изменения характеристик системы из-за изменения ее параметров называется проблемой *чувствительности*.

Чтобы адекватно измерять чувствительность, сначала надо дать ей математическое определение. Рассмотрим отношение процентного изменения передаточной функции системы к процентному изменению параметра b этой функции и будем считать данное отношение мерой чувствительности передаточной функции к параметру b . Обозначим это отношение символом S :

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta b/b} = \frac{\Delta T(s)}{\Delta b} \frac{b}{T(s)}. \quad (5-16)$$

В этом выражении $\Delta T(s)$ есть изменение передаточной функции $T(s)$ из-за изменения параметра b на величину Δb . По определению, *функция чувствительности* вычисляется как предел выражения (5-16) при $\Delta b \rightarrow 0$. Следовательно, функция чувствительности имеет вид:

$$S_b^T = \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{\Delta T(s)}{\Delta b} \frac{b}{T(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial b} \frac{b}{T(s)}. \quad (5-17)$$

С точки зрения математической строгости следовало бы $T(s)$ записывать как $T(s, b)$, поскольку передаточная функция зависит как от s , так и от b .

В общем случае функция чувствительности некоторой характеристики W по отношению к параметру b имеет вид:

$$S_b^W = \frac{\partial W}{\partial b} \frac{b}{W}. \quad (5-18)$$

Вообще говоря, функция чувствительности зависит от переменной s (переменной преобразования Лапласа), и это создает трудности при ее интерпретации. Однако, если в (5-17) заменить s на $j\omega$, то мы сможем представить функцию чувствительности в виде частотной характеристики. Тогда она приобретает определенный смысл как чувствительность на частотах в полосе пропускания системы. Поскольку система не пропускает частоты за пределами этой полосы (в первом приближении), то чувствительность на частотах, больших полосы пропускания, обычно не представляет интереса.

Теперь получим некоторые полезные формулы для функций чувствительности. Рассмотрим систему управления на рис. 5.1 (б), имеющую передаточную функцию

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}.$$

Сначала найдем чувствительность $T(s)$ к передаточной функции объекта $G_p(s)$. Из (5-18) имеем:

$$S_{G_p}^T = \frac{\partial T}{\partial G_p} \cdot \frac{G_p}{T} = \frac{(1 + G_c G_p H) G_c - G_c G_p (G_c H)}{(1 + G_c G_p H)^2} \cdot \frac{G_p}{G_c G_p / (1 + G_c G_p H)} = \frac{1}{1 + G_c G_p H}, \quad (5-19)$$

где зависимость от переменной s подразумевается. После замены в (5-19) s на $j\omega$ получим:

$$S_{G_p}^T(j\omega) = \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)}.$$

Член $G_c G_p H$, вычисленный при определенной частоте, называется *коэффициентом усиления контура* на данной частоте. Он представляет собой передаточную функцию всех звеньев, образующих замкнутый контур, без учета инверсии знака за счет сумматора. Следовательно, на всех частотах в полосе пропускания системы желательно иметь коэффициент усиления контура как можно больше, чтобы снизить чувствительность характеристик системы к изменению параметров объекта. Одной из функций регулятора $G_c(s)$ как раз является увеличение коэффициента усиления при сохранении устойчивости замкнутой системы.

Теперь определим чувствительность системы к изменению параметров датчика $H(s)$:

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \frac{-G_c G_p (G_c G_p)}{(1 + G_c G_p H)^2} \cdot \frac{H}{G_c G_p / (1 + G_c G_p H)} = \frac{-G_c G_p H}{1 + G_c G_p H}. \quad (5-20)$$

Знак минус указывает, на то, что увеличение H приводит к уменьшению T . Так, чтобы чувствительность системы по отношению к датчику была малой, необходимо, чтобы и коэффициент усиления контура также был малым. Однако уменьшение коэффициента усиления делает систему более чувствительной к изменению параметров объекта. Мы видим, таким образом, что нельзя одновременно сделать систему нечувствительной и к параметрам объекта, и к параметрам датчика. Чтобы снять это противоречие, обычно выбирают высококачественный датчик со стабильными характеристиками. В отношении объекта этого, к сожалению, сделать нельзя. Более того, многие объекты в силу своей физической природы имеют параметры, очень сильно изменяющиеся в процессе эксплуатации. Например, параметры самолета существенно изменяются в широких диапазонах скоростей, высот и т.д. Поэтому автопилот (регулятор) должен быть спроектирован таким образом, чтобы удовлетворять жестким ограничениям на чувствительность к изменению параметров объекта.

Итак, мы рассмотрели чувствительность к изменению G_p или H . Однако сами эти передаточные функции изменяются потому, что изменяется какой-либо их параметр b . Так,

например, чувствительность $T(s)$ к параметру b передаточной функции $G_p(s)$ можно определить следующим образом:

$$S_b^T = \frac{\partial T}{\partial b} \frac{b}{T} = \frac{\partial T}{\partial G_p} \frac{\partial G_p}{\partial b} \frac{b}{T}. \quad (5-21)$$

Применение функций чувствительности проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 5.3

В этом примере мы рассмотрим некоторые проблемы, связанные с проектированием системы регулирования температуры (см. пример 5.1), причем будем предполагать, что регулятор является пропорциональным, т.е. $G_c(s) = K_p$. Передаточная функция объекта

$$G_p(s) = \frac{K}{s + 0,1},$$

где K имеет номинальное значение 5,0. Кроме того, будем считать, что датчик смоделирован в виде идеального коэффициента усиления H_k с номинальным значением 0,05. Сначала найдем чувствительность $T(s)$ к изменению K , числителя $G_p(s)$. Итак,

$$T(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) H_k}.$$

и на основании (5-21):

$$S_K^T = \frac{\partial T}{\partial G_p} \frac{\partial G_p}{\partial K} \frac{K}{T} = \frac{K_p}{(1 + K_p G_p H_k)^2} \frac{G_p}{K} \frac{K}{K_p G_p / (1 + K_p G_p H_k)} = \frac{1}{1 + K_p G_p H_k}.$$

Та же чувствительность, но представленная как функция частоты:

$$S_K^T(j\omega) = \frac{1}{1 + K_p [5/(0,1 + j\omega)](0,05)} = \frac{0,1 + j\omega}{0,1 + 0,25K_p + j\omega}.$$

Аналогично, на основании (5-20):

$$S_H^T(j\omega) = \frac{-K_p G_p(j\omega) H_k}{1 + K_p G_p(j\omega) H_k} = \frac{-K_p [5/(0,1 + j\omega)](0,05)}{1 + K_p [5/(0,1 + j\omega)](0,05)} = \frac{-0,25K_p}{0,1 + 0,25K_p + j\omega}.$$

На рис. 5.4 изображены эти функции чувствительности в зависимости от частоты для двух произвольно выбранных значений коэффициента усиления регулятора $K_p = 1$ и $K_p = 10$.

Заметим, что чувствительность передаточной функции системы к коэффициенту K меньше на низких частотах. Полосу пропускания системы можно найти из анализа передаточной функции:

$$T(j\omega) = \frac{K_p G_p(j\omega)}{1 + K_p G_p(j\omega) H_k} = \frac{5K_p}{0,1 + 0,25K_p + j\omega}.$$

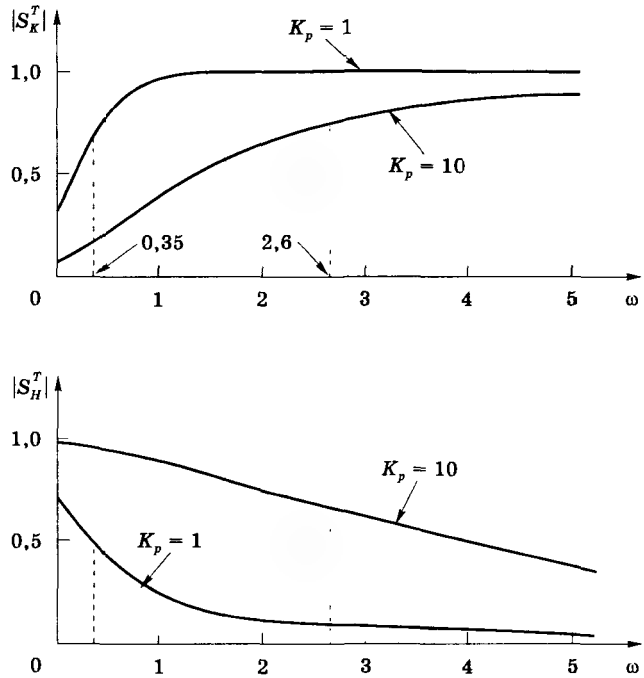
Усиление системы уменьшается до значения $0,707T(j\omega)$ при частоте $\omega = (0,1 + 0,25K_p)$ и, следовательно, полоса пропускания системы $\omega_B = (0,1 + 0,25K_p)$. При $K_p = 1$ $\omega_B = 0,35$, а при $K_p = 10$ $\omega_B = 2,60$ рад/с. Эти значения отмечены на рис. 5.4.

Из рис. 5.4 мы можем сделать следующие выводы:

1. Чувствительность системы по отношению к K уменьшается с увеличением коэффициента усиления разомкнутой системы, тогда как чувствительность по отношению к H , наоборот, возрастает.
2. Система очень чувствительна к K за пределами полосы пропускания, но это не имеет никакого значения: она также очень чувствительна к H внутри полосы пропускания, а это имеет существенное значение. Поэтому датчик должен быть разработан на основе высококачественных компонентов.

Рис. 5.4

Результаты примера 5.3



Две частотные характеристики на рис. 5.4 могут быть вычислены и построены с помощью следующей программы MATLAB:

```
Kp = [1 10]; w = logspace(-1 1);
for k = 1 : 2
    Gnum = [1 0.1]; Gden = [1 0.1 + 0.25Kp(k)];
    Gjomega = freqs(Gnum, Gden, w); Gmag = abs(Gjomega);
    plot(w, Gmag)
    title('Sensitivity Functions')
    xlabel('Omega'), ylabel('Sensitivity')
    grid
    hold on
end
hold off
```

Пример 5.4

Здесь мы также рассмотрим систему из примера 5.3, но только будем считать, что в ней используется ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}.$$

При определении функций чувствительности это будет связано с заменой $G_c(s)$ на $K_p + K_I/j\omega$. В результате получим:

$$S_K^T(j\omega) = \frac{1}{1 + [(K_I + j\omega K_p)/j\omega][5/(0.1 + j\omega)](0.05)} = \frac{j\omega(0.1 + j\omega)}{0.25K_I - \omega^2 + j(0.1 + 0.25K_p)\omega}$$

и

$$S_H^T(j\omega) = \frac{[-(K_I + j\omega K_p)/j\omega][5/(0.1 + j\omega)](0.05)}{1 + [(K_I + j\omega K_p)/j\omega][5/(0.1 + j\omega)](0.05)} = \frac{-(0.25K_I + j0.25K_p\omega)}{0.25K_I - \omega^2 + j(0.1 + 0.25K_p)\omega}.$$

Эти функции чувствительности являются более сложными и не могут быть изображены графически, т.к. они зависят от двух параметров, K_p и K_I . Однако обратим внимание, что чувствительность T по отношению к K обращается в нуль при $\omega = 0$. Это означает, что если вход постоянен и система находится в установившемся режиме, то ее коэффициент усиления не зависит от K (при условии, что $K \neq 0$). Этим объясняется популярность использования ПИ-регуляторов.

5.4. Компенсация возмущений

В этом разделе мы рассмотрим влияние возмущений на работу системы управления. В любой системе управления ко входу объекта прикладывается воздействие, с помощью которого выход изменяется в желаемом направлении. Это входное воздействие называют *управляющей (регулирующей) переменной* и используют для нее обозначение $m(t)$. В то же время в системе имеются и другие входные воздействия, оказывающие влияние на выходную переменную и которые являются неконтролируемыми. Мы называем эти воздействия *возмущениями* и обычно пытаемся спроектировать систему таким образом, чтобы свести их влияние к минимуму.

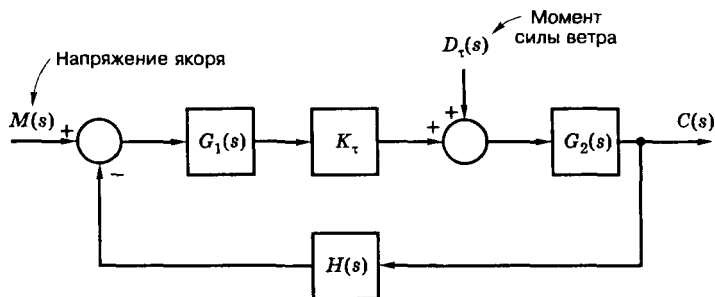
Приведем некоторые примеры возмущений. Предположим, что мы проектируем систему управления антенной радиолокатора. Параболическая антенна жестко смонтирована на платформе, которая приводится в движение электродвигателем постоянного тока, как это было описано в разделе 2.7 (см. рис. 2.28). Структурная схема сервопривода изображена на рис. 5.5 (см. также рис. 2.27), где G_2 учитывает момент инерции антенны и платформы. Ветер, конечно, также оказывает влияние на антенну, поэтому общий момент сил, действующих на платформу, складывается из момента, развиваемого двигателем, и момента, создаваемого ветром. Последний на рис. 5.5 учтен в виде $D_t(s)$. В соответствии с принципом суперпозиции, выход системы определяется выражением

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{K_\tau G_1(s)G_2(s)}{1 + K_\tau G_1(s)G_2(s)H(s)} M(s) + \frac{G_2(s)}{1 + K_\tau G_1(s)G_2(s)H(s)} D_t(s) = \\ &= G_p(s)M(s) + G_d(s)D_t(s), \end{aligned} \quad (5-22)$$

где $G_p(s)$ и $G_d(s)$ — соответственно, передаточные функции от управляющего входного сигнала $M(s)$ (напряжение якоря) и от возмущения $D_t(s)$ (момент силы ветра) к выходу системы. Система управления должна быть спроектирована так, чтобы свести к минимуму влияние ветра на положение антенны, которое определялось бы только величиной напряжения якоря двигателя.

Наличие возмущений можно учесть также в модели в переменных состояния. Рассмотрим модель объекта с одним выходом и двумя входами:

Рис. 5.5
Модель
сервопривода



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{u}(t)$ — вектор входа (2×1), а $y(t)$ — скалярный выход. Вектор входа имеет вид

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} m(t) \\ d(t) \end{bmatrix},$$

где $m(t)$ — управляющий вход, а $d(t)$ — возмущающий вход. На основании (3-43) матричная передаточная функция объекта

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [G_p(s) \ G_d(s)]. \quad (5-23)$$

В этом выражении $G_p(s)$ есть передаточная функция от управляющего входа $M(s)$ к выходу, а $G_d(s)$ — от возмущения $D(s)$ к выходу. Если входов больше двух, то матричная передаточная функция (5-23) будет иметь более двух элементов.

Теперь рассмотрим проблему компенсации возмущений. На рис. 5.6 изображена структура объекта с учетом возмущения. В отдельных случаях могут потребоваться некоторые преобразования для того, чтобы привести систему к расчетному виду рис. 5.5. Однако во многих практических задачах мы встречаемся с ситуацией, изображенной на рис. 5.6, поэтому далее будем использовать именно такую конфигурацию системы.

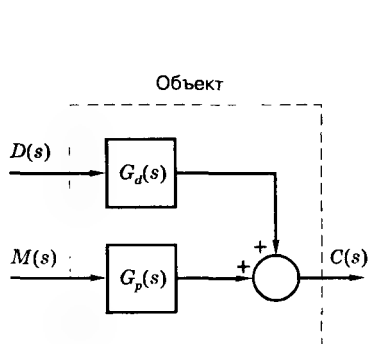


Рис. 5.6. Объект управления с учетом возмущения

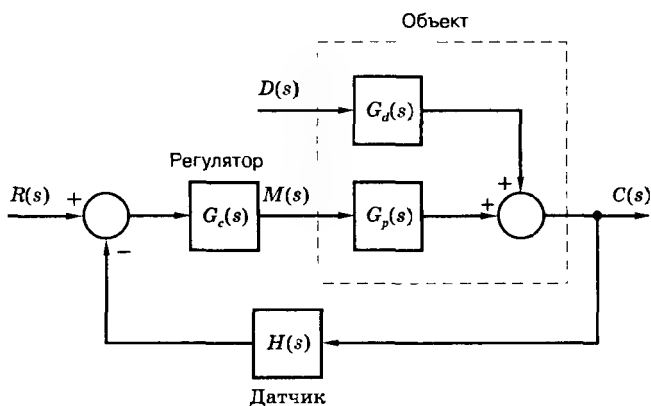


Рис. 5.7. Замкнутая система управления при наличии возмущения

Замкнутая система управления с учетом возмущения изображена на рис. 5.7. На основании принципа суперпозиции мы можем записать выражение для выходного сигнала:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} D(s) = T(s)R(s) + T_d(s)D(s).$$

В этом выражении $T(s)$ — это передаточная функция от эталонного входа $R(s)$ к выходу, а $T_d(s)$ — передаточная функция от возмущения $D(s)$ к выходу.

Если мы хотим ослабить влияние возмущения, то желательно, чтобы член $T_d(s)D(s)$ был малым. Но в общем случае $T_d(j\omega)$ (если пользоваться частотными характеристиками) не может быть сделана малой для всех значений частоты ω . Однако при синтезе регулято-

ра $G_c(s)$ появляется возможность сделать $T(j\omega)$ малой в значительной части полосы пропускания системы. Из предыдущего раздела мы знаем, что для уменьшения чувствительности системы к изменению параметров объекта надо иметь большое значение коэффициента усиления контура, $G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)$. То же требование сохраняет силу и в данном случае. Если $H(j\omega) = 1$, то при достаточно большом значении коэффициента усиления контура

$$T(j\omega) = \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \approx 1, \quad (5-24)$$

и выход очень хорошо отслеживает входное воздействие. При тех же условиях коэффициент передачи по возмущению

$$T_d(j\omega) \approx \frac{G_d(j\omega)}{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}. \quad (5-25)$$

Для качественной компенсации возмущения это отношение должно быть малым. Наиболее очевидный путь — это сделать малым $G_d(j\omega)$. Однако инженер-проектировщик не всегда может изменить характеристики объекта. Например, в его распоряжение поступает серийно изготовленная антенна радиолокатора, и он не в состоянии изменить ее конструкцию, чтобы ослабить влияние ветра. Но на стадии проектирования технологических процессов и промышленных установок советы специалиста по управлению могут помочь в будущем значительно ослабить влияние возмущений.

Второй способ уменьшения влияния возмущения заключается в увеличении коэффициента усиления контура за счет регулятора $G_c(s)$. Заметим, что того же эффекта можно было бы добиться за счет увеличения коэффициента усиления объекта, но это может привести к увеличению G_d , поэтому такое решение не является наилучшим. Чтобы эффективно компенсировать влияние возмущения, надо таким образом увеличить коэффициент усиления контура, чтобы при этом не затрагивалась передаточная функция от точки приложения возмущения до выхода системы. А это обычно можно сделать только путем увеличения коэффициента усиления регулятора.

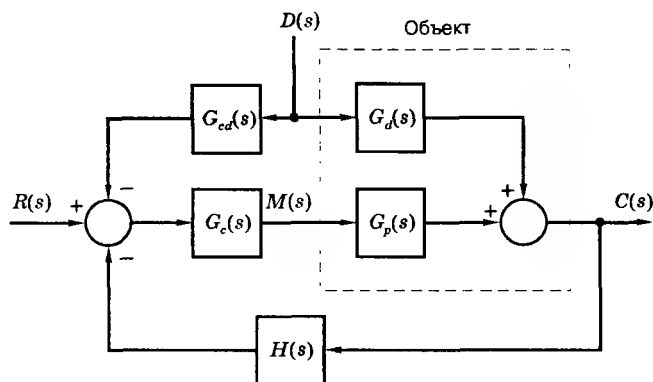
Третий способ борьбы с возмущениями заключается в уменьшении их величины. Например, предположим, что возмущение представляет собой помеху, наводимую в электрической цепи датчика. Путем надлежащей компоновки, экранирования и заземления цепи обычно удастся значительно уменьшить или даже вовсе исключить эту помеху. Такой метод был бы наиболее эффективным решением проблемы, однако подобная возможность предоставляется далеко не всегда.

Четвертый способ носит название *регулирования по возмущению* и может быть применен, если возмущение поддается измерению специальным датчиком. Система с регулированием по возмущению изображена на рис. 5.8. В этой системе возмущение $D(s)$ измеряется и подается на сумматор через передаточную функцию $G_{cd}(s)$, являющуюся частью регулятора. Введение этого канала не влияет на передаточную функцию от эталонного входа $R(s)$ к выходу, определяемую выражением (5-24). Но теперь передаточная функция от точки приложения возмущения к выходу системы равна

$$T_d(s) = \frac{G_d(s) - G_{cd}(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}. \quad (5-26)$$

Рис. 5.8

Система с регулированием по возмущению



Если выбрать произведение $G_{cd}G_c$ так, чтобы числитель оказался малым, то можно добиться хорошей компенсации возмущения. Если же числитель удастся сделать равным нулю, т.е.

$$G_d(s) - G_{cd}(s)G_c(s)G_p(s) = 0,$$

или

$$G_{cd}(s)G_c(s) = \frac{G_d(s)}{G_p(s)}, \quad (5-27)$$

то возмущение будет скомпенсировано полностью. Идея этого метода заключается в том, чтобы за счет $D(s)$ создать на выходе $G_p(s)$ составляющую, равную по величине, но противоположную по знаку выходу $G_d(s)$. Если (5-27) не может быть выполнено точно на всех частотах, то о компенсации возмущения приходится говорить только в ограниченном диапазоне частот, где приближенно выполняется условие (5-27). Напомним, что передаточная функция всегда является приближенной моделью физической системы. Поэтому, даже если условие (5-27) выполняется точно, качество компенсации возмущения в реальной системе будет зависеть от того, насколько соответствуют действительности модели $G_p(s)$ и $G_d(s)$.

Подводя итоги, перечислим еще раз четыре способа компенсации возмущений:

1. Уменьшение коэффициента передачи G_d между точкой приложения возмущения и выходом системы.
2. Увеличение коэффициента усиления контура G_cG_pH , что обычно обеспечивается надлежащим выбором регулятора G_c .
3. Снижение величины возмущения $d(t)$; если есть смысл, то к этому всегда надо стремиться.
4. Если возмущение может быть измерено, то использование регулирования по возмущению.

Обычно хорошей компенсации возмущений добиваются путем комбинации рассмотренных способов и, возможно, некоторых других приемов.

Пример 5.5

В этом примере мы еще раз вернемся к системе регулирования температуры (см. пример 5.1). Напомним, что речь идет о комнате для температурных испытаний и что возмущение моделируется открытием двери комнаты, что оказывает влияние на температуру. Будем считать, что схема рис. 5.9 (а) является адекватной моделью объекта. Предположим, что открытие двери в этой модели можно представить единичным ступенчатым воздействием $d(t)$. То есть, для объ-

екта на рис. 5.9 (а) открытая дверь в течение длительного отрезка времени (не менее 40 секунд) равносильна уменьшению температуры на 6 °С, поскольку $G_d(0) = -6$.
Теперь рассмотрим замкнутую систему. На рис. 5.9 (б) изображена система с ПИ-регулятором. Передаточная функция от точки приложения возмущения к выходу системы имеет вид:

$$T_d(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} = \frac{-0,6/(s + 0,1)}{1 + (K_p + K_I/s)[5/(s + 0,1)](0,05)},$$

или

$$T_d(j\omega) = \frac{-j0,6\omega}{0,25K_I - \omega^2 + j(0,1 + 0,25K_p)\omega}.$$

Эту функцию можно изобразить графически в зависимости от частоты, чтобы определить, насколько хорошо ПИ-регулятор справляется с компенсацией возмущения. В этом примере мы предполагаем, что возмущение может быть представлено ступенчатой функцией. Таким образом, в установившемся режиме возмущение не оказывает никакого влияния, поскольку $T_d(0) = 0$. В этом «повинен» интегратор, обладающий бесконечным коэффициентом усиления на нулевой частоте. Заметим, тем не менее, что открытие двери будет оказывать свое влияние в переходном режиме, и это влияние будет зависеть от коэффициентов K_p и K_I .

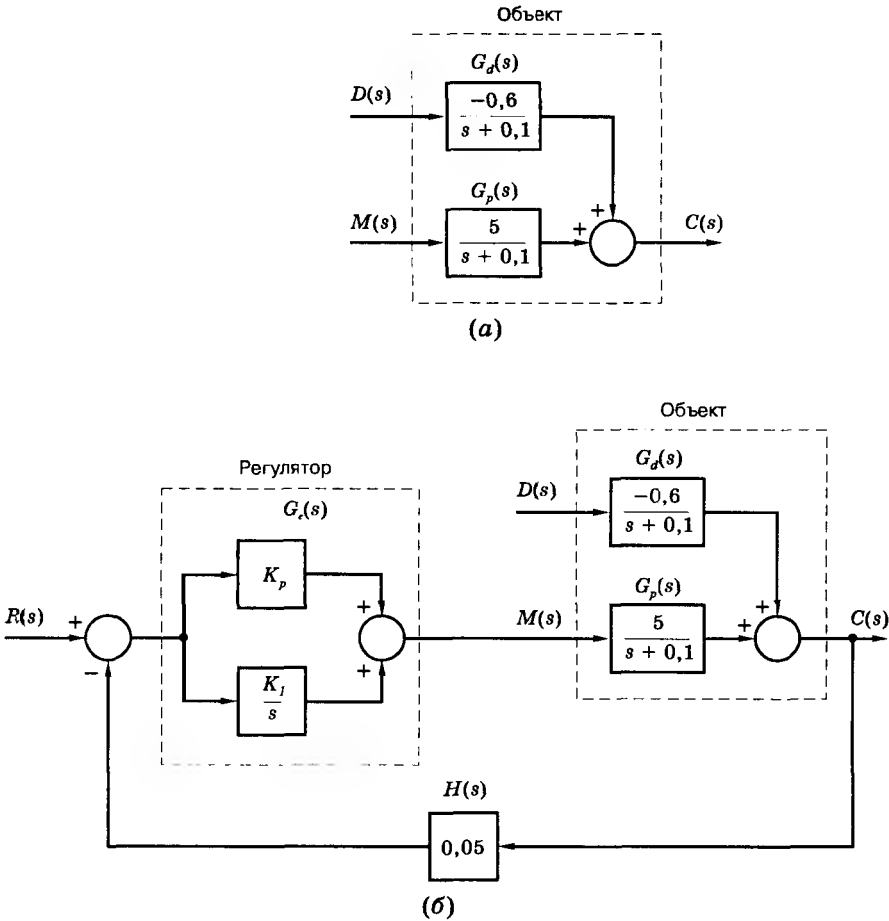


Рис. 5.9. Система к примеру 5.5

5.5. Точность в установившемся режиме

Во многих системах управления эталонный вход $r(t)$ представляет собой постоянную величину. Примером является система регулирования температуры в жилых и рабочих помещениях. Эталонный вход (задающее воздействие) постоянен, а возмущения в виде утечки тепла через стены и окна помещения все время стремятся отклонить выходную переменную систему от заданного значения. Конечно, время от времени эталонный вход может изменяться от одного постоянного значения к другому. Мы будем считать, что это изменение происходит скачком, как показано на рис. 5.10. Моменту скачка условно присвоено значение $t = 0$. Сигнал, изображенный на рис. 5.10, можно описать выражением

$$r(t) = R_0 + (R_1 - R_0) u(t), \quad (5-28)$$

где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция. Согласно принципу суперпозиции, реакцию системы можно разделить на две независимые части. Первая часть — это реакция на постоянный сигнал R_0 , а вторая — реакция на ступенчатый сигнал с амплитудой $(R_1 - R_0)$. Следовательно, реакция системы в переходном режиме будет определяться именно входным сигналом ступенчатой формы, и это еще одна причина, по которой мы уделяем большое внимание такому типу внешних воздействий.

Сначала мы рассмотрим систему с единичной обратной связью (рис. 5.11), а к случаю неединичной обратной связи вернемся позже. Во всех рассуждениях будем предполагать, что система является устойчивой. Если система неустойчива, то ни один из полученных в этом разделе результатов не будет иметь смысла. В системе рис. 5.11 выход определяется выражением:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s). \quad (5-29)$$

Для удобства представим $G_c(s)G_p(s)$ в виде:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{F(s)}{s^N Q_1(s)}, \quad (5-30)$$

где полиномы $F(s)$ и $Q_1(s)$ не обращаются в нуль при $s = 0$. Поскольку интегратор имеет передаточную функцию $1/s$, то N — это число интеграторов, входящих в $G_c(s)G_p(s)$ и не являющихся частью какого-либо контура схемы моделирования (будем называть их свободными интеграторами). Число свободных интеграторов называется *типом системы*, и сейчас мы продемонстрируем важность этого понятия.

Как было отмечено в разделе 5.1, для структуры рис. 5.11 ошибка системы — это разность между ее входом и выходом, т.е.

$$\text{ошибка} = e(t) = r(t) - c(t). \quad (5-31)$$

Установившаяся ошибка, по определению, это $e(t)$ в установившемся режиме. Обозначив установившуюся ошибку через e_{ss} , по теореме о конечном значении из преобразо-

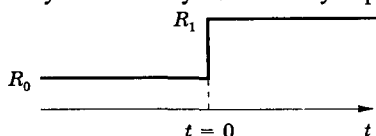


Рис. 5.10. Ступенчатое изменение входного сигнала

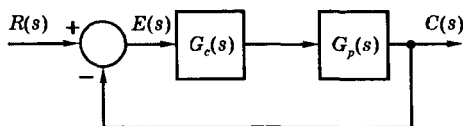


Рис. 5.11. Система с единичной обратной связью

вания Лапласа (см. приложение Б) запишем:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad (5-32)$$

при условии, что $e(t)$ имеет конечное значение. Для системы на рис. 5.11, по формуле Мейсона,

$$E(s) = \frac{R(s)}{G_c(s)G_p(s)} \quad (5-33)$$

и

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}. \quad (5-34)$$

В соответствии с этим выражением вычислим установившуюся ошибку для трех различных входных воздействий.

5.5.1. Реакция на ступенчатое воздействие

Вычислим установившуюся ошибку при единичном ступенчатом воздействии. В этом случае $R(s) = 1/s$ и на основании (5-34):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{1 + K_p}, \quad (5-35)$$

где K_p — коэффициент ошибки по положению*, определяемый как

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_p(s). \quad (5-36)$$

В случае, если в выражении (5-30) $N \geq 1$, K_p бесконечно велико и установившаяся ошибка равна нулю. Таким образом, для системы типа 1 или выше установившаяся ошибка, вызванная единичным ступенчатым воздействием, равна нулю. Для системы типа 0 установившаяся ошибка отлична от нуля и определяется по формуле (5-35).

Если к системе приложено ступенчатое воздействие величиной A , то $R(s) = A/s$ и

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}, \quad (5-37)$$

где K_p определяется формулой (5-36).

5.5.2. Реакция на линейное воздействие

Теперь найдем установившуюся ошибку при линейном входном воздействии вида $r(t) = tu(t)$, для которого $R(s) = 1/s^2$. На основании (5-34) имеем:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{K_v}. \quad (5-38)$$

В этом выражении K_v называют коэффициентом ошибки по скорости, поскольку при линейном входном воздействии выход системы в установившемся режиме должен изменяться с постоянной скоростью. Этот коэффициент в соответствии с (5-30) и (5-38) равен

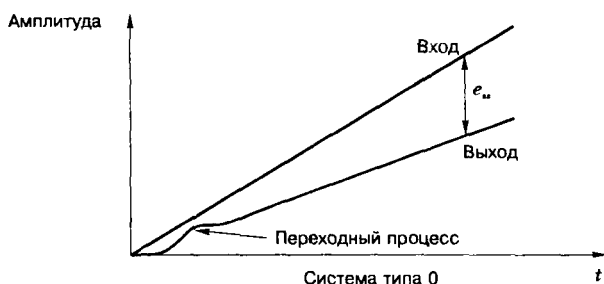
* В переводе сохранена авторская терминология. В отечественной литературе коэффициенты ошибки по положению, скорости и т.д. определяются иначе. — Прим. перев.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^{N-1} Q_1(s)}. \quad (5-39)$$

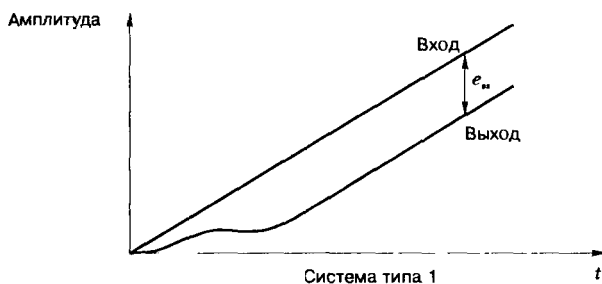
Следовательно, для системы типа 2 или выше установившаяся ошибка, вызванная линейным воздействием, равна нулю, поскольку K_v бесконечно велико. Для системы типа 1 установившаяся ошибка конечна, отлична от нуля и определяется выражением (5-38). Для системы типа 0 коэффициент K_v равен нулю, что приводит к бесконечно большой ошибке. Эти ситуации проиллюстрированы на рис. 5.12. Рис. 5.12 (а) показывает, что в системе типа 0 выход в установившемся режиме изменяется по линейному закону, но со скоростью, меньшей чем у входного сигнала, поэтому ошибка неограниченно возрастает. Для системы типа 1, как видно из рис. 5.12 (б), выход в установившемся режиме изменяется с той же скоростью, что и вход, но отличается от него на постоянную величину ошибки e_{ss} . Рис. 5.12 (в) показывает, что для системы типа 2 и более установившаяся ошибка равна нулю.

Рис. 5.12

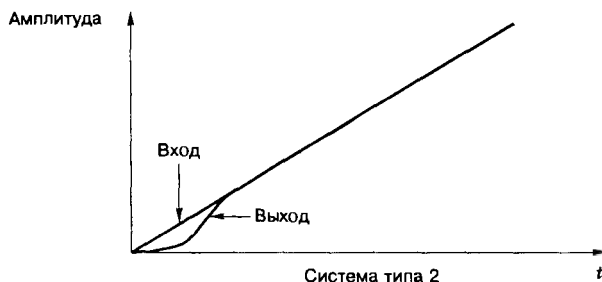
Реакции
на линейное воздействие



(а)



(б)



(в)

Если вход изменяется по линейному закону со скоростью A , то установившаяся ошибка будет равна

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \quad (5-40)$$

где K_v определяется формулой (5-39).

5.5.3. Квадратичное входное воздействие

Последнее входное воздействие, которое мы рассмотрим — это квадратичная функция $r(t) = (t^2/2)u(t)$, для которой преобразование Лапласа $R(s) = 1/s^3$. Тем самым выдвигается требование, чтобы выход системы в установившемся режиме изменялся с постоянным ускорением. На основании (5-34) установившаяся ошибка равна

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{K_a}, \quad (5-41)$$

где K_a — коэффициент ошибки по ускорению, определяемый выражением

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^{N-2}Q_1(s)}. \quad (5-42)$$

Для системы типа 3 и выше установившаяся ошибка равна нулю, для системы типа 2 она конечна и отлична от нуля, а для систем типа 0 или 1 — неограниченно возрастает.

Результаты наших рассуждений сведены в таблицу 5.1, из которой видно, что чем выше тип системы, тем большей точностью она обладает в установившемся режиме. Это можно объяснить следующим образом. Входной сигнал общего вида раскладывается в ряд Тейлора [2]:

$$r(t) = r(0) + \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots \quad (5-43)$$

Таким образом, входное воздействие представляется в виде суммы ступенчатого, линейного, квадратичного и т.д. сигналов. Чем выше тип системы, тем большее число членов этого ряда будет давать нулевой вклад в установившуюся ошибку. Однако, как мы увидим позже, систему типа 2 или выше очень трудно сделать устойчивой. Кроме того, переходные процессы в таких системах имеют очень плохие показатели. Таблица 5.1 показывает также, что увеличение коэффициента усиления в контуре (если при этом система остается устойчивой) приводит к уменьшению установившейся ошибки.

Таблица 5.1 Значения установившейся ошибки

N	$R(s)$			Коэффициенты ошибки
	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$	
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p$
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c G_p$
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c G_p$

Пример 5.6

Рассмотрим следящую систему, изображенную на рис. 5.13. Электродвигатель имеет постоянную времени 0,1 с, т.е. после включения он набирает полную скорость приблизительно за 0,4 с. Динамическая коррекция в системе отсутствует, однако коэффициент усиления усилителя мощности может варьироваться. Коэффициенты ошибки, согласно таблице 5.1, равны:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K G_p(s) \rightarrow \infty,$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K G_p(s) = 10K,$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K G_p(s) = 0.$$

Поскольку система относится к типу 1, мы могли бы найти коэффициенты K_p и K_a без вычислений. При линейном воздействии, изменяющемся с единичной скоростью, установившаяся ошибка $e_{ss} = 1/10K$. Предположим, например, что выход измеряется в сантиметрах, а $K = 10$. Тогда в установившемся режиме ошибка по скорости составляет 0,01 см. Однако мы ничего не можем сказать о времени достижения установившегося режима, т.к. постоянная времени 0,1 с соответствует разомкнутой системе. Чтобы найти постоянную времени замкнутой системы, необходимо знать значения полюсов ее передаточной функции. Вопрос о переходных процессах в замкнутых системах будет рассмотрен в разделе 5.6.

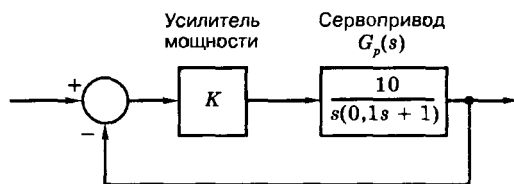


Рис. 5.13. Система к примеру 5.6

5.5.4. Неединичная обратная связь

Для системы с неединичной обратной связью вход и выход обычно измеряются в разных единицах. Как правило, выходным сигналом датчика является напряжение, поэтому сигнал, подаваемый на вход сумматора в реальной системе, тоже должен представлять собой напряжение. Выход реальной системы может измеряться, например, в миллиметрах, градусах Цельсия или угловых градусах. Следовательно, не имеет никакого смысла вычитать вольты из миллиметров. Прежде всего надо привести систему к виду с единичной обратной связью, тогда ее вход, выход и установившаяся ошибка будут измеряться в одних и тех же единицах.

В разделе 5.1 был рассмотрен метод преобразования системы с неединичной обратной связью к случаю единичной обратной связи, когда передаточная функция датчика представляла собой обычный коэффициент усиления. При вычислении установившейся ошибки мы во всех передаточных функциях полагаем $s = 0$. Поэтому в установившемся режиме на вход датчика поступает постоянный сигнал, его выход тоже будет постоянным и, следовательно, коэффициент усиления датчика определяется как

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = H_k, \quad (5-44)$$

где H_k имеет конечное и отличное от нуля значение. Таким образом, для анализа установившегося режима сохраняет силу способ приведения системы с неединичной обратной связью к структуре с единичной обратной связью, рассмотренный в разделе 5.1. Заметим, что вход $r_v(t)$ в системе с единичной обратной связью представляет собой желаемое значение выхода, поэтому на выходе сумматора мы действительно получаем ошибку системы.

На рис. 5.14 (а) изображена система с неединичной обратной связью, а на рис. 5.14 (б) — модель с единичной обратной связью, причем H_k вычисляется по формуле (5-44).

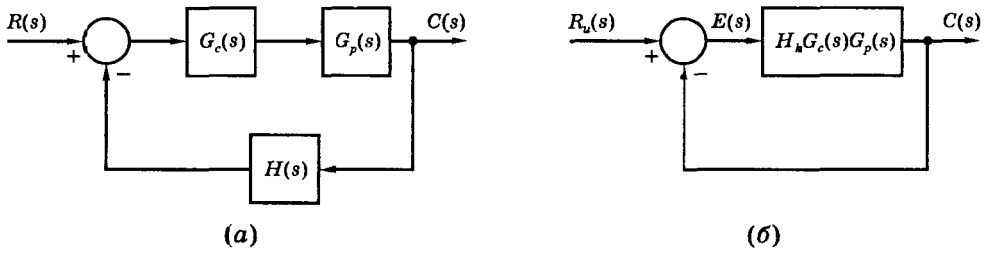


Рис. 5.14. Анализ установившегося режима системы с неединичной обратной связью

Если сравнить эту систему с изображенной на рис. 5.11 (для которой имеет силу таблица 5.1), то можно сделать вывод, что обе системы идентичны, если $G_c(s)G_p(s)$ на рис. 5.11 заменить на $H_k G_c(s)G_p(s)$, как показано на рис. 5.14 (б). Следовательно, при такой замене выражения для коэффициентов ошибки, приведенные в таблице 5.1, в случае неединичной обратной связи должны вычисляться так:

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p H, \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c G_p H, \\ K_a &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c G_p H. \end{aligned} \tag{5-45}$$

Для вычисления коэффициентов ошибки системы с неединичной обратной связью должна быть использована передаточная функция разомкнутого контура $G_c(s)G_p(s)H(s)$, а не передаточная функция прямой цепи от входа к выходу. Тип системы определяется именно этой передаточной функцией, хотя датчик и не имеет полюсов при $s = 0$. Выражения (5-45) являются более общими, т.к. в случае единичной обратной связи достаточно просто положить $H = 1$. При использовании коэффициентов вида (5-45) установившаяся ошибка имеет ту же размерность, что и выход физической системы. Все сказанное выше проиллюстрируем следующим примером.

Пример 5.7

Рассмотрим еще раз систему регулирования температуры из примера 5.1. На рис. 5.15 представлены исходная система и ее модель с единичной обратной связью [см. также рис. 5.14 (б)]. Если выбран регулятор пропорционального типа, т.е. $G_c(s) = K$, то

$$G_c(s)G_p(s)H_k = \frac{0,25K}{s + 0,1}$$

и, следовательно, система относится к типу 0. На основании (5-36) коэффициент ошибки по положению

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_p(s)H_k = 2,5K,$$

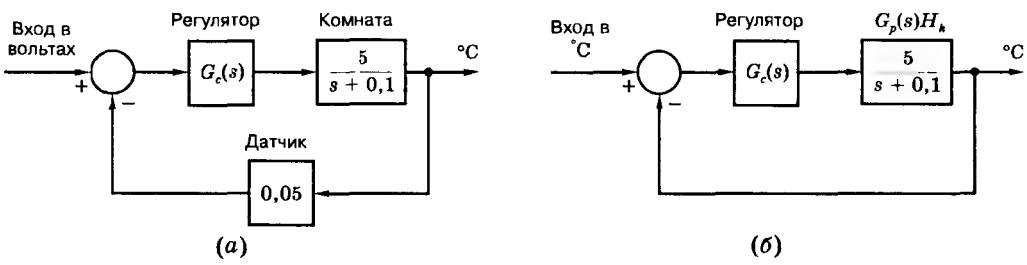


Рис. 5.15. Система к примеру 5.7

а установившаяся ошибка при постоянном входном сигнале A °C равна

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} = \frac{A}{1 + 2,5K} \text{ °C.}$$

Например, если заданное значение температуры равно 50 °C, а коэффициент усиления регулятора $K = 10$, то установившаяся ошибка будет равна $50/26 = 1,92$ °C. Следовательно, температура в комнате установится равной 48,08 °C.

Теперь предположим, что выбран ПИ-регулятор. Тогда передаточная функция

$$G_c(s)G_p(s)H_k = \left(K_p + \frac{K_I}{s} \right) \frac{0,25}{s + 0,1} = \frac{0,25(K_I + K_p s)}{s(s + 0,1)}.$$

Система относится к типу 1, и установившаяся ошибка при постоянном входном сигнале равна нулю. Даже если параметры объекта (в данном случае числа 0,25 и 0,1) будут изменяться, установившаяся ошибка все равно останется равной нулю. Отсюда вытекают две важные причины применения ПИ-регуляторов в системах управления: (1) установившаяся ошибка при постоянном входном воздействии равна нулю, и (2) эта ошибка нечувствительна к изменению параметров объекта. Заметим также, что если на вход системы подано линейное воздействие, изменяющееся с единичной скоростью, то коэффициент K_v имеет значение

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_p(s)H_k = 2,5K_I,$$

и система будет обладать установившейся ошибкой

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{0,4}{K_I}.$$

5.5.5. Ошибки, вызываемые возмущениями

Этот раздел посвящен анализу установившихся ошибок, обусловленных действующими на систему возмущениями. Строго говоря, *любой* вклад в выходную переменную системы, вносимый за счет внешних возмущений, является ошибкой. Следовательно, возмущения создают нежелательные эффекты и в идеальном случае они вообще не должны оказывать влияния на выходную переменную.

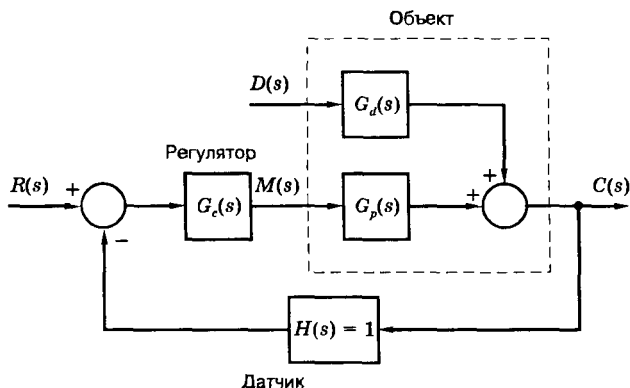
На рис. 5.16 изображена система управления с одним возмущающим воздействием. Обозначим через $T(s)$ передаточную функцию от входа $R(s)$ к выходу $C(s)$, а через $T_d(s)$ — передаточную функцию от возмущения $D(s)$ к $C(s)$. Тогда, по принципу суперпозиции:

$$C(s) = T(s)R(s) + T_d(s)D(s) = C_r(s) + C_d(s), \quad (5-46)$$

где $c_r(t)$ есть составляющая реакции системы от входного сигнала $r(t)$, а $c_d(t)$ — составляющая реакции от возмущения $d(t)$. Ошибка системы

Рис. 5.16

Замкнутая система
при наличии возмущения



$$e(t) = r(t) - c(t) = [r(t) - c_r(t)] - c_d(t) = e_r(t) + e_d(t), \quad (5-47)$$

где $e_r(t)$ — ошибка, которую мы рассматривали ранее в этой главе. Желательно, чтобы ошибка, обусловленная возмущением, $e_d(t) = -c_d(t)$, равнялась нулю. Полагая, что установившееся значение этой ошибки, обозначаемое e_{dss} , существует, вычислим его:

$$e_{dss} = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s T_d(s) D(s), \quad (5-48)$$

где

$$T_d(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}. \quad (5-49)$$

Сначала рассмотрим случай, когда возмущение представляет собой ступенчатую функцию с амплитудой B , т.е. $D(s) = B/s$. Примерами таких возмущений могут служить ветер, действующий с постоянной силой на антенну радиолокатора, или постоянная утечка тепла в системе регулирования температуры. Из (5-48) и (5-49) выразим установившуюся ошибку:

$$e_{dss} = \lim_{s \rightarrow 0} T_d(s) B = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_d(s) B}{1 + G_c(s)G_p(s)}. \quad (5-50)$$

Чтобы сделать общие выводы, необходимо знать, к какому типу относятся передаточные функции $G_p(s)$, $G_c(s)$ и $G_d(s)$. Довольно часто $G_p(s)$ и $G_d(s)$ относятся к одному и тому же типу, поскольку это передаточные функции от разных входов, но к одному выходу.

Будем считать, что все три передаточные функции, входящих в выражение (5-50), относятся к типу 0. Тогда установившаяся ошибка при ступенчатом возмущении будет равна

$$e_{dss} = \frac{G_d(0)B}{1 + G_c(0)G_p(0)}. \quad (5-51)$$

Один из возможных вариантов, когда установившаяся ошибка будет равна нулю, предполагает, что $G_c(s)$ относится к типу 1 (ПИ-регулятор), а $G_d(s)$ и $G_p(s)$ — к типу 0. В этом случае $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \infty$ и $e_{dss} = 0$. Возможны и другие комбинации типов передаточных функций,

когда установившаяся ошибка равна нулю (см. задачу 5.23).

Если возмущение является линейной функцией времени, т.е. $D(s) = B/s^2$, то установившаяся ошибка, согласно (5-48), будет равна:

$$e_{dss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_d(s)B}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_d(s)B}{s[1 + G_c(s)G_p(s)]}.$$

Например, если $G_d(s)$, $G_p(s)$ и $G_c(s)$ относятся к типу 0, то e_{dss} стремится к бесконечности. Если $G_c(s)$ соответствует типу 2, а $G_p(s)$ и $G_d(s)$ — типу 0, то $e_{dss} = 0$. Конечно, возможны и другие комбинации, дающие нулевую установившуюся ошибку (см. задачу 5.23).

Заметим, что все приведенные выше рассуждения справедливы и для случая, когда $H(s) \neq 1$, т.е. когда знаменатель $T_d(s)$ содержит член $G_c(s)G_p(s)H(s)$.

Пример 5.8

Еще раз вернемся к системе регулирования температуры, с которой мы встречались в примерах 5.1, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 и 5.7. Будем считать, что $G_p(s)$ и $G_d(s)$ относятся к типу 0, а $G_c(s)$ — к типу 1 (ПИ-регулятор). Как было получено в примере 5.5,

$$T_d(s) = \frac{-0,6s}{s^2 + (0,1 + 0,25K_p)s + 0,25K_I}.$$

Если $d(t)$ — единичная ступенчатая функция, то $D(s) = 1/s$, и из (5-48) имеем:

$$e_{dss} = \lim_{s \rightarrow 0} T_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-0,6s}{s^2 + (0,1 + 0,25K_p)s + 0,25K_I} = 0,$$

откуда еще раз вытекает преимущество ПИ-регулятора. Если возмущение имеет вид линейной функции с единичным наклоном, то $D(s) = 1/s^2$ и установившаяся ошибка будет равна

$$e_{dss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_d(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-0,6s}{s[s^2 + (0,1 + 0,25K_p)s + 0,25K_I]} = -\frac{2,4}{K_I}.$$

5.6. Переходный процесс

В разделе 5.2 мы рассмотрели вопрос об устойчивости и собственном движении системы. Было показано, что передаточную функцию замкнутой системы [см. (5-6) и (5-9)] можно представить в виде:

$$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (5-52)$$

где p_i — полюсы передаточной функции (корни характеристического уравнения). Реакция системы на вход $R(s)$ имеет вид:

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)} R(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + C_r(s), \quad (5-53)$$

где $C_r(s)$ — сумма членов разложения $C(s)$ на простые дроби, которые обусловлены полюсами $R(s)$. Обратное преобразование Лапласа этого выражения дает:

$$c(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} + c_r(t). \quad (5-54)$$

В этом выражении $c_r(t)$ есть вынужденное движение того же вида, что и вход $r(t)$. Первые n членов в (5-54) представляют собой собственное движение системы, и если последняя устойчива, то они с течением времени стремятся к нулю. Во многих случаях очень важное значение имеет характер собственного движения, называемого также *переходной составляющей* (переходным процессом).

В предположении, что система в уравнении (5-53) является устойчивой, переходная составляющая в (5-54) имеет вид:

$$\text{переходная составляющая} = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t}. \quad (5-55)$$

Характер каждого слагаемого в выражении (5-55) определяется расположением полюса p_i , а величина вносимого им вклада в переходный процесс зависит от коэффициентов k_j :

$$k_j = \frac{P(s)}{a_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s - p_i)} \cdot R(s) \Big|_{s=p_j}. \quad (5-56)$$

Таким образом, «вес» каждого члена определяется расположением всех остальных полюсов, полиномом в числителе передаточной функции (ее нулями) и входным воздействием.

Для систем высокого порядка очень трудно сделать какие-то общие выводы в отношении переходного процесса; мы можем только судить о характере каждого отдельного члена этого процесса. Каждому вещественному полюсу соответствует экспоненциальная составляющая с постоянной времени

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i} = \frac{1}{|p_i|}. \quad (5-57)$$

Знак минус здесь необходим потому, что для устойчивой системы все полюсы располагаются слева от мнимой оси на s -плоскости.

Каждой паре комплексно-сопряженных полюсов

$$p_i = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j\omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (5-58)$$

соответствует коэффициент затухания ζ_i , собственная частота ω_{ni} и постоянная времени $\tau_i = 1/\zeta_i \omega_{ni}$ (см. раздел 4.3). Если преобладает один полюс передаточной функции (называемый *доминирующим полюсом*), то переходный процесс очень близок к реакции системы первого порядка (см. раздел 4.1). Если преобладают два комплексно-сопряженных полюса (также называемые доминирующими), то переходный процесс будет очень похож на реакцию системы второго порядка (см. раздел 4.3). Для систем высокого порядка время нарастания, перерегулирование и время установления являются сложными функциями полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы (см. раздел 4.5).

5.7. Частотные характеристики замкнутой системы

В главе 4 было введено понятие частотных характеристик. В предыдущих разделах данной главы было показано, насколько важно иметь большую величину произведения $G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)$ в разомкнутой системе, чтобы она обладала малой чувствительностью к изменению параметров объекта, хорошей способностью компенсации возмущений и малым значением установившейся ошибки. Заметим, что все эти показатели определяются *характеристиками замкнутой системы*, а они, в свою очередь, зависят от ее свойств в разомкнутом состоянии.

Связь между входом и выходом системы определяется ее частотными характеристиками в замкнутом состоянии. Частотная характеристика одноконтурной системы, с которой мы имели дело в данной главе, имеет следующий вид:

$$T(j\omega) = \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)}. \quad (5-59)$$

Значение этой функции при $\omega = 0$ есть коэффициент усиления системы для постоянного входного сигнала. Этот коэффициент позволяет рассчитать установившуюся ошибку при постоянном входе. Чтобы ошибка имела размерность выходной переменной, надо выражение (5-59) умножить на H_k [см. (5-44)], тем самым приведя систему к случаю единичной обратной связи, как это было описано выше.

Если из (5-59) выразить амплитудную частотную характеристику и оценить ее вид при малых значениях ω , то отсюда можно будет судить, насколько хорошо система отслеживает медленно меняющийся входной сигнал. Если на низких частотах значение ампли-

тудной частотной характеристики близко к единице, то система будет хорошо воспроизводить сигнал, который в основном состоит из низкочастотных составляющих. По выражению (5-59) можно определить полосу пропускания замкнутой системы. Поскольку произведение времени нарастания на полосу пропускания для конкретной системы приблизительно постоянно, то чем шире полоса пропускания, тем больше быстродействие системы.

Если график амплитудной частотной характеристики замкнутой системы имеет максимум, то это указывает на наличие резонанса, т.е. переходный процесс соответствует затухающим колебаниям и протекает с перерегулированием. Таким образом, по выражению (5-59) можно составить достаточно полное представление о свойствах замкнутой системы.

Итак, основная информация, которую дает нам амплитудная частотная характеристика замкнутой системы $T(j\omega)$, сводится к следующему:

1. По значению этой характеристики при $\omega = 0$ можно определить установившуюся ошибку в случае постоянного входного сигнала. Вид характеристики в области низких частот позволяет оценить точность воспроизведения медленно меняющихся входных сигналов.
2. Полоса пропускания системы дает возможность оценить время нарастания переходной функции.
3. Наличие максимума указывает на то, что переходный процесс протекает с перерегулированием, причем чем больше максимум, тем больше и перерегулирование.

Эти свойства были рассмотрены в главе 4, а в главе 8 мы остановимся на них более подробно.

5.8. Заключение

В этой главе были рассмотрены характеристики линейных непрерывных стационарных систем управления. Цель главы заключалась в том, чтобы продемонстрировать смысл и особенности этих характеристик. Было показано, каким требованиям они должны удовлетворять при синтезе систем управления.

Прежде всего, система должна быть устойчивой. Затем мы установили, что система обязана быть относительно нечувствительной к изменению параметров объекта в процессе эксплуатации. Если система подвержена действию возмущений, то мы можем оценить степень их влияния на выходную переменную. Если к системе приложено типовое внешнее воздействие определенного вида, то несложно установить, с какой точностью оно будет отрабатываться системой в установившемся режиме. Важными показателями реакции системы на входной сигнал являются время нарастания, перерегулирование, время установления и т.д. Все эти показатели характеризуют качество переходного процесса.

Требования, предъявляемые к замкнутым системам управления, могут основываться на всех перечисленных выше характеристиках. В последующих главах мы увидим, как эти требования учитываются при синтезе систем. Некоторые требования могут противоречить друг другу, и не всегда удастся удовлетворить их одновременно. В этом случае необходимо искать компромиссное решение, чтобы каждое из противоречивых требований по возможности было выполнено с наименьшими отклонениями.

Литература

1. H.W.Bode. *Network Analysis and Feedback Design*. New York: Van Nostrand, 1945.
2. G.B.Thomas, Jr. and R.L.Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.

Задачи

5.1. На рис. 5.1 (3) изображена система регулирования скорости электродвигателя. Входной сигнал есть напряжение, соответствующее заданной скорости.

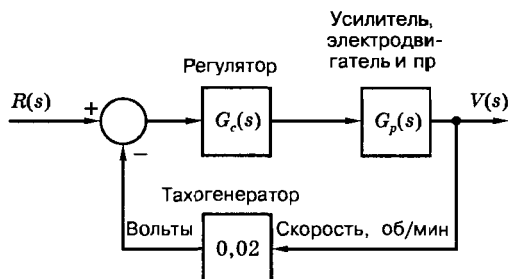
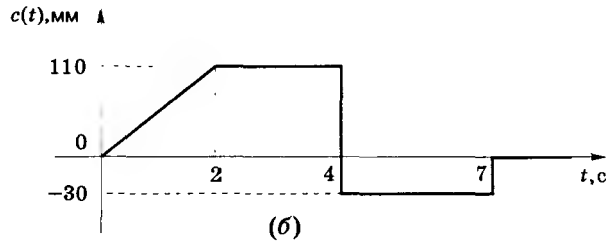
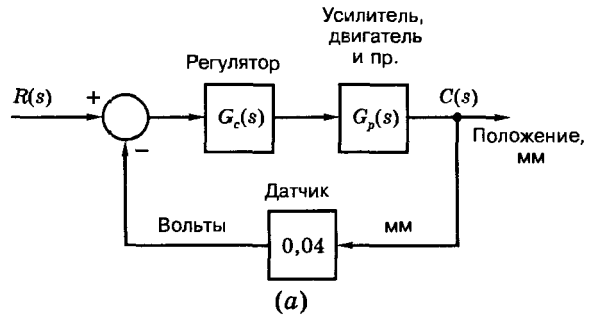


Рис. 5.1 (3)

- (а) Коэффициент усиления тахогенератора $H_k = 0,02$. В каких единицах он измеряется?
 - (б) Определите величину постоянного входного напряжения $r(t)$, соответствующую заданной скорости вращения двигателя 300 об/мин.
 - (в) Необходимо, чтобы скорость вращения двигателя нарастала по линейному закону от 0 до 500 об/мин за 20 с. После этого она скачком должна уменьшиться до 200 об/мин и далее сохранять это значение. Изобразите графически характер изменения входного задающего напряжения $r(t)$.
 - (г) Приведите структурную схему системы к случаю единичной обратной связи, чтобы вход и выход измерялись в одних и тех же единицах (об/мин).
- 5.2. В проигрывателе для компакт-диска луч лазера удерживается на дорожке диска с помощью следящей системы. структурная схема которой изображена на рис. 5.2 (3). (а). Положение луча может изменяться в диапазоне ± 200 мм, при этом выходной сигнал датчика изменяется в диапазоне ± 8 В, т.е. датчик имеет коэффициент усиления 0,04 В/мм.
- (а) Определите величину постоянного входного напряжения $r(t)$, соответствующую заданному положению +140 мм.
 - (б) Выходной сигнал системы в режиме тестирования должен изменяться так, как показано на рис. 5.2 (3), (б). Изобразите график соответствующего входного сигнала $r(t)$ в вольтах.
 - (в) Приведите структурную схему системы к случаю единичной обратной связи, чтобы вход и выход измерялись в миллиметрах.
 - (г) По схеме с единичной обратной связью проверьте вид входного сигнала, найденного в п. (б).
- 5.3. Рассмотрите систему управления на рис. 5.3 (3).
- (а) Определите, является ли объект $G_p(s)$ устойчивым.
 - (б) В системе используется обратная связь по скорости. Коэффициент усиления датчика скорости равен a . Предположим, что обратная связь по скорости отсутствует, т.е. $a = 0$. Определите, является ли при этом замкнутая система устойчивой.
 - (в) Повторите п. (б), считая, что имеется обратная связь по скорости с коэффициентом $a = 1$.
 - (г) Определите диапазон значений a , при которых система является устойчивой.

Рис. 5.2 (3)



5.4. Что вы можете сказать об устойчивости системы, если ее передаточная функция в замкнутом состоянии имеет следующий вид:

(а) $T(s) = \frac{5(s+2)}{(s+1)(s^2+s+1)}$

(б) $T(s) = \frac{5(-s+2)}{(s+1)(s^2+s+1)}$

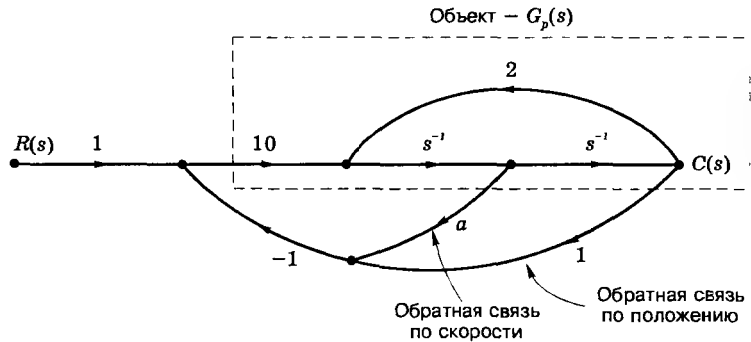
(в) $T(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+s+1)}$

(г) $T(s) = \frac{5}{(s-1)(s^2+3)}$

(д) $T(s) = \frac{(s^2+3)}{(s+1)(s^2-s+1)}$

(е) $T(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+3)}$

Рис. 5.3 (3)



5.5. Замкнутая система описывается уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

- (а) Запишите характеристическое уравнение системы.
- (б) По результату п. (а) исследуйте устойчивость системы.
- (в) С помощью MATLAB проверьте результат п. (б) двумя разными методами.

5.6. Рассмотрите модель системы регулирования температуры, изображенную на рис. 5.6 (3). Номинальные значения $K = 30$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

- (а) Определите чувствительность передаточной функции замкнутой системы к параметру K как функцию $s = j\omega$, т.е. найдите $S_K^T(j\omega)$.
- (б) Определите чувствительность передаточной функции замкнутой системы к параметру α как функцию $s = j\omega$, т.е. найдите $S_\alpha^T(j\omega)$.
- (в) Определите чувствительность передаточной функции замкнутой системы к параметру β как функцию $s = j\omega$, т.е. найдите $S_\beta^T(j\omega)$.
- (г) Вычислите значения чувствительностей (а), (б) и (в) при $s = j\omega = j0$.
- (д) Сравните три найденные чувствительности, изобразив графики $|S_K^T(j\omega)|$, $|S_\alpha^T(j\omega)|$ и $|S_\beta^T(j\omega)|$.
- (е) Определите, как повлияет на каждую чувствительность увеличение значения K .
- (ж) С помощью MATLAB проверьте построение графика $|S_K^T(j\omega)|$.

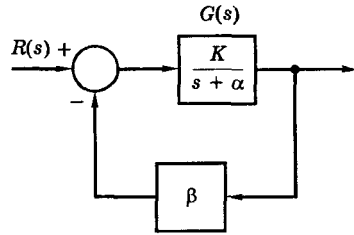


Рис. 5.6 (3)

5.7. Рассмотрите систему на рис. 5.7 (3). Номинальное значение параметра α равно 10.

- (а) При отсутствии датчика ($H = 0$) найдите чувствительность передаточной функции системы к параметру α , т.е. $S_\alpha^T(j\omega)$ в окрестности номинального значения α .
- (б) Повторите п. (а) при $H(s) = 1$.
- (в) Изобразите графически функции чувствительности (по модулю), полученные в пп. (а) и (б), в зависимости от частоты при $K = 1$. Отметьте полосы пропускания системы.
- (г) Повторите п. (в) для $K = 100$ и покажите, чем отличаются результаты: 1) в замкнутой системе по сравнению с разомкнутой; 2) в замкнутой системе с большим коэффициентом усиления по сравнению с малым коэффициентом усиления.
- (д) С помощью MATLAB проверьте графики из пп. (в) и (г).

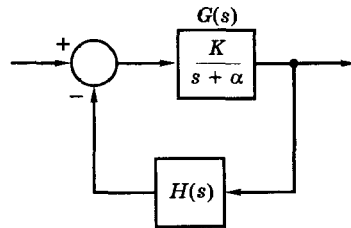


Рис. 5.7 (3)

5.8. Замкнутая система описывается уравнениями состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(5+a) & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [6 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Определите чувствительность передаточной функции $T(s) = Y(s)/U(s)$ по отношению к параметру a .

5.9. На рис. 5.9 (3) изображена система, которая, по предположению, является устойчивой.

- Считая, что $R(s) = 0$ и $D(s) \neq 0$, определите характеристическое уравнение системы.
- Считая, что $R(s) \neq 0$ и $D(s) = 0$, определите характеристическое уравнение системы.
- Если $R(s) = 0$, $D(s) = 0$, а начальные условия в объекте отличны от нуля, определите характеристическое уравнение системы.
- Полагая $D(s) = 0$, определите, какими свойствами должна обладать $G(s)$, чтобы установившаяся ошибка, вызванная линейным входным воздействием $r(t)$, изменяющимся с единичной скоростью, т.е. $R(s) = 1/s^2$, была равна нулю.
- Полагая $R(s) = 0$ и считая, что возмущение $d(t) = \text{const}$, т.е. $D(s) = 1/s$, определите, какими свойствами должна обладать $G(s)$, чтобы установившееся значение $c(t)$ было равно нулю.

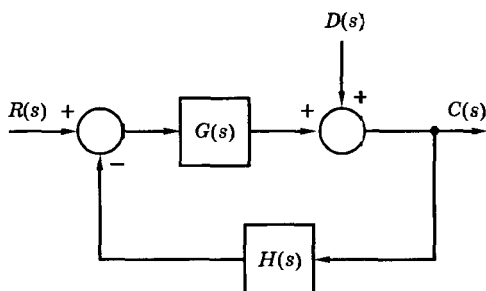


Рис. 5.9 (3)

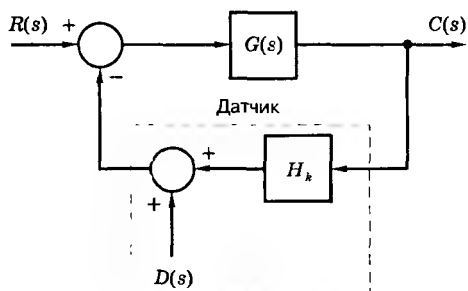


Рис. 5.10 (3)

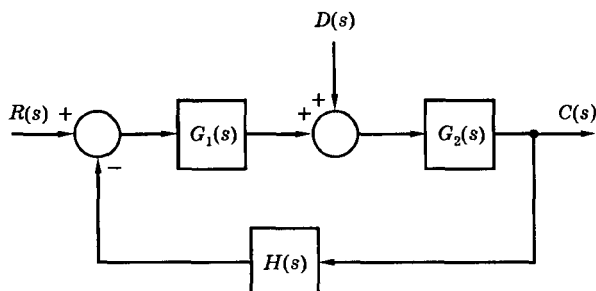
5.10. Рассмотрите систему управления, изображенную на рис. 5.10 (3). Предполагается, что в модели системы датчик является идеальным, и он представлен коэффициентом усиления H_k . Погрешности реального датчика учитываются возмущением $d(t)$, так что его выход равен сумме идеального измеренного значения $c(t)$ и возмущения. В таком виде обычно моделируются погрешности датчика.

- Выразите $C(s)$ как функцию входа системы и возмущения.
- Предположим, что $r(t) = \text{const}$, а $H_k = 1$. Каким свойством должна обладать $G(s)$, чтобы на нулевой частоте коэффициент передачи от $r(t)$ к $c(t)$ был равен единице?
- Пусть $G(s)$ обладает свойством, найденным в п. (б), а $H_k = 1$. В предположении, что погрешность датчика учтена в модели в виде постоянного сигнала $d(t)$, найдите коэффициент передачи на нулевой частоте от $d(t)$ к $c(t)$. Сделайте отсюда вывод, что датчик должен обладать как можно более высокой точностью.

5.11. Пусть в системе на рис. 5.11 (3) $G_1(s) = 10K/(5s + 1)$, $G_2(s) = 1$ и $H(s) = 1$.

- Предположим, что $d(t) = 5u(t)$. Найдите значение K , при котором в установившемся режиме составляющая сигнала $c(t)$, обусловленная возмущением, будет ограничена величиной 1% от значения $d(t)$.

Рис. 5.11 (3)



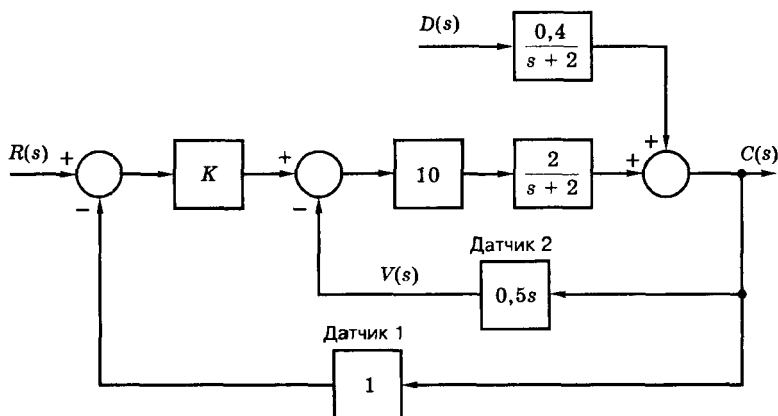
- (б) Если $r(t) = 10u(t)$, а K имеет значение, найденное в п. (а), определите установившуюся ошибку системы, обусловленную сигналом $r(t)$. Решения пп. (а) и (б) основаны на принципе суперпозиции.

5.12. В пп. (а) и (б) задачи 5.11 установившаяся ошибка, обусловленная обработкой сигнала $r(t)$, и ошибка от возмущения имеют одинаковые значения. Всегда ли это верно? Обоснуйте ваш ответ

5.13. Рассмотрите систему регулирования температуры, представленную на рис. 5.13 (3). В системе использованы два датчика, измеряющих температуру и скорость ее изменения. В разделе 9.10 показано, что такая комбинация датчиков соответствует пропорционально-дифференциальному (ПД) регулятору. Синтез такой системы заключается в выборе значения K , удовлетворяющего определенному критерию качества.

- (а) Выразите выходную переменную $v(t)$ датчика 2 в зависимости от $c(t)$.
 (б) Пусть возмущение $d(t)$ является постоянным. Найдите такое значение K , при котором в установившемся режиме вклад возмущения в сигнал $c(t)$, т.е. ошибка системы из-за возмущения, не превышала бы 1% от $d(t)$.
 (в) Определите, к какому типу относится данная система, если ее ошибка $e(t) = r(t) - c(t)$.
 (г) Какое влияние оказывает датчик 2 на установившуюся ошибку системы? Внутренний контур используется для улучшения вида переходного процесса.
 (д) Каков должен быть тип системы, если входной сигнал представляет собой линейную функцию времени?

Рис. 5.13 (3)



5.14. Дана система, изображенная на рис. 5.14 (3). Для каждого из приведенных ниже случаев определите установившуюся ошибку при (1) единичном ступенчатом входном воздействии и (2) при линейном входном воздействии, изменяющемся с единичной скоростью. Предполагается, что в каждом случае замкнутая система устойчива.

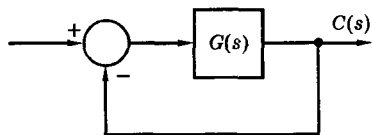


Рис. 5.14 (3)

- (а) $G_a(s) = \frac{10}{(s+1)(s+3)}$.
 (б) $G_b(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+6)}$.
 (в) $G_c(s) = \frac{7(s+2)}{s^2(s+6)}$.

$$(г) \quad G_c(s) = \frac{6s^2 + 2s + 10}{s(s^2 + 4)}.$$

5.15. Рассмотрите систему регулирования напряжения генератора, изображенную на рис. 5.15 (3). Во всех пунктах задания считается, что система устойчива, а вход и выход измеряются в вольтах.

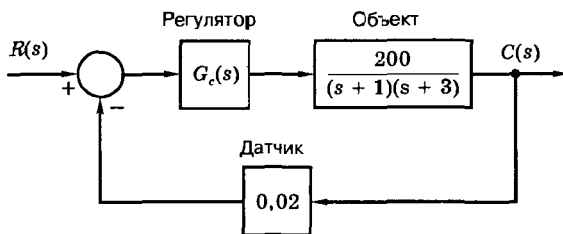
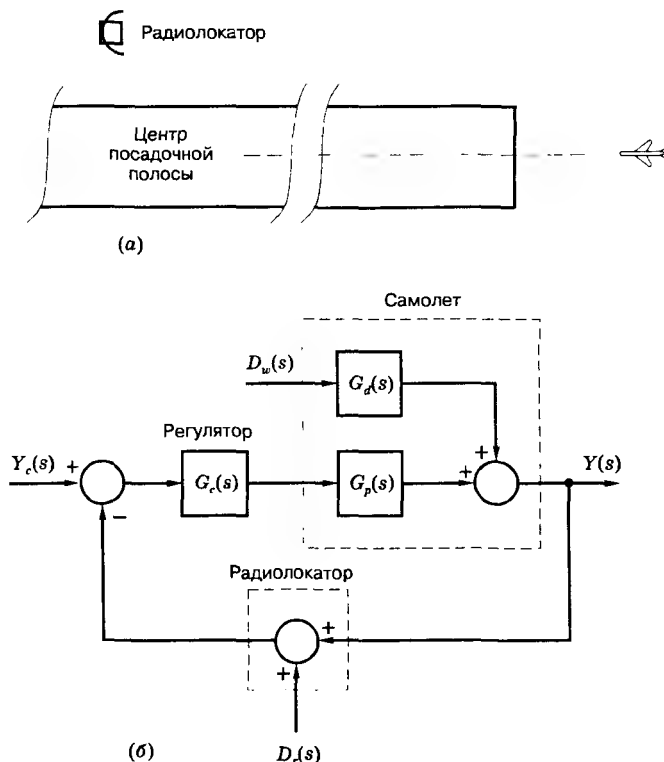


Рис. 5.15 (3)

- (а) При $G_c(s) = 1$ определите установившуюся ошибку в единицах выходного напряжения, считая, что система приведена к случаю единичной обратной связи, а на ее вход подано (1) единичное ступенчатое воздействие или (2) линейное воздействие с единичной скоростью.
- (б) В системе используется ПИ-регулятор $G_c(s) = 1,0 + 0,1/s$. Повторите задание п. (а).
- (в) В системе используется ПД-регулятор $G_c(s) = 1,0 + 0,3s$. Повторите задание п. (а).
- (г) В п. (б) интегрирование осуществляется за счет члена $0,1/s$. Как влияет наличие этого члена в передаточной функции регулятора на установившуюся ошибку? Почему?
- (д) В п. (в) дифференцирование обусловлено наличием члена $0,3s$. Какое влияние оказывает этот член передаточной функции регулятора на установившуюся ошибку? Почему?
- (е) Какому заданному значению выходного напряжения в данной задаче соответствует подача на вход единичного ступенчатого воздействия?
- 5.16. Допустим, что в системе на рис. 5.15 (3) используется регулятор пропорционального типа, т.е. $G_c(s) = K$.
- (а) Найдите составляющие переходной функции при $K = 0,025$.
- (б) Найдите составляющие переходной функции при $K = 0,25$.
- (в) Определите значение K , при котором переходная функция будет иметь минимальное время установления и не будет иметь перерегулирования.
- (г) С помощью MATLAB проверьте все вычисления.
- 5.17. На рис. 5.17 (3) изображена структурная схема системы управления горизонтальным положением самолета при автоматической посадке. Вход $Y_c(s)$ соответствует заданному горизонтальному положению, а выход $Y(s)$ — действительному положению самолета. Положение самолета определяется с помощью радиолокатора, смоделированного в виде единичного коэффициента усиления. Погрешность радиолокатора учтена в виде аддитивного сигнала шума $D_r(s)$. Сигнал $D_w(s)$ представляет собой возмущающее воздействие, оказываемое на самолет силой ветра.
- (а) Во время приземления самолету предписано двигаться строго по центру посадочной полосы, следовательно, вход $Y_c(s)$ постоянен. Считая, что все возмущения отсутствуют, а система устойчива, определите вид $G_c(s)G_p(s)$, гарантирующий в установившемся режиме движение самолета точно по центру посадочной полосы.
- (б) В действительной модели самолета каждая из передаточных функций, $G_p(s)$ и $G_d(s)$, имеет два полюса при $s = 0$. Следовательно, если регулятор не имеет полюсов при $s = 0$, система относится к типу 2. Предположим, что ветер дует с постоянной силой, т.е. $d(t) = \text{const}$. По условиям синтеза системы требуется, чтобы в установившемся режиме влияние ветра на положение самолета сводилось к нулю. Какими свойствами должен обладать регулятор $G_c(s)$, чтобы выполнить это требование?

Рис. 5.17 (3)



(в) По результатам пп. (а) и (б), к какому типу относится данная система управления? Это один из редких случаев, когда тип системы должен быть высоким.

5.18. В предыдущей задаче на рис. 5.17 (3) показаны два возмущения — одно учитывает силу ветра, $D_w(s)$, а второе шум (погрешность) радиолокатора, $D_r(s)$.

(а) Запишите выражение $Y(s)$ с учетом всех входных сигналов.

(б) Определите, каким условиям должна удовлетворять передаточная функция разомкнутой системы $G_c(s)G_p(s)$, чтобы как можно сильнее ослабить влияние ветра.

(в) А каким должен быть вид $G_c(s)G_p(s)$, чтобы как можно сильнее ослабить влияние погрешности радиолокатора?

(г) Обратите внимание, что нельзя одновременно ослабить влияние обоих возмущений, т.е. условия пп. (б) и (в) вступают в противоречие. Что бы вы предприняли в качестве инженера для решения этой задачи?

5.19. Даны следующие передаточные функции замкнутой системы. В каждом случае приведите члены, присутствующие в собственном движении системы. Отметьте все члены, указывающие на то, что система не является устойчивой, и все члены, указывающие на то, что система неустойчива.

(а) $T_a(s) = \frac{10}{(s+1)(s-2)}.$

(б) $T_b(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+6)}.$

(в) $T_v(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+6)}.$

$$(г) \quad T_z(s) = \frac{6s^2 + 2s + 10}{s(s^2 + 3)}.$$

$$(д) \quad T_o(s) = \frac{5(s + 2)}{s(s + 6)^2}.$$

$$(е) \quad T_e(s) = \frac{6s^2 + 2s + 10}{s(s^2 + 3)^2}.$$

5.20. Проанализируйте передаточные функции замкнутой системы, приведенные в задаче 5.19.

- (а) Укажите передаточные функции, соответствующие нахождению системы на границе устойчивости.
- (б) Для передаточных функций, полученных в п. (а), приведите ограниченный входной сигнал, при котором выходной сигнал будет неограниченным.

5.21. Система с единичной обратной связью на рис. 5.14 (3) имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{4(s + 3)}{s^2 - 2s + 10}.$$

- (а) Рассмотрите разомкнутую систему (с разрывом цепи обратной связи). Запишите характеристическое уравнение системы и найдите его корни. Что вы можете сказать об устойчивости этой системы?
- (б) Теперь рассмотрите замкнутую систему. Запишите ее характеристическое уравнение и найдите корни. Что вы можете сказать об устойчивости замкнутой системы?
- (в) Повторите пп. (а) и (б) для системы с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{4(s - 3)}{s^2 + 2s + 10}.$$

Обратите внимание, что одна система неустойчива в разомкнутом состоянии и устойчива в замкнутом, а другая — наоборот.

- (г) С помощью SIMULINK получите переходные функции замкнутых систем и подтвердите результаты предыдущих исследований.
- 5.22. (а) Рассмотрите замкнутую систему на рис. 5.14 (3), причем передаточная функция $G(s) = 10/(s^2 + 4s - 6)$. Кроме того, предположите, что в цепи обратной связи находится датчик с коэффициентом усиления H_k . Запишите характеристическое уравнение системы и определите, при каких значениях H_k система будет устойчивой.
- (б) Задайте значение H_k , равное нижней границе диапазона, найденного в п. (а). Запишите все члены, которые присутствуют в реакции этой системы.
 - (в) С помощью SIMULINK проверьте наличие члена из п. (б), не являющегося сходящимся.
- 5.23. Проанализируйте установившуюся ошибку, вызванную возмущением и определяемую выражением (5-48). Предположите, что передаточные функции на рис. 5.16 имеют следующий вид:

$$G_c(s) = \frac{1}{s^{N_c}} G_{c1}(s); \quad G_p(s) = \frac{1}{s^N} G_{p1}(s); \quad G_d(s) = \frac{1}{s^N} G_{d1}(s).$$

Иначе говоря, регулятор $G_c(s)$ относится к типу N_c , а $G_p(s)$ и $G_d(s)$ соответствуют типу N .

- (а) По условиям синтеза требуется, чтобы при единичном ступенчатом возмущении, т.е. при $D(s) = 1/s$, установившаяся ошибка равнялась нулю. Какими должны быть N_c и N , чтобы выполнить это требование?
- (б) Повторите п. (а), если возмущение имеет вид линейной функции с единичной скоростью, т.е. $D(s) = 1/s^2$, а установившаяся ошибка также должна равняться нулю.

6. Анализ устойчивости

Эта глава посвящена исследованию устойчивости линейных непрерывных стационарных систем управления. Как уже отмечалось в главе 5, к таким системам применимо понятие устойчивости типа «ограниченный вход — ограниченный выход»:

Система является устойчивой, если при *любом* ограниченном входном сигнале выходной сигнал также является ограниченным во все моменты времени.

Это определение предполагает, что все полюсы передаточной функции замкнутой системы (все корни ее характеристического уравнения) должны располагаться в левой половине комплексной плоскости. Это свойство было доказано в разделе 5.2. Таким образом, любой метод анализа устойчивости подразумевает определение того, имеет ли передаточная функция замкнутой системы полюсы на мнимой оси или в правой половине s -плоскости. Напомним, что система находится на *границе устойчивости*, если все ее полюсы находятся в левой половине комплексной плоскости, за исключением простых полюсов на мнимой оси.

Первый метод анализа устойчивости, который мы рассмотрим, — критерий Рауса-Гурвица, позволяет определить, не находится ли какой-либо корень характеристического уравнения замкнутой системы вне левой половины комплексной плоскости. Однако этот метод не позволяет указать точное расположение корней. Второй метод предполагает вычисление точного расположения корней. Для систем первого и второго порядка это сделать несложно, т.е. аналитически. Для систем более высокого порядка уже нельзя обойтись без цифрового компьютера. Третий метод заключается в имитационном моделировании. Он, кстати, применим по отношению к любым системам, а к нелинейным системам в особенности. Устойчивость линейных стационарных систем можно также исследовать методом корневого годографа, который рассматривается в главе 7, а также с помощью критерия Найквиста, излагаемого в главе 8.

Все эти методы основаны на использовании *модели* системы. *Единственным* методом, который наверняка даст ответ на вопрос об устойчивости системы, является испытание системы в рабочих условиях.

Прежде чем излагать общие методы анализа устойчивости, рассмотрим некоторые полезные свойства алгебраических полиномов. При этом *всегда* будем считать, что коэффициенты полиномов являются вещественными. Сначала рассмотрим полином второго порядка

$$Q_2(s) = s^2 + a_1s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2 \quad (6-1)$$

и полином третьего порядка

$$\begin{aligned} Q_3(s) &= s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = \\ &= [s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2](s - p_3) = \\ &= s^3 - (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)s - p_1p_2p_3. \end{aligned} \quad (6-2)$$

Обобщая эти действия применительно к полиному n -го порядка

$$Q_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (6-3)$$

мы обнаруживаем, что его коэффициенты связаны с корнями полинома следующим образом:

a_{n-1} = сумме всех корней, взятых со знаком минус,

a_{n-2} = сумме произведений всех возможных комбинаций корней, взятых по два,

a_{n-3} = сумме произведений всех возможных комбинаций корней, взятых по три, со знаком минус,

.

.

.

$a_0 = (-1)^n$, умноженной на произведение всех корней.

Предположим, что все корни полинома вещественны и расположены в левой полуплоскости. Тогда все p_i в выражениях (6-1) и (6-2) являются вещественными и отрицательными. Следовательно, все коэффициенты полинома положительны; это же справедливо и для полинома общего вида (6-3). Какой-либо коэффициент может быть отрицательным только в единственном случае — когда по крайней мере один корень расположен в правой полуплоскости. Заметим также, что если все корни находятся в левой полуплоскости, то ни один из коэффициентов не может быть равен нулю.

Если среди корней полиномов имеются комплексные, то они должны образовывать комплексно-сопряженные пары, т.к. коэффициенты полиномов — вещественные. Тогда, в соответствии с правилами формирования коэффициентов полиномов, все мнимые части произведений корней будут сокращаться. Следовательно, если все корни расположены в левой полуплоскости, то все коэффициенты полинома (6-3) будут положительны. И наоборот, если не все коэффициенты полинома (6-3) положительны, то найдется по крайней мере один корень, который не расположен в левой полуплоскости (т.е. находится в правой полуплоскости или на мнимой оси).

Итак, в отношении полинома общего вида (6-3) можно сделать следующие выводы:

1. Если какой-либо коэффициент a_i равен нулю, то *не все* корни находятся в левой полуплоскости.
2. Если какой-либо коэффициент a_i является отрицательным, то *по крайней мере один корень* расположен в правой полуплоскости.

Пример 6.1

Все коэффициенты полинома

$$Q(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8$$

положительны. Корни полинома имеют значения

$$-2 \text{ и } \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{15}}{2},$$

т.е. два корня из трех находятся в правой полуплоскости. Таким образом, мы видим, что утверждение, обратное выводу 2, не имеет силы; если все коэффициенты полинома положительны, корни не обязательно расположены в левой полуплоскости. Корни данного полинома можно найти с помощью простой программы MATLAB:

```
p = [1 1 2 8];
```

```
r = roots(p)
```

6.1. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Критерий Рауса-Гурвица используется при анализе устойчивости линейных стационарных систем. Он позволяет аналитически определить, все ли корни полинома имеют отрицательные действительные части, а если нет, то сколько корней имеют положительную действительную часть. Критерий имеет дело с алгебраическим полиномом в левой части характеристического уравнения системы. Он не может применяться в случаях, когда система содержит идеальное запаздывание (эта ситуация будет рассмотрена позже).

Критерий Рауса-Гурвица применяется к полиному вида

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (6-4)$$

где, без потери общности, мы предполагаем $a_0 \neq 0$. В противном случае полином можно представить как произведение s в некоторой степени на полином, в котором $a_0 \neq 0$. Степень переменной s указывает на число корней, расположенных в начале координат; следовательно, критерий Рауса-Гурвица должен быть применен только к последнему полиному. Везде в дальнейшем мы будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Первый этап заключается в составлении так называемой таблицы Рауса, в которой первые две строки образованы коэффициентами полинома (6-4):

$$\begin{array}{c|ccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ s^2 & k_1 & k_2 & & & \\ s^1 & l_1 & & & & \\ s^0 & m_1 & & & & \end{array}$$

Столбец, содержащий степени переменной s , введен исключительно ради удобства. Строка с коэффициентами b вычисляется непосредственно по двум строкам, расположенным над ней, строка с коэффициентами c — по двум предшествующим строкам, и т.д. Коэффициенты таблицы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, & b_2 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \dots \\ c_1 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, & c_2 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \dots \end{aligned} \quad (6-5)$$

и т.д. Обратите внимание, что определитель в выражении для i -го коэффициента строки образуется из первого и $(i+1)$ -го столбцов двух предшествующих строк.

В качестве примера приведем таблицу Рауса для полинома четвертого порядка (каждый элемент таблицы обозначен символом x):

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & x & x & x \\
 s^3 & x & x & \\
 s^2 & x & x & \\
 s^1 & x & & \\
 s^0 & x & &
 \end{array}$$

В общем случае две последних строки таблицы будут иметь по одному элементу, следующие две строки, расположенные выше — по два элемента, две строки еще выше — по три элемента и т.д.

Критерий Рауса-Гурвица формулируется следующим образом:

Число корней полинома, расположенных в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Пример 6.2

Рассмотрим еще раз полином, приведенный в примере 6.1:

$$Q(s) = (s + 2)(s^2 - s - 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8.$$

Таблица Рауса имеет вид:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 2 \\
 s^2 & 1 & 8 \\
 s^1 & -6 & \\
 s^0 & 8 &
 \end{array}
 ,$$

$$\text{где } h_1 = -\frac{1}{1} \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{array} \right| = -6, \quad a_1 = -\frac{1}{6} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ -6 & 0 \end{array} \right| = 8.$$

Поскольку в первом столбце происходит две перемены знака (с 1 до -6 и с -6 до 8), то два корня полинома расположены в правой полуплоскости (это было показано в примере 6.1).

Этот пример является иллюстрацией применения критерия Рауса-Гурвица. Заметим, однако, что он позволяет лишь судить об устойчивости системы и совсем не дает ответа на вопрос о расположении корней характеристического уравнения. Следовательно, с помощью этого критерия мы не можем получить информацию о переходном процессе или о поведении системы в установившемся режиме. Для этого нужны дополнительные методы анализа, и мы рассмотрим их в главах 7 и 8.

Из выражений для определения элементов таблицы Рауса (6-5) видно, что таблица не может быть заполнена, если первый элемент в строке равен нулю. В этом случае вычисление элементов следующей строки связано с делением на ноль. Учитывая возможность данной ситуации, в практическом применении критерия следует выделить три случая.

6.1.1. Случай 1

В этом случае ни один из элементов первого столбца таблицы Рауса не равен нулю. Такая ситуация только что была рассмотрена выше, и поскольку никаких проблем с вычислениями здесь не возникает, мы не будем на этом останавливаться.

6.1.2. Случай 2

В этом случае первый элемент в строке равен нулю, а из остальных элементов той же строки по крайней мере один отличен от нуля. Тогда первый элемент строки, который равен

нулю, заменяется на малую величину ϵ (знак ее не имеет особого значения). Вычисления продолжаются, но теперь некоторые элементы таблицы будут зависеть от ϵ . После того, как таблица составлена, знаки элементов первого столбца определяются путем устремления ϵ к нулю. Число корней полинома, расположенных в правой полуплоскости, как и ранее, равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса. Поясним этот случай на примере.

Пример 6.3

Рассмотрим следующий полином:

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10.$$

Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \epsilon & 6 & \\ s^2 & -\frac{12}{\epsilon} & 10 & \\ s^1 & 6 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array},$$

где

$$b_1 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 6,$$

$$c_1 = -\frac{1}{\epsilon} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \epsilon & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\epsilon} (12 - 4\epsilon) = -\frac{12}{\epsilon},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\epsilon} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \epsilon & 0 \end{vmatrix} = 10,$$

$$d_1 = \frac{\epsilon}{12} \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{12} & 6 \\ -\frac{12}{\epsilon} & 10 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon}{12} \left[10\epsilon + 6 \left(\frac{12}{\epsilon} \right) \right] = 6, \quad e_1 = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -\frac{12}{\epsilon} & 10 \\ \frac{\epsilon}{6} & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

При вычислениях операция перехода к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ выполнялась сразу в нужных местах, не дожидаясь пока вся таблица будет составлена. Это значительно упрощает вычисления и окончательный вид таблицы, не влияя на конечный результат. Из таблицы мы видим, что в первом столбце происходит две перемены знака независимо от того, положительно или отрицательно значение ϵ . Следовательно, система, подпадающая под случай 2, всегда будет неустойчива.

Результаты этого примера можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
p = [1 2 2 4 11 10];
```

```
r = roots(p)
```

```
results: r 0.895 ± 1.4561i -1.2407 ± 1.0375i -1.3087
```

Обратите внимание, что в приведенном выше примере последний элемент каждой строки, обозначенной четной степенью переменной s , всегда один и тот же (это 10). Нелегко показать, что это свойство имеет общий характер (см. задачу 6.15).

Сделаем одно важное замечание, которое проиллюстрируем на примере полинома второго порядка. Если в полиноме (6-1) переменную s заменить на $1/x$, то получим:

$$Q(1/x) = Q(s)|_{s=1/x} = \left(\frac{1}{x} - p_1 \right) \left(\frac{1}{x} - p_2 \right) = p_1 p_2 x^{-2} \left(x - \frac{1}{p_1} \right) \left(x - \frac{1}{p_2} \right),$$

т.е. корни $Q(1/x)$ обратны корням $Q(s)$. Следовательно, замена переменной не изменяет принадлежности корней к левой или правой полуплоскости. Кроме того, в результате заме-

ны переменной изменяется порядок индексации коэффициентов полинома:

$$Q(1/x) = Q(s)|_{s=1/x} = \frac{1}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0 = x^{-2}(a_0x^2 + a_1x + 1).$$

В общем случае, если $Q(s)$ соответствует случаю 2, то $Q(1/x)$ будет относиться к случаю 1, а поскольку, как было сказано, на устойчивости это не отражается, то критерий Рауса-Гурвица может быть применен к полиному $Q(1/x)$. Этот прием будет использован в задаче 6.4, повторяющей условия примера 6.3.

6.1.3. Случай 3

В данном случае все элементы строки в таблице Рауса равны нулю. Прием, который был использован в случае 2, уже неприемлем. Приведем простой пример. Пусть

$$Q(s) = s^2 + 1.$$

В этой системе корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси, т.е. система находится на границе устойчивости. Таблица Рауса имеет вид:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 0 & \\ s^0 & & \end{array},$$

и строка, соответствующая s^1 , не содержит ненулевых элементов. Из-за того, что в первом столбце присутствует нулевой элемент, таблица не может быть заполнена. Рассмотрим второй пример:

$$Q(s) = (s + 1)(s^2 + 2) = s^3 + s^2 + 2s + 2.$$

Таблица Рауса имеет вид:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ s^1 & 0 & \\ s^0 & & \end{array}.$$

И снова, строка s^1 не содержит ненулевых элементов, и заполнение таблицы преждевременно обрывается.

В случае 3 полином может быть разложен на множители, один из которых содержит только четные степени переменной s , а также ее нулевую степень. Такой множитель называется *дополнительным полиномом*, и в каждом из приведенных выше примеров его наличие очевидно. Коэффициенты дополнительного полинома всегда будут элементами строки, расположенной непосредственно над строкой нулевых элементов. Наивысший показатель степени дополнительного полинома указывает на строку, в которой будут находиться эти элементы. В первом примере строка, расположенная непосредственно над нулевой строкой, — это строка s^2 с элементами (1, 1). Следовательно, дополнительный полином

$$Q_a(s) = s^2 + 1.$$

Во втором примере нулевые элементы содержит строка s^1 , а в строке s^2 находятся элементы (1, 2). Следовательно, дополнительный полином

$$Q_a(s) = s^2 + 2.$$

Полиномы, относящиеся к случаю 3, можно исследовать двумя разными способами. Во-первых, если найден дополнительный полином, его можно выделить из характеристического уравнения как сомножитель и вместе с оставшимся полиномом исследовать раздельно. Однако, если дополнительный полином имеет высокий порядок, то применение к нему критерия Рауса-Гурвица может натолкнуться на определенные трудности; мы убедемся в этом в одном из следующих примеров. Если же дополнительный полином имеет невысокий порядок, то его корни могут быть найдены аналитически.

В данной книге излагается второй метод анализа полиномов, относящихся к случаю 3. Предположим, что в таблице Рауса нули появляются в строке, соответствующей s' . Тогда дополнительный полином надо продифференцировать по s , и коэффициентами полученного полинома заменить нули в строке s' . После этого заполнение таблицы производится как и в случае 1. Проиллюстрируем это на примере, после чего сделаем соответствующие выводы.

Пример 6.4

Рассмотрим полином

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 2.$$

Составим таблицу Рауса:

s^4	1	3	2	
s^3	1	2		$b_1 = -(2 - 3) = 1$
s^2	1	2		$b_2 = -(0 - 2) = 2$
s^1	0	2		$c_1 = -(2 - 2) = 0$
s^0	2			$d_1 = -(1/2)(0 - 4) = 2$

Поскольку строка s^1 не содержит ненулевых элементов, запишем дополнительный полином на основании строки s^2 :

$$Q_a(s) = s^2 + 2.$$

Тогда

$$\frac{dQ_a(s)}{ds} = 2s.$$

Ноль в строке s^1 заменим на коэффициент 2 и завершим заполнение таблицы.

Данный пример показывает, как с помощью производной от дополнительного полинома можно заполнить таблицу Рауса. Полученный результат интерпретируется обычным способом, т.е. полином не имеет корней в правой полуплоскости. Однако дополнительный полином имеет корни на мнимой оси, и, следовательно, система находится на границе устойчивости.

Корни полинома, содержащего четные степени s , образуют пары, причем их модули одинаковы, а знаки противоположны. Следовательно, они могут быть чисто мнимыми, как показано на рис. 6.1 (а), чисто вещественными [рис. 6.1 (б)] или комплексными [рис. 6.1 (в)]. Поскольку комплексные корни появляются сопряженными парами, то такие корни «четного» полинома должны образовывать четверки, как показано на рис. 6.1 (г). Такие корни обладают центральной симметрией, т.е. они располагаются симметрично как относительно действительной, так и относительно мнимой оси. В случаях рис. 6.1 (б) и 6.1 (в) таблица Рауса указывает на наличие корней с положительной действительной частью. Если в таблице появляется нулевая строка, но не происходит изменений знака в первом столбце, то это указывает на наличие корней на мнимой оси. Таким образом, в лю-

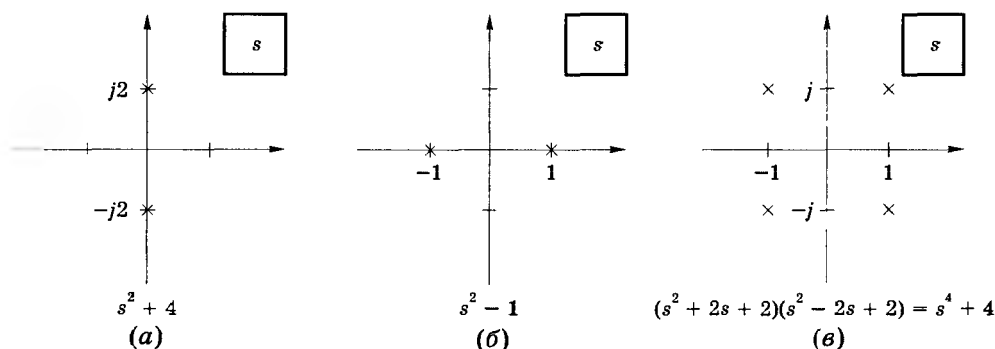


Рис. 6.1. Некоторые «четные» полиномы

бом случае, когда можно выделить дополнительный полином (в таблице Рауса появляется нулевая строка), это является признаком неустойчивости системы. Некоторые проблемы, возникающие в случаях 2 и 3, иллюстрируются следующими примерами.

Пример 6.5

Рассмотрим полином, соответствующий рис. 6.1 (в):

$$Q(s) = s^4 + 4.$$

Вспомним из главы 2, что реальная физическая система не может иметь такого характеристического полинома, поэтому мы взяли его лишь с целью поупражняться. Таблица Рауса начинается с двух строк:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array},$$

и мы сразу же получаем нулевую строку. Дополнительный полином и его производная равны:

$$Q_d(s) = s^4 + 4, \quad \frac{dQ_d(s)}{ds} = 4s^3.$$

Следовательно, таблица принимает вид:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & \emptyset & 0 & \\ s^2 & \emptyset \epsilon & 2 & \\ s^1 & -\frac{16}{\epsilon} & & \\ s^0 & 4 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} b_1 = -(\frac{1}{4})(0 - 0) = 0 \\ b_2 = -(\frac{1}{4})(0 - 16) = 4 \\ c_1 = -(\frac{1}{\epsilon})(16 - 0) = -\frac{16}{\epsilon} \\ d_1 = -(-\frac{16}{\epsilon})[0 + 4(\frac{1}{\epsilon})] = 4. \end{array}$$

Строка s^2 содержит ненулевой элемент, а ее первый элемент равен нулю, поэтому он заменяется на малую величину ϵ . В первом столбце таблицы дважды происходит перемена знака, что указывает на наличие двух корней с положительной действительной частью. Это полностью согласуется с рис. 6.1 (в).

Мы видим, что рассмотренный полином можно отнести к обоим случаям, 2 и 3. Строка нулей в таблице говорит о возможности наличия корней на мнимой оси, но в данном случае это не так. Поэтому всегда необходимо постараться выделить дополнительный полином, чтобы выяснить, имеются ли чисто мнимые корни.

Заканчивая рассмотрение случая 3, отметим, что если система находится на границе устойчивости, то дополнительный полином будет определять частоту колебаний систе-

мы. Это очевидно из рис. 6.1 (а), где корни этого полинома представляют собой полксы передаточной функции замкнутой системы, расположенные на мнимой оси.

Критерий Рауса-Гурвица используется не только как инструмент анализа устойчивости систем. Он может оказаться полезным также при *синтезе* систем управления, как это будет показано в двух следующих примерах.

Пример 6.6

Воспользуемся критерием Рауса-Гурвица для решения простой задачи синтеза системы управления с пропорциональным регулятором. Структурная схема этой системы изображена на рис. 6.2. Система относится к типу 0 (см. раздел 5.5), и установившаяся ошибка при единичном ступенчатом воздействии, на основании (5-35), равна

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K},$$

где коэффициент ошибки по положению

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2K}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = K.$$

Предположим, что установившаяся ошибка по условиям синтеза не должна превышать 2% от величины входного сигнала. Тогда

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K} < \frac{1}{50},$$

т.е. K должно быть больше 49. Вычисление установившейся ошибки можно вести только в предположении, что система устойчива. Таким образом, мы должны быть уверены, что при $K > 49$ система является устойчивой. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{2K}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = 0,$$

или

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + 2K = 0.$$

Составим таблицу Рауса для этого полинома:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 5 & b_1 = -\frac{1}{4}(2 + 2K - 20) \\ s^2 & 4 & 2 + 2K & \\ s^1 & \frac{18 - 2K}{4} & & \Rightarrow K < 9 \\ s^0 & 2 + 2K & & \Rightarrow K > -1 \end{array}$$

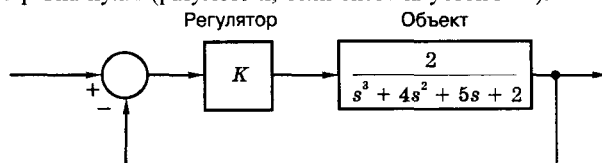
Таким образом, мы видим, что система будет устойчива только в диапазоне значений K от -1 до 9. С помощью пропорционального регулятора нам не удастся выполнить требуемое ограничение на величину установившейся ошибки. Выходом из положения служит использование ПИ-регулятора с передаточной функцией

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s},$$

за счет чего система изменит свой тип с 0 на 1. В данном случае установившаяся ошибка при постоянном входном сигнале будет равна нулю (разумеется, если система устойчива).

Рис. 6.2

Система к примеру 6.6



Пример 6.7

Продолжим решение задачи синтеза, начатое в примере 6.6. Используем в системе вместо пропорционального регулятора ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}.$$

Характеристическое уравнение системы примет вид:

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{2(K_p s + K_I)}{s(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} = 0,$$

или

$$Q(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2 + 2K_p)s + 2K_I = 0.$$

Составим таблицу Рауса для этого полинома:

$$\begin{array}{l|ll} s^4 & 1 & 5 & 2K_I \\ s^3 & 4 & 2 + 2K_p & \\ s^2 & \frac{18 - 2K_p}{4} & 2K_I & \Rightarrow K_p < 9 \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & 2K_I & & \Rightarrow K_I > 0, \end{array}$$

где

$$c_1 = -\frac{4}{18 - 2K_p} \left[8K_I - \frac{(2 + 2K_p)(18 - 2K_p)}{4} \right] = \frac{4}{18 - 2K_p} [(1 + K_p)(9 - K_p) - 8K_I].$$

Из строки для s^2 мы видим, что для устойчивости системы должно выполняться неравенство $K_p < 9$. Выберем $K_p = 3$ и получим ограничение на коэффициент K_I . При $K_p = 3$ элемент c_1 имеет значение

$$c_1 = \frac{24 - 8K_I}{3}.$$

Следовательно, по соображениям устойчивости при $K_p = 3$ коэффициент усиления интегратора должен удовлетворять неравенству $K_I < 3$. Кроме того, из строки s^0 вытекает, что K_I должен быть больше нуля. Если выбрать другие значения K_p , то и диапазон значений K_I тоже изменится. Обычно при синтезе систем управления, кроме требования устойчивости выдвигаются и другие ограничения, поэтому окончательные значения коэффициентов K_p и K_I должны определяться всеми этими ограничениями.

Пример 6.8

Этот пример является продолжением предыдущего. Если при синтезе системы выбрать значения $K_p = 3$ и $K_I = 3$, то система будет находиться на границе устойчивости. На основании примера 6.7 таблица Рауса примет вид:

$$\begin{array}{l|ll} s^4 & 1 & 5 & 6 \\ s^3 & 4 & 8 & \\ s^2 & 3 & 6 & \\ s^1 & \emptyset & 6 & \\ s^0 & 6 & & \end{array}.$$

Тогда дополнительный полином

$$Q_d(s) = 3s^2 + 6 = 3(s^2 + 2) = 3(s + j\sqrt{2})(s - j\sqrt{2}).$$

В системе должны возникнуть незатухающие колебания с частотой $\omega = 1,41$ рад/с, или с периодом $T = 2\pi/\omega = 4,44$ с, в чем можно убедиться, промоделировав систему с помощью SIMULINK по схеме, изображенной на рис. 6.3.

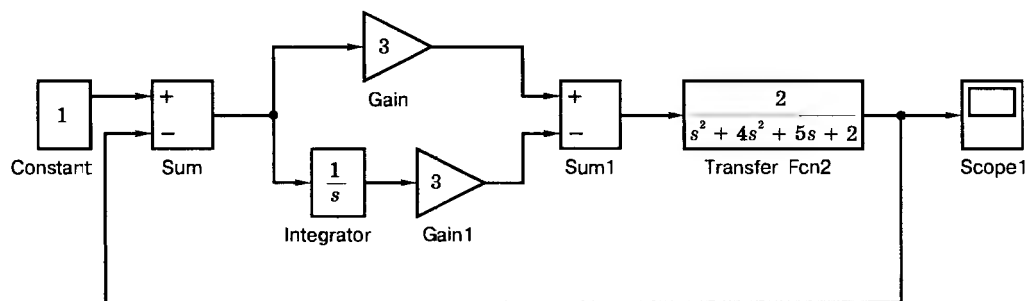


Рис. 6.3. Программирование в SIMULINK к примеру 6.8

Последними двумя примерами мы проиллюстрировали практическое применение критерия Рауса-Гурвица. Этот критерий дает возможность установить зависимость между устойчивостью и параметрами системы.

Итак, при использовании критерия Рауса-Гурвица могут встретиться следующие три случая:

- Случай 1.* В первом столбце таблицы Рауса нет нулевых элементов. При заполнении таблицы никаких проблем не возникает.
- Случай 2.* В строке таблицы имеется по крайней мере один ненулевой элемент, а первый элемент равен нулю. Это всегда является признаком того, что система неустойчива. Первый (нулевой) элемент заменяется величиной ϵ , причем $|\epsilon| \ll 1$, и вычисления продолжают.
- Случай 3.* Все элементы строки равны нулю. Это всегда указывает на то, что система не является устойчивой, но может находиться на границе устойчивости. Анализ предполагает выделение и использование дополнительного полинома, как было описано выше.

6.2. Корни характеристического уравнения

В разделе 6.1 был рассмотрен критерий Рауса-Гурвица, позволяющий исследовать устойчивость линейной стационарной системы без непосредственного вычисления корней характеристического уравнения. Устойчивость системы можно также определить путем нахождения значений этих корней. Для системы первого порядка это тривиальная задача. В системе второго порядка процедура сводится к решению квадратного уравнения. Уравнение третьего порядка также может быть решено аналитически, хотя иногда не без затруднений. Уравнения порядка выше третьего обычно требуют применения численных методов решения. Существуют методы, специально разработанные для цифровых компьютеров; например, с помощью MATLAB можно на компьютере находить корни алгебраических полиномов. Но эти методы обладают одним *недостатком*: все параметры системы должны быть заданы в виде числовых значений. При использовании численных методов процедура определения диапазона изменения некоторого параметра, в котором система является устойчивой, становится достаточно сложной. Как было показано в разделе 6.1, критерий Рауса-Гурвица избавлен от этого недостатка.

Для системы первого порядка с характеристическим уравнением

$$Q(s) = a_1 s + a_0 = 0, \quad (6-6)$$

чтобы система была устойчивой, оба коэффициента должны быть одного знака. Для системы второго порядка

$$Q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (6-7)$$

таблица Рауса имеет вид:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

Здесь также необходимым и достаточным условием устойчивости является то, что все коэффициенты характеристического уравнения должны быть одного знака. Для системы порядка выше второго необходимо, но недостаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения имели один и тот же знак. Итак, только для систем первого и второго порядка об устойчивости можно судить без нахождения корней характеристического уравнения или применения критерия Рауса-Гурвица.

6.3. Исследование устойчивости путем моделирования

Наиболее очевидным методом анализа устойчивости линейных стационарных систем является их моделирование. Сначала разрабатывается аналоговая или цифровая модель системы, а затем производится наблюдение выходной переменной при типовых внешних воздействиях или просто при задании ненулевых начальных условий. При этом устойчивость или неустойчивость системы становится очевидной. Часто к моделированию системы управления приходится прибегать в процессе ее проектирования. Если реальная система содержит переменные параметры или существенные нелинейности, то моделирование может быть единственным средством определения свойств системы. Каких-либо общих методов анализа сложных нелинейных и/или нестационарных систем не существует. Поэтому для определения их характеристик вместо натурных испытаний реальных систем прибегают к помощи моделирования.

Методы численного интегрирования и цифрового моделирования были рассмотрены в разделе 3.6, а программные средства анализа и синтеза — в разделе 3.7. В некоторых примерах было проиллюстрировано применение программы SIMULINK, входящей в состав среды MATLAB.

В программе SIMULINK шаг численного интегрирования выбирается автоматически, однако если этот шаг достаточно велик, то могут возникнуть проблемы вычислительного характера. Погрешности могут также возникнуть, если допущены ошибки при вводе в компьютер модели системы. Один из возможных способов проверки здесь состоит в следующем. С помощью критерия Рауса-Гурвица надо определить коэффициент усиления, при котором система будет находиться на границе устойчивости, и найти соответствующую ему частоту колебаний системы, как это было сделано в примере 6.8. Если в результате исследования модели не будут получены установившиеся гармонические колебания, то это свидетельствует о допущенной ошибке. К проблеме точности моделирования мы вернемся в главе 9, после рассмотрения частотных методов анализа и синтеза.

Вопросы аналогового моделирования систем кратко были рассмотрены в главе 3. До того, как получили широкое распространение быстродействующие цифровые компьюте-

ры, основным методом моделирования было аналоговое. За последние годы этот метод утратил свое значение, однако в некоторых случаях он еще остается актуальным, как было отмечено в главе 3.

Итак, моделирование, по-видимому, является наиболее универсальным методом анализа устойчивости систем, заменяющим экспериментирование с реальной системой в рабочих условиях. Эта процедура абсолютно необходима, например, для систем аэрокосмического назначения, которые всегда должны быть устойчивыми по соображениям надежности и безопасности работы.

6.4. Заключение

В этой главе мы познакомились с очень важным понятием устойчивости систем. Для линейных стационарных систем было дано определение устойчивости типа «ограниченный вход — ограниченный выход». Был рассмотрен критерий Рауса-Гурвица, являющийся инструментом исследования устойчивости систем, характеристическое уравнение которых имеет вид алгебраического полинома от переменной s преобразования Лапласа. Существует один тип линейных стационарных систем, к которым неприменим критерий Рауса-Гурвица — это системы с идеальным запаздыванием. Анализ устойчивости таких систем будет рассмотрен в главе 8.

Реальные физические системы, строго говоря, не являются линейными и стационарными. Поэтому для повышения точности моделей этих систем мы должны учитывать присущие им нелинейности. Определение свойств таких систем, включая устойчивость, обычно производится с помощью моделирования. Эта проблема, в частности, кратко освещена в заключительной части главы. Моделирование нелинейных систем будет рассмотрено в главе 14.

Задачи

6.1. Что вы можете сказать относительно расположения корней следующих характеристических уравнений, без применения критерия Рауса-Гурвица и без нахождения решений уравнений?

(а) $s^3 + 2s^2 + 3s + 1 = 0$.

(б) $-s^3 - 2s^2 - 3s - 1 = 0$.

(в) $s^3 + 2s^2 + 3s - 1 = 0$.

(г) $s^4 + s^3 + s + 2 = 0$.

(д) $s^4 + s^2 + 1 = 0$.

(е) $s^4 - 1 = 0$.

6.2. (а) Проверьте ваши ответы к задаче 6.1, применив критерий Рауса-Гурвица к каждому из полиномов.

(б) Подтвердите результаты, вычислив с помощью MATLAB корни характеристических уравнений.

6.3. С помощью критерия Рауса-Гурвица определите число корней в левой полуплоскости, в правой полуплоскости и на мнимой оси для следующих характеристических уравнений.

(а) $s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 6s = 0$.

(б) $s^4 + s^3 + s + 0,5 = 0$.

- (в) $s^4 + s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$.
 (г) $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0$.
 (д) $s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 4 = 0$.
 (е) $s^4 + 2s^2 + 1 = 0$.

(ж) Проверьте результаты, вычислив корни уравнений с помощью MATLAB.

6.4. Рассмотрите полином из примера 6.3:

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10.$$

- (а) Примените критерий Рауса-Гурвица к полиному $Q(1/x)$, где $Q(1/x) = Q(s)|_{s=1/x}$, и сравните результаты с полученными в примере 6.3.
 (б) Проверьте ответ с помощью MATLAB, вычислив корни полиномов $Q(s)$ и $Q(1/x)$.

6.5. На рис. 6.5 (3) изображена система, в которой использован ПИ-регулятор и канал обратной связи по скорости (датчик 2).

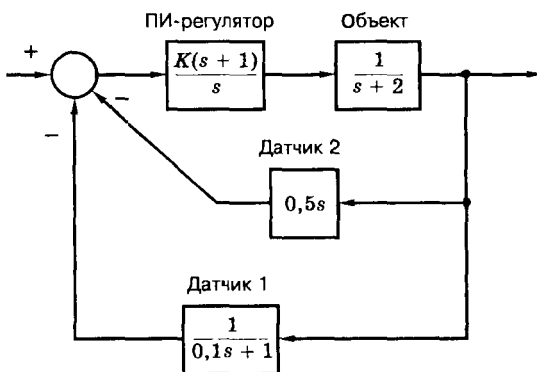


Рис. 6.5 (3)

- (а) Чему равен коэффициент усиления на низких частотах ($s = j\omega = j0$) датчика положения (датчика 1)?
 (б) Чему равен коэффициент усиления на низких частотах ($s = j\omega = j0$) датчика скорости (датчика 2)?
 (в) Из пп. (а) и (б) мы видим, что на низких частотах система имеет единичную обратную связь. К какому типу можно отнести эту систему?

(г) Из п. (в) следует, что при постоянном входном сигнале установившаяся ошибка будет равна нулю, если система является устойчивой. В каком диапазоне значений K система устойчива?

6.6. На рис. 6.6 (3) представлена замкнутая система управления.

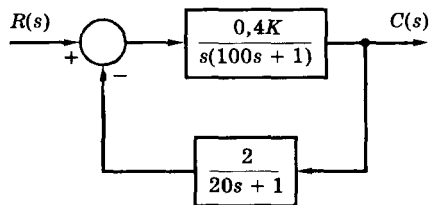


Рис. 6.6 (3)

- (а) Определите значение K , при котором система будет находиться на границе устойчивости.
 (б) При значении K , найденном в п. (а), определите частоту колебаний системы ω_0 и их период $T_0 = 2\pi/\omega_0$.
 (в) Почему период колебаний является столь большим?
 (г) С помощью SIMULINK промоделируйте систему при ступенчатом входном сигнале и проверьте значение периода колебаний, найденное в п. (б).

6.7. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 6.7 (3).

- (а) Найдите установившуюся ошибку как функцию коэффициента усиления K , считая, что система устойчива, а на вход подано единичное ступенчатое воздействие.
 (б) Определите диапазон значений K , при котором имеет силу результат п. (а).
 (в) Определите значения K ($K \neq 0$), при котором система будет находиться на границе устойчивости.

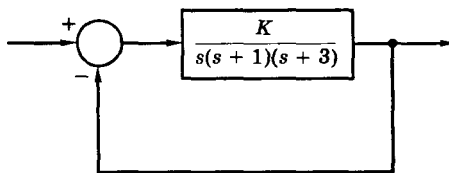
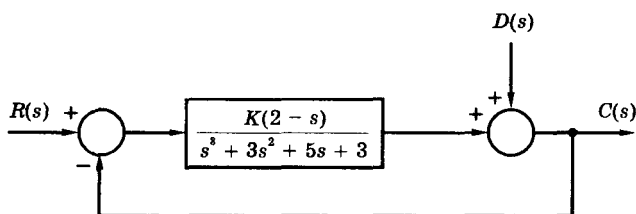


Рис. 6.7 (3)

- (г) При K , найденном в п. (в), определите положение всех корней характеристического уравнения системы.
- (д) Путем моделирования проверьте значение K , найденное в п. (в), и частоту колебаний, соответствующую решению п. (г).

Рис. 6.8 (3)



6.8. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 6.8 (3).

- (а) Определите диапазон значений K , при которых система устойчива. Используйте как положительные, так и отрицательные значения K .
- (б) Только для ответа на данный вопрос, предположите, что перед вами система управления курсом корабля, где входом является угловое положение штурвала в руках судоводителя, а выходом — направление движения корабля. Возмущение $D(s)$ моделирует влияние океанских течений, отклоняющих корабль от заданного курса. При испытании реальной системы значение коэффициента K на короткий период времени устанавливается чуть меньше чем нижний предел, найденный в п. (а). Изобразите графически типичный процесс изменения курса корабля.
- (в) Повторите п. (б) для случая, когда значение коэффициента K чуть больше, чем верхний предел, найденный в п. (а). Хотя система в каждом из двух случаев неустойчива, обратите внимание на разницу в характере неустойчивости.
- (г) Используя SIMULINK, проверьте результаты, полученные в пп. (б) и (в), полагая, что входное воздействие равно нулю, а возмущение имеет вид единичной ступеньки.

6.9. Замкнутая система задана уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -K \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

- (а) Определите при каких K система устойчива.
- (б) Коэффициенту K придано одно из значений, найденных в п. (а), при котором система находится в режиме незатухающих колебаний. Определите частоту и период этих колебаний.
- (в) Используя MATLAB, найдите собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ и проверьте результаты, полученные в п. (а).
- (г) Путем моделирования проверьте результат п. (б), считая, что на вход системы подано ступенчатое воздействие.

6.10. Рассмотрим еще раз систему с ПИ-регулятором из примера 6.7. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{2(K_p s + K_I)}{s(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} = 0.$$

- (а) Определите диапазоны значений коэффициентов K_p и K_I , при которых замкнутая система устойчива.
- (б) Является ли система устойчивой при $K_I = 0,5$ и $K_p = 1$?
- (в) Проверьте результат п. (б) двумя способами:
- 1) вычислив с помощью MATLAB корни характеристического уравнения;
 - 2) определив переходную функцию системы с помощью SIMULINK.

(г) Пропделайте пп. (б) и (в) в случае, если $K_I = 2$ и $K_p = 1$.

6.11. На рис. 6.11 (3) изображена структурная схема системы управления рукой робота (эта система рассмотрена в разделе 2.12). В системе использован ПД-регулятор.

(а) Покажите, что передаточная функция объекта имеет вид

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0,15}{s(s+1)(s+5)}.$$

(б) Считая, что параметры регулятора K_p и K_D положительны, определите диапазоны их значений, при которых замкнутая система устойчива.

(в) Пусть $K_D = 1$. Определите значение K_p , при котором в системе возникнут незатухающие колебания, и найдите период этих колебаний.

(г) С помощью SIMULINK проверьте результаты п. (в).

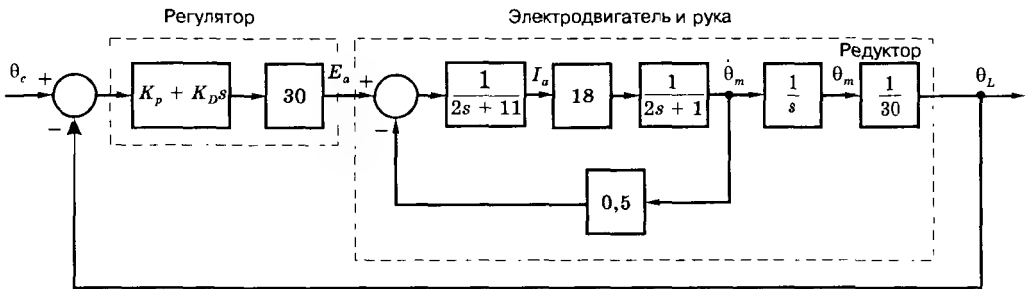


Рис. 6.11 (3)

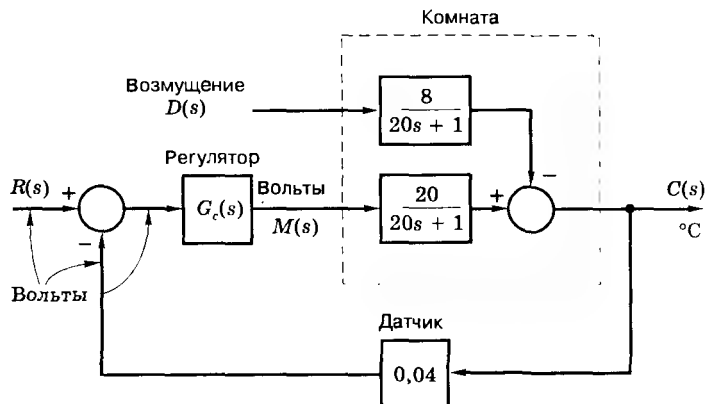
6.12. На рис. 6.12 (3) приведена структурная схема системы регулирования температуры, рассмотренной в примере 5.5. В системах подобного типа обычно применяется ПИ-регулятор, и мы не будем отступать от этой традиции. Передаточная функция регулятора $G_c(s) = K_p + K_I/s$. Возмущение $D(s)$ моделирует открытие двери в комнату; когда дверь открывается, то это идентифицируется с единичным ступенчатым воздействием. Если дверь закрыта, то $D(s) = 0$.

(а) Предположим, что система разомкнута, т.е. $G_c(s) = 0$. Если открыть дверь и оставить ее в таком положении, то каково будет изменение температуры в комнате в установившемся режиме (в градусах Цельсия)?

(б) Повторите п. (а), если система замкнута и $K_I = 0$, а $K_p > 0$. Результат зависит от величины K_p .

(в) Повторите п. (а), если система замкнута, причем $K_I > 0$ и $K_p > 0$.

Рис. 6.12 (3)



- (г) Результаты пп. (б) и (в) предполагают, что система является устойчивой. Определите диапазоны значений K_p и K_I (оба коэффициента положительны), при которых система устойчива.
- (д) Пусть $K_I = 1$. Определите значение K_p , при котором система обладает критическим затуханием.
- (е) С помощью SIMULINK получите переходную функцию системы и проверьте результаты пп. (в) и (д).
- (ж) Почему переходная функция, соответствующая условиям п. (д), имеет перерегулирование, хотя система является критически демпфированной?

6.13. На рис 6.13 (3) изображена структурная схема системы управления перемещением пера цифрового плоттера вдоль одной из осей. Сигнал θ_r — это выход ЭВМ, а θ_p есть положение вала электродвигателя. Предполагается, что в полосе пропускания системы устройство позиционирования пера жестко связано с валом электродвигателя (связь не является динамической).

- (а) В случае $K_d = 1$ определите диапазон значений K_v , при которых система является устойчивой.
- (б) В случае $K_v = 0,3$ определите диапазон значений K_d , при которых система является устойчивой.
- (в) Определите области устойчивости системы в плоскости параметров K_d (ось абсцисс) и K_v (ось ординат).
- (г) Пусть $K_d = 1$. Определите значение K_v , при котором система находится на границе устойчивости, а также период незатухающих колебаний.
- (д) С помощью SIMULINK получите переходную функцию системы и проверьте результат п. (г). Программу для моделирования составьте на основании рис. 6.13 (3).

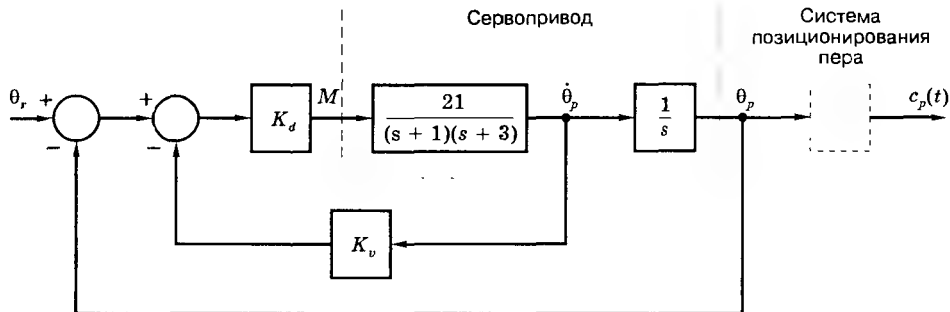


Рис. 6.13 (3)

6.14. На рис. 6.14 (3) изображена упрощенная структурная схема системы управления скоростью автомобиля. Положение дросселя регулируется соленоидом, двигатель представлен звеном 1-го порядка с постоянной времени 1 с, автомобиль и нагрузка также описаны передаточной функцией 1-го порядка с постоянной времени 3 с. В качестве возмущения принят уклон дороги. Скорость должна регулироваться в диапазоне от 70 до 120 км/ч. В системе использован ПИ-регулятор с передаточной функцией $G_c(s) = K_p + K_I/s$.

- (а) Определите диапазоны значений K_p и K_I , при которых система устойчива.
- (б) Предположите, что значение K_I установлено в диапазоне, соответствующем устойчивости, найденном в п. (а), а K_p выбрано несколько меньше, чем нижняя граница диапазона для этого параметра. Следовательно, система является неустойчивой. Если бы вы при этом управляли автомобилем и пытались воздействовать на скорость, то как бы он реагировал на ваши действия? Постарайтесь ответить как можно точнее, не занимаясь вычислениями.

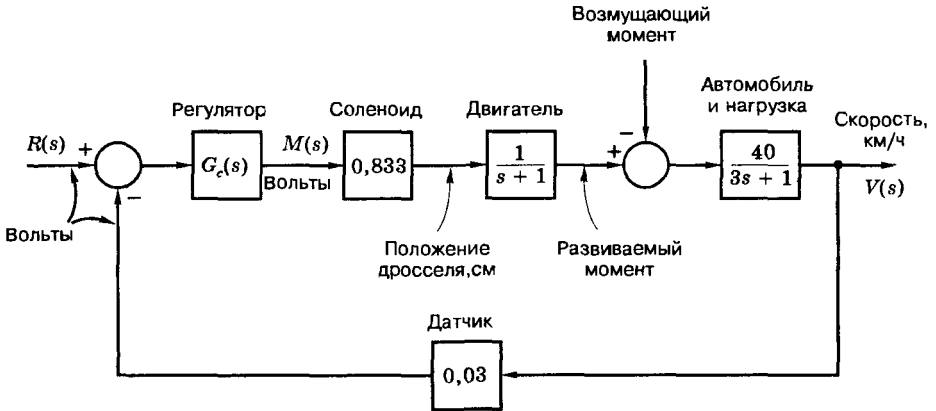


Рис. 6.14 (3)

(в) Промоделируйте систему при условиях п. (б) и проверьте ваши ожидания.

6.15. Таблица Рауса имеет вид:

$\vdots$	$\vdots$	
s^4	$x \quad x$	$\textcircled{x}$
s^3	$x \quad x$	
s^2	x	$\textcircled{x}$
s^1	x	
s^0	$\textcircled{x}$	.

Докажите, что элементы, заключенные в кружок (последние элементы в строках, соответствующих четным степеням s), всегда равны друг другу.

7. Анализ и синтез с помощью корневого годографа

В этой главе мы познакомимся с одним из методов синтеза систем управления — методом корневого годографа, который в равной степени применим и к анализу систем. Этот метод дает возможность исследовать собственное движение систем. В последующих двух главах мы рассмотрим применение частотных характеристик для анализа и синтеза систем управления. Но в то же время эти два метода взаимно дополняют друг друга, они одинаково применимы при решении задач синтеза систем управления, и инженер-практик должен быть знаком с обоими методами.

7.1. Основы метода корневого годографа

Познакомимся с понятием корневого годографа на конкретном примере. Рассмотрим систему радиолокационного сопровождения, изображенную на рис. 7.1 (а) (см. раздел 2.7). На рис. 7.1 (б) и (в), соответственно, представлены функциональная и структурная схемы этой системы. Замкнутая система имеет передаточную функцию

$$T(s) = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)} = \frac{K/s(s+2)}{1 + K/s(s+2)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}. \quad (7-1)$$

Следовательно, характеристическое уравнение мы получим, приравняв нулю знаменатель передаточной функции:

$$s^2 + 2s + K = 0. \quad (7-2)$$

Поскольку характеристический полином имеет второй порядок, то система устойчива при всех положительных значениях K . Однако влияние этого коэффициента на динамику системы далеко не очевидно. Предположим, например, что одним из условий синтеза является требование иметь коэффициент затухания $\zeta = 0.707$. Характеристическое уравнение типовой системы второго порядка имеет вид (4-18):

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \quad (7-3)$$

Тогда, из (7-2) и (7-3):

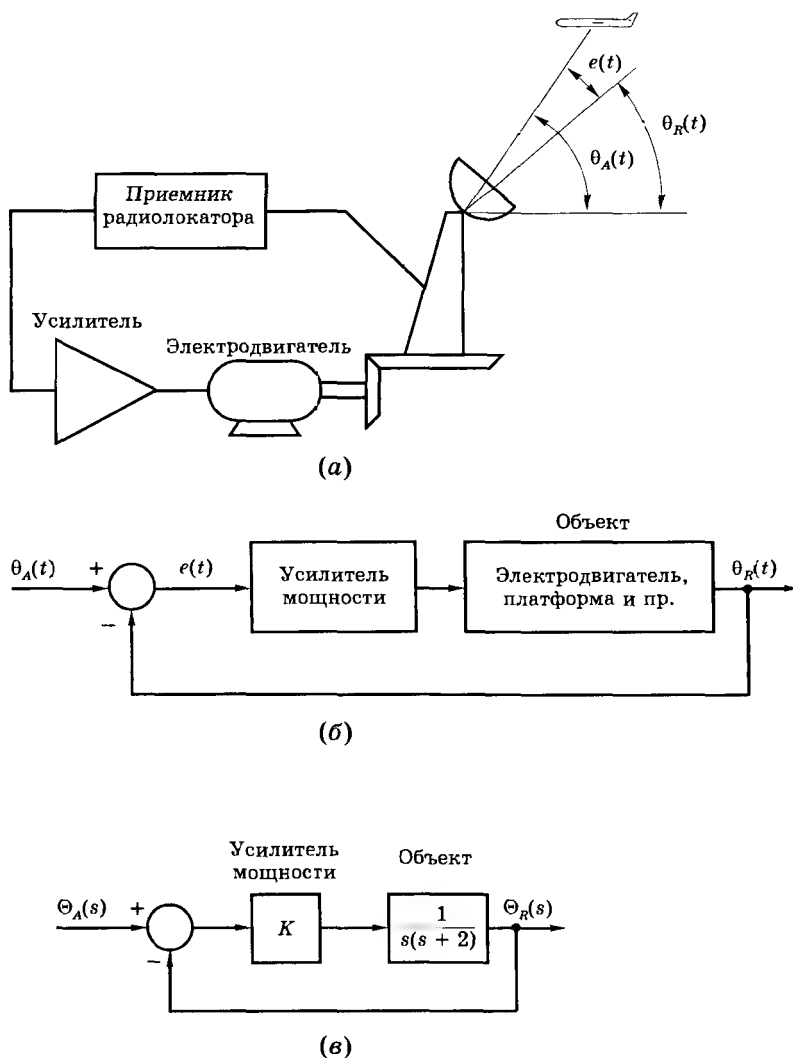
$$2\zeta\omega_n = 2(0.707)\omega_n = 2,$$

т.е. $\omega_n = 1.414$ и $\omega_n^2 = 2$. Сравнивая выражения (7-2) и (7-3), мы видим, что усилитель должен обладать коэффициентом усиления $K = 2$.

Рассмотренный пример является достаточно простым, но в нем мы удовлетворили только одно требование к системе. В действительности при синтезе могут быть предъявлены и другие требования, например, к времени нарастания, времени установления, точности в установившемся режиме и т.д. Если, как на рис. 7.1, коэффициент усиления явля-

Рис. 7.1

Система
радиолокационного
сопровождения



ется единственным параметром, на который можно влиять при синтезе, то в этом случае удастся точно удовлетворить какое-то одно требование. Однако на практике синтез системы связан с рядом компромиссных решений, т.е. выбором значения K можно в некоторой степени удовлетворить всем требованиям, но ни одному из них в точности.

Чтобы исследовать влияние коэффициента усиления K на некоторые свойства системы, проследим, как будет изменяться положение корней характеристического уравнения на s -плоскости. Из (7-2) найдем эти корни:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}. \quad (7-4)$$

При $0 < K \leq 1$ корни являются вещественными и отрицательными, а при $K > 1$ — комплексными, т.е.

$$s = -1 \pm j\sqrt{K - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Положение этих корней при $0 \leq K \leq \infty$ показано на рис. 7.2. Мы видим, что при $0 < K < 1$ оба корня являются вещественными и соответствуют разным постоянным времени. При $K = 1$ вещественные корни равны, и система обладает критическим демпфированием. При $K > 1$ корни становятся комплексными, соответствующими постоянной времени 1 с, а значение ζ уменьшается с ростом K . Следовательно, в случае комплексных корней, чем больше K , тем больше перерегулирование у переходной функции. Кроме того, поскольку увеличивается ω_n , наблюдается уменьшение времени нарастания.

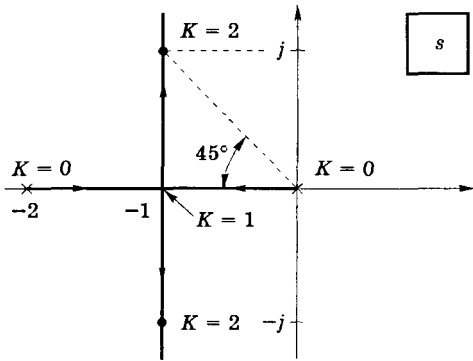


Рис. 7.2. Траектории корней характеристического уравнения

Заметим, что положение корней характеристического уравнения, зависящее от варьируемого параметра, позволяет судить только о характере собственного движения системы, который очевиден из диаграммы. Но, к сожалению, положение корней ничего не может сказать о величине (амплитуде) каждой составляющей собственного движения системы. Амплитуды этих составляющих зависят от (1) полюсов передаточной функции замкнутой системы (эту информацию диаграмма содержит), (2) нулей передаточной функции замкнутой системы (об этом диаграмма не несет информации), и (3) от вида входного сигнала и начальных условий (что также никак не отражается на диаграмме).

Диаграмма, представленная на рис. 7.2, называется *корневым годографом* [1] системы, изображенной на рис. 7.1.

Определение: *корневой годограф* — это траектории корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) замкнутой системы при изменении какого-либо параметра системы.

Корневой годограф системы n -го порядка представляет собой совокупность n ветвей, вычерчиваемых n корнями характеристического уравнения при непрерывном изменении параметра системы во всем возможном диапазоне.

При изучении метода корневого годографа мы будем рассматривать систему общего вида, изображенную на рис. 7.3, где $0 \leq K < \infty$. Здесь мы предполагаем, что $G(s)$ включает в себя передаточные функции регулятора $G_c(s)$ и объекта $G_p(s)$. Характеристическое уравнение имеет вид:

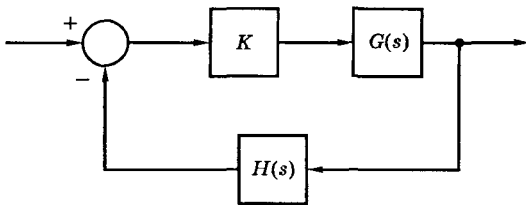


Рис. 7.3. Система для изучения метода корневого годографа

$$1 + KG(s)H(s) = 0.$$

(7-5)

Значение s_1 принадлежит корневому годографу тогда и только тогда, если s_1 удовлетворяет уравнению (7-5) для вещественного значения K , где $0 \leq K < \infty$. Построение корневого годографа для отрицательных значений K [2] будет рассмотрено в разделе 7.12. Как станет ясно из последующего изложения, параметр K должен линейно входить в уравнение корневого годографа (7-5).

Уравнение (7-5) можно представить в ином виде.

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}. \quad (7-6)$$

Следовательно, если s принадлежит корневому годографу, то правая часть выражения (7-6) при данном значении s дает положительное вещественное число.

Поскольку $G(s)$ и $H(s)$ при некотором s в общем случае являются комплексными числами, то (7-6) распадается на два уравнения:

$$|K| = \frac{1}{|G(s)H(s)|} \quad (7-7)$$

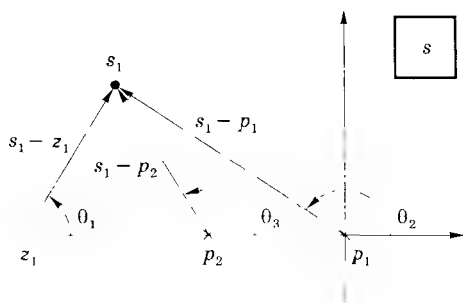
и

$$\arg G(s)H(s) = r(180^\circ), \quad r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (7-8)$$

Уравнение (7-7) носит название *амплитудного критерия* корневого годографа. Поскольку K по предположению может принимать любое значение между нулем и бесконечностью, то уравнение (7-7) удовлетворяется при произвольных значениях s , и мы далее это условие рассматривать не будем. Следовательно, условие того, что точка s принадлежит корневому годографу, определяется уравнением (7-8), которое носит название *углового критерия*.

Угловой критерий наглядно представлен на рис. 7.4 для передаточной функции

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}. \quad (7-9)$$



Предположим, что мы хотим проверить, принадлежит ли точка s_1 корневому годографу. Обозначим угол (или аргумент) сомножителя $(s_1 - z_1)$ через θ_1 , сомножителя $(s_1 - p_1)$ — через θ_2 и сомножителя $(s_1 - p_2)$ — через θ_3 . Тогда, чтобы точка s_1 принадлежала корневому годографу, должно выполняться условие (7-8), т.е.

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180^\circ.$$

Рис. 7.4. Иллюстрация углового критерия

Геометрическое место всех точек, удовлетворяющих этому соотношению, и представляет собой корневой годограф системы. Если точка s_1 находится на корневом годографе, то соответствующее этому положению значение K определяется из (7-6), т.е.

$$K = -\frac{1}{G(s_1)H(s_1)}.$$

Напомним, что это уравнение должно выполняться при положительном и вещественном значении K .

В системе, изображенной на рис. 7.3, выражение $KG(s)H(s)$ представляет собой *передаточную функцию разомкнутого контура*. Из предыдущих рассуждений следует, что для того, чтобы некоторая точка на s -плоскости принадлежала корневому годографу, должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} & \Sigma(\text{всех углов, соответствующих конечным нулям}) - \\ & - \Sigma(\text{всех углов, соответствующих конечным полюсам}) = \\ & = r(180^\circ), r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \end{aligned} \quad (7-10)$$

где полюсы и нули имеются в виду для передаточной функции разомкнутого контура. Хотя одно время условие (7-10) служило основой графического построения корневого годографа, это вовсе не означает, что мы будем пользоваться этим приемом. В настоящее время корневой годограф удобнее строить с помощью программ для цифровых компьютеров, которые к тому же дают более высокую точность. Однако в любом случае необходимо знать основные правила и методы построения корневого годографа, чтобы осмысленно оценивать влияние изменения параметров и введения дополнительных полюсов и нулей в процессе проектирования системы. Этим и объясняется то серьезное внимание, которое уделяется графическим методам, излагаемым в данной главе. Если требуется точное построение корневого годографа, то предпочтительнее воспользоваться цифровым компьютером. Если же необходимо общее понимание процесса синтеза системы, то бывает достаточно грубого наброска корневого годографа с помощью правил, которые будут рассмотрены в последующих разделах.

Наконец, напомним, что характеристическое уравнение линейной стационарной системы может быть записано на основании формулы Мейсона как [см. (5-12)]

$$\Delta(s) = 1 + F(s) = 0.$$

Например, для системы на рис. 7.3, $F(s) = KG(s)H(s)$. Для многоконтурных систем $F(s)$ может включать в себя и другие передаточные функции. Ранее мы определили $F(s)$ как передаточную функцию разомкнутого контура. Поэтому она должна иметь такой вид, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы получалось приравнением нулю суммы этой передаточной функции и единицы. Многие процедуры анализа и синтеза замкнутых систем управления базируются на использовании характеристик разомкнутого контура, поэтому их важность трудно переоценить. В дальнейшем связь между свойствами системы в замкнутом и разомкнутом состоянии будет рассмотрена более детально.

7.2. Некоторые свойства корневого годографа

В этом и следующих разделах мы сформулируем ряд правил, используемых при построении корневых годографов. Большинство из этих правил основаны на угловом критерии, который является главным условием принадлежности точки на s -плоскости корневому годографу. Угловой критерий может быть записан либо в виде (7-8), либо в виде (7-10).

Первое правило заключается в следующем:

1. Корневой годограф симметричен относительно действительной оси.

Это правило вытекает из предположения, что модель системы имеет вид дробно-рациональной функции (отношения двух полиномов) с вещественными коэффициентами. Следовательно, если характеристическое уравнение имеет комплексный корень, то обязан быть и комплексно-сопряженный корень. Иначе говоря, комплексные корни полиномов с вещественными коэффициентами всегда образуют комплексно-сопряженные пары.

Теперь сформулируем второе правило. Характеристическое уравнение системы, изображенной на рис. 7.3, можно представить в виде:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{Kb_m(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = 0, \quad (7-11)$$

или, иначе:

$$(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) + Kb_m(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m) = 0. \quad (7-12)$$

Отсюда видно, что при $K = 0$ корни характеристического уравнения совпадают с полюсами передаточной функции $G(s)H(s)$. Если $K \rightarrow \infty$, но s остается конечным, ветви корневого годографа заканчиваются в нулях передаточной функции разомкнутого контура. Если эта передаточная функция имеет нули, расположенные в бесконечности, т.е. если $n > m$ (что свойственно моделям реальных физических систем), то годограф также будет стремиться к этим нулям. Краткое доказательство такой особенности корневого годографа будет дано при рассмотрении дополнительных правил. Итак, второе правило сводится к следующему:

2. Корневой годограф при $K = 0$ начинается в полюсах функции $G(s)H(s)$, а при $K \rightarrow \infty$ заканчивается в нулях этой функции, включая нули, расположенные в бесконечности.

Теперь сформулируем третье правило, касающееся вида корневого годографа при очень больших значениях s . На основании (7-11) запишем передаточную функцию разомкнутого контура в виде:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots} = \frac{K(b_ms^m + \dots)}{s^{m+\alpha} + \dots}, \quad (7-13)$$

где

$$\alpha = n - m > 0. \quad (7-14)$$

Таким образом, $KG(s)H(s)$ имеет α нулей в бесконечности. Если в выражении (7-13) устремить s к бесконечности, то каждый полином будет определяться старшей степенью этой переменной, и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} KG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Kb_ms^m}{s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Kb_m}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (7-15)$$

Следовательно, корневой годограф при больших значениях s удовлетворяет соотношению

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + KG(s)H(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [1 + \frac{Kb_m}{s^\alpha}] = 0. \quad (7-16)$$

Это уравнение приводится к виду

$$s^\alpha + Kb_m = 0, \quad (7-17)$$

или

$$s^\alpha = -Kb_m = Kb_m e^{j180^\circ}, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (7-18)$$

Поскольку $s \rightarrow \infty$, то модули корней этого уравнения также стремятся к бесконечности, а аргументы имеют значения

$$\theta = \frac{r180^\circ}{\alpha}, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (7-19)$$

Углы, определяемые выражением (7-19), являются углами наклона *асимптот* корневого годографа, к которым стремятся его ветви при $s \rightarrow \infty$ (а, следовательно, и при $K \rightarrow \infty$). В таблице 7.1 приведены значения этих углов для разных α . При $\alpha = 0$ асимптоты отсутствуют, а для $\alpha \neq 0$ наименьший угол наклона асимптоты равен $180^\circ/\alpha$, а угол между двумя соседними асимптотами составляет $360^\circ/\alpha$.

Таблица 7.1 Углы наклона асимптот

α	Углы наклона
0	Нет асимптот
1	180°
2	$\pm 90^\circ$
3	$\pm 60^\circ, 180^\circ$
4	$\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

Пример 7.1

Рассмотрим еще раз систему радиолокационного сопровождения из раздела 7.1, для которой передаточная функция в разомкнутом состоянии равна

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}.$$

Так как, согласно (7-13) число конечных нулей $m = 0$, а число конечных полюсов $n = 2$, то

$$\alpha = n - m = 2,$$

т.е. существуют два нуля в бесконечности. Следовательно, корневой годограф имеет две асимптоты (см. табл. 7.1) под углами $\pm 90^\circ$. Эти асимптоты можно видеть на рис. 7.2, который представляет собой корневой годограф данной системы.

Пример 7.2

В качестве второго примера рассмотрим систему, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$KG(s)H(s) = K/s^3.$$

Поскольку эта функция имеет три нуля в бесконечности, то у корневого годографа три асимптоты с углами наклона $\pm 60^\circ$ и 180° , как это следует из таблицы 7.1. Для данной системы корни можно вычислить аналитически. Характеристическое уравнение имеет вид

$$1 + KG(s)H(s) = 0 = s^3 + K,$$

а его корни

$$s = (-K)^{1/3} = (K)^{1/3}e^{j60^\circ}, (K)^{1/3}e^{j60^\circ}, (K)^{1/3}e^{j180^\circ}.$$

Заметим, что корни характеристического уравнения представляют собой любое комплексное число, которое, будучи возведенным в куб, дает отрицательное вещественное число. Корневой годограф изображен на рис. 7.5. При всех значениях $K > 0$ система неустойчива, т.к. в замкнутом состоянии ее передаточная функция имеет два полюса в правой полуплоскости. Читатель может получить тот же результат, исследуя устойчивость системы с помощью критерия Рауса-Гурвица:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 0 & K \\ s^1 & -\frac{K}{\varepsilon} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

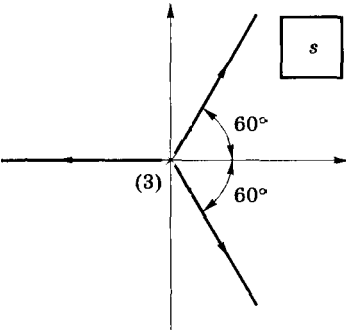


Рис. 7.5. Корневой годограф к примеру 7.2

Мы видим, что замкнутая система всегда имеет два полюса в правой полуплоскости, что согласуется с рис. 7.5. Программа MATLAB, которая вычисляет и строит корневой годограф, имеет следующий вид:

```
rlocus([1], [1 0 0 0])
```

В примере 7.1 асимптоты пересекают действительную ось в точке $s = -1$, а в примере 7.2 — в начале координат. Если мы обозначим через σ_a значение s , при котором асимптоты пересекают действительную ось, то

$$\sigma_a = \frac{(\text{сумма конечных полюсов}) - (\text{сумма конечных нулей})}{(\text{число конечных полюсов}) - (\text{число конечных нулей})}, \quad (7-20)$$

где полюсы и нули относятся к передаточной функции разомкнутого контура. Это соотношение приводится без доказательства; оно справедливо также для случая, когда передаточная функция разомкнутого контура имеет один или более нулей в бесконечности ($\alpha \geq 1$). Конечно, если $\alpha = 1$, то имеется всего одна асимптота (отрицательное направление действительной оси), и выражение (7-20) становится бессмысленным. Поэтому (7-20) используется только при $\alpha \geq 2$. Когда разомкнутый контур не имеет конечных нулей, то второй член в числителе (7-20) полагается равным нулю. Теперь можно сформулировать третье правило построения корневого годографа:

3. Если передаточная функция разомкнутого контура имеет α нулей в бесконечности ($\alpha \geq 1$), то при $K \rightarrow \infty$ корневой годограф стремится к α асимптотам, расположенным под углами

$$\theta = \frac{r180^\circ}{\alpha}, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

и пересекающим действительную ось в точке, определяемой выражением (7-20).

Пример 7.3

Для радиолокационной системы из примера 7.1

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}.$$

Поскольку конечные нули отсутствуют и имеются два конечных полюса, $s = 0$ и $s = -2$, то из (7-20) следует:

$$\sigma_a = \frac{[0 + (-2)] - 0}{2 - 0} = -1,$$

что легко проверить с помощью рис. 7.2.

Для системы из примера 7.2

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s^3}.$$

Здесь нет конечных нулей, но имеются три полюса при $s = 0$. Следовательно,

$$\sigma_a = \frac{0 - 0}{3 - 0} = 0,$$

что также соответствует результату примера 7.2.

В двух последних примерах корневой годограф в точности совпадает со своими асимптотами. Во многих случаях ветви годографа лишь стремятся к асимптотам при $s \rightarrow \infty$. Это мы увидим в примерах, иллюстрирующих следующий раздел.

В данном разделе мы сформулировали три основных правила, помогающих в построении корневого годографа. Напомним, что корневой годограф — это геометрическое место корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции замкнутой системы) при изменении какого-либо параметра системы. В следующем разделе мы сформулируем три дополнительных правила, облегчающие нахождение общего вида корневого годографа для систем сравнительно невысокого порядка. Как было отмечено ранее, точное построение корневого годографа требует применения цифрового компьютера (см. пример 7.2).

7.3. Дополнительные свойства корневого годографа

В этом разделе мы прежде всего получим правило нахождения части корневого годографа, совпадающей с действительной осью. Для этого воспользуемся условием (7-10):

$$\begin{aligned} & \Sigma(\text{аргументов, соответствующих конечным нулям}) - \\ & - \Sigma(\text{аргументов, соответствующих конечным полюсам}) = r180^\circ, r = \pm 1, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Сначала будем считать, что все конечные полюсы и нули передаточной функции разомкнутого контура находятся на действительной оси, и мы хотим определить, принадлежат ли некоторые точки этой оси корневому годографу.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 7.6 (а), где на действительной оси расположены два полюса и один нуль, так что

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}.$$

Сначала исследуем некоторую точку s на действительной оси справа от полюса p_1 . На рис. 7.6 (б) изображен сомножитель $(s - p_1)$, имеющий аргумент 0° . Из рисунка также видно, что аргументы, соответствующие сомножителям $(s - z_1)$ и $(s - p_2)$, также равны 0° . Следовательно, условие (7-10) не выполняется, и любая точка справа от полюса p_1 не может принадлежать корневому годографу.

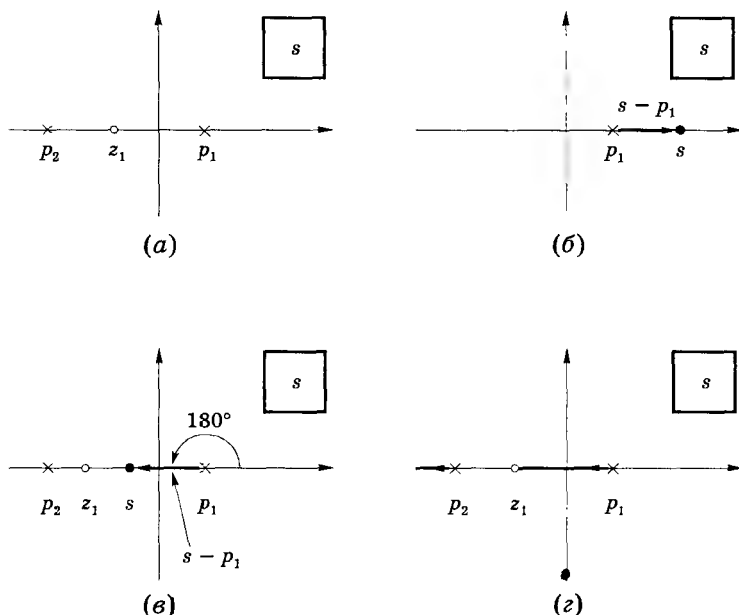
Теперь рассмотрим точку s , лежащую между полюсом p_1 и нулем z_1 . Сомножитель $(s - p_1)$ в данном случае уже имеет аргумент 180° , как это видно из рис. 7.6 (в). Однако аргументы, соответствующие нулю z_1 и полюсу p_2 , по-прежнему равны 0° . Таким образом, условие (7-10) выполняется, и любая точка между z_1 и p_1 принадлежит корневому годографу.

Для точки s между p_2 и z_1 аргументы, соответствующие полюсу p_1 и нулю z_1 , равны 180° , а полюсу p_2 соответствует аргумент 0° . Следовательно, условие (7-10) не выполняется, и отрезок действительной оси между z_1 и p_2 не может принадлежать корневому годографу. Если точка s лежит слева от полюса p_2 , то аргументы сомножителей $(s - z_1)$, $(s - p_1)$ и $(s - p_2)$ равны 180° и условие (7-10) выполняется. Результирующий корневой годограф показан на рис. 7.6 (г), причем стрелки указывают на направление перемещения корней с ростом параметра K .

Если мы рассматриваем точку на действительной оси, то аргумент вектора, проведенного в эту точку из любого вещественного нуля или полюса, всегда равен либо 0° , либо 180° . С этой точки зрения, для формулировки правила нет никакой разницы между

Рис. 7.6

Корневой годограф, частично совпадающий с действительной осью



полюсами и нулями. Очевидно, мы получим одинаковый результат, если к некоторому углу прибавим 0° или вычтем 0° ; такой же результат получим, если к углу прибавим 180° или вычтем 180° . Поэтому вклад либо вещественного нуля, либо вещественного полюса в условие (7-10) будет одинаковым, если проверяется какая-либо точка на действительной оси, т.к. все аргументы в этом случае равны 0° или 180° . Следовательно, нет необходимости проводить различие между полюсами и нулями, и мы просто будем говорить о вещественных особых точках передаточной функции.

Если вещественный нуль или полюс лежит *слева* от исследуемой точки, он вносит 0° в условие (7-10); поэтому совершенно не имеет значения, сколько и каких особенностей передаточной функции находится слева от этой точки. Если вещественный нуль или полюс лежит *справа* от исследуемой точки, он вносит 180° в условие (7-10). Поэтому, если число особенностей передаточной функции справа от исследуемой точки — нечетное, то эта точка принадлежит корневому годографу. В противном случае (т.е. если число вещественных нулей и полюсов справа от исследуемой точки — четное) точка не принадлежит корневому годографу.

Все предыдущие рассуждения сохраняют силу и в случае, когда передаточная функция разомкнутого контура имеет комплексные полюсы или нули. Например, на рис. 7.7 изображены два комплексно-сопряженных полюса. Поскольку комплексные полюсы и нули всегда образуют сопряженные пары, то сумма углов от каждой пары полюсов (или нулей) к точке на действительной оси будет равна 0° (или 360°), как показано на рисунке. Следовательно, комплексные полюсы и нули не оказывают влияния на часть корневого годографа, совпадающую с действительной осью. Теперь мы можем сформулировать четвертое правило:

4. Корневой годограф включает в себя все точки действительной оси, расположенные слева от нечетного числа вещественных особенностей (полюсов и нулей) передаточной функции.

Пятое правило, которое мы сформулируем, относится к точкам, в которых две или более ветвей корневого годографа сходятся вместе, а затем отделяются. Такие точки называются *точками отрыва*. Характерной особенностью точки отрыва является то, что при соответствующем ей значении параметра K характеристическое уравнение имеет кратные корни. Например, в примере 7.2 передаточная функция разомкнутого контура имела вид

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s^3},$$

и, как показано на рис. 7.5, при $s = 0$ мы наблюдаем точку отрыва, откуда расходятся три ветви корневого годографа. В этой точке, т.е. при $K = 0$, характеристическое уравнение имеет корень кратности три. Основываясь на этих предварительных рассуждениях, сформулируем теперь пятое правило.

Если представить $G(s)H(s)$ как отношение двух полиномов $N(s)$ и $D(s)$, то характеристическое уравнение системы примет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0. \quad (7-21)$$

Тогда

$$D(s) + KN(s) = Q(s) = 0, \quad (7-22)$$

где $Q(s)$ есть характеристический полином. Также, из (7-21):

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} = -\frac{D(s)}{N(s)}. \quad (7-23)$$

Предположим, что $s = s_b$ есть точка отрыва. Тогда, в соответствии с ранее сказанным, характеристическое уравнение имеет s_b в качестве кратного корня, т.е. мы можем представить характеристический полином в виде:

$$Q(s) = (s - s_b)^\gamma Q_1(s), \quad (7-24)$$

где $\gamma \geq 2$ есть порядок кратности корня. Дифференцируя $Q(s)$ по s , получим:

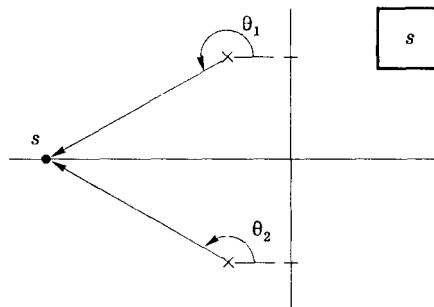
$$\begin{aligned} \frac{dQ(s)}{ds} &= Q'(s) = \gamma(s - s_b)^{\gamma-1} Q_1(s) + (s - s_b)^\gamma Q_1'(s) = \\ &= (s - s_b)^{\gamma-1} [\gamma Q_1(s) + (s - s_b) Q_1'(s)], \end{aligned} \quad (7-25)$$

где индекс «штрих» обозначает производную по переменной s . Таким образом, $Q(s)$ имеет корень порядка $(\gamma - 1)$ при $s = s_b$, т.е. $Q'(s_b) = 0$. На основании (7-22) запишем:

$$Q'(s) = D'(s) + KN'(s). \quad (7-26)$$

Рис. 7.7

Случай комплексных полюсов



Подставляя (7-23) в (7-26), получим:

$$Q'(s) = D'(s) - \frac{D(s)}{N(s)}N'(s), \quad (7-27)$$

что при $s = s_b$ принимает вид:

$$Q'(s_b) = 0 = D'(s)N(s) - D(s)N'(s)|_{s=s_b}. \quad (7-28)$$

Это уравнение будет удовлетворяться в точке отрыва.

Наконец, заметим, что

$$\frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = \frac{d\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]}{ds} = \frac{D(s)N'(s) - D'(s)N(s)}{D^2(s)} \quad (7-29)$$

и также что

$$\frac{d\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right]}{ds} = \frac{d\left[\frac{D(s)}{N(s)}\right]}{ds} = \frac{N(s)D'(s) - N'(s)D(s)}{N^2(s)}. \quad (7-30)$$

Если приравнять нулю (7-29) или (7-30), то при $s = s_b$ мы получим то же самое выражение, что и (7-28). Таким образом, (7-29) или (7-30) или непосредственно (7-28) дают нам полиномы, в числе корней которых присутствуют и точки отрыва. Отсюда, правило 5 гласит следующее:

5. Точки отрыва корневого годографа появляются среди корней уравнения

$$\frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = 0,$$

либо, что то же самое,

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0,$$

где $N(s)$ и $D(s)$ есть, соответственно, числитель и знаменатель функции $G(s)H(s)$.

И, наконец, последнее замечание, связанное с этим правилом. Если s находится на действительной оси, то функция $G(s)H(s)$ принимает вещественное значение. Тогда на основании (7-30) и (7-23), считая K функцией переменной s , можно записать:

$$\frac{dK(s)}{ds} = -\frac{d\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right]}{ds} = 0.$$

Следовательно, в любой точке отрыва на действительной оси K принимает либо максимальное, либо минимальное значение из всех, соответствующих этой части корневого годографа.

Еще одно дополнительное правило позволяет установить угол, под которым ветвь корневого годографа выходит из полюса (*угол выхода*) или входит в нуль (*угол входа*). Для иллюстрации этого правила рассмотрим систему, разомкнутый контур которой имеет передаточную функцию

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

Будем считать, что на рис. 7.8 (а) ϵ есть очень малая величина, так что точка s_1 принадлежит корневому годографу, и нас интересует угол θ_{1a} , под которым годограф выходит из полюса $p_1 = -1 + j$.

Для данного случая, на основании углового критерия (7-10), запишем:

$$-\theta_{1d} - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180^\circ.$$

Поскольку $s_1 \approx p_1$, то $\theta_2 \approx 90^\circ$ и $\theta_3 \approx 45^\circ$; тогда угол выхода

$$\theta_{1d} \approx 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Полный фрагмент корневого годографа представлен на рис. 7.8 (б). Приведенные рассуждения позволяют дать следующую формулировку шестого правила:

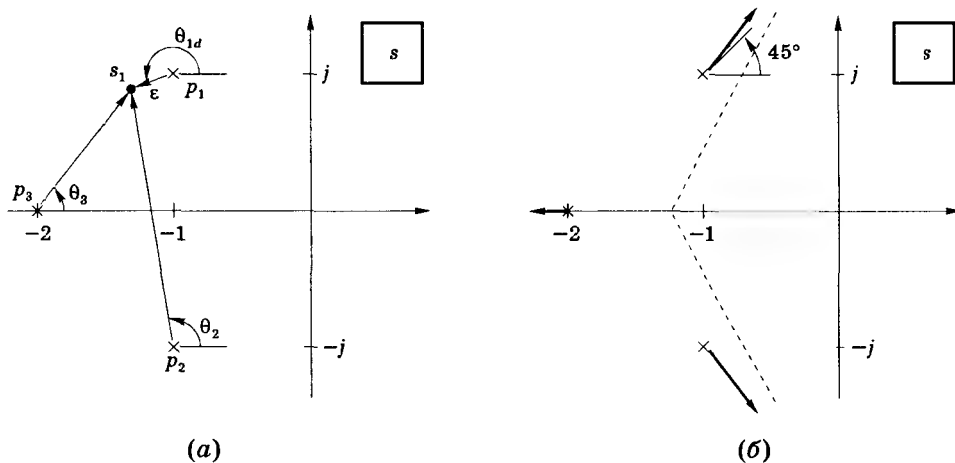


Рис. 7.8. Определение угла выхода

6. Корневой годограф будет выходить из полюса p_j (входить в нуль z_j) под углом θ_d (θ_a), где

$$\theta_d = \sum_i \theta_{z_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{p_i} + r(180^\circ),$$

$$\theta_a = \sum_i \theta_{p_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{z_i} + r(180^\circ),$$

и $r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, а θ_{p_i} (θ_{z_i}) есть угол между полюсом p_i (нулем z_i) и полюсом p_j (нулем z_j).

Все шесть правил построения корневого годографа замкнутой системы, имеющей характеристическое уравнение

$$1 + KG(s)H(s) = 0,$$

сведены в таблицу 7.2.

Таблица 7.2. Правила построения корневого годографа

1. Корневой годограф симметричен относительно действительной оси.
2. Корневой годограф начинается в полюсах функции $G(s)H(s)$ (при $K = 0$) и заканчивается в нулях $G(s)H(s)$ (при $K \rightarrow \infty$), включая нули, расположенные в бесконечности.
3. Если передаточная функция разомкнутого контура имеет α нулей в бесконечности ($\alpha \geq 1$), то корневой годограф при $K \rightarrow \infty$ стремится к α асимптотам. Эти асимптоты расположены под углами

$$\theta = \frac{r180^\circ}{\alpha}, r = \pm 1, \pm 3, \dots$$

и выходят из точки на действительной оси с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{\text{число полюсов} - \text{число нулей}}.$$

4. Корневой годограф включает все точки действительной оси, расположенные слева от нечетного числа вещественных полюсов и нулей.
5. Точки отрыва корневого годографа появляются среди корней уравнения

$$\frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = 0,$$

или $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$, где $N(s)$ и $D(s)$ есть, соответственно, числитель и знаменатель функции $G(s)H(s)$.

6. Корневой годограф будет выходить из полюса p_i (входить в нуль z_j) функции $G(s)H(s)$ под углом θ_d (θ_a), где

$$\theta_d = \sum_i \theta_{z_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{p_i} + r(180^\circ),$$

$$\theta_a = \sum_i \theta_{p_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{z_i} + r(180^\circ),$$

и $r = \pm 1, \pm 3, \dots$, а θ_{p_i} (θ_{z_i}) есть угол между полюсом p_i (нулем z_i) и полюсом p_j (нулем z_j).

Пример 7.4

Рассмотрим систему, разомкнутый контур которой имеет передаточную функцию

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{K}{s^3 + 4s^2 + s - 6}.$$

Воспользуемся правилами таблицы 7.2.

Правило 2. Корневой годограф начинается в полюсах $s = 1$, $s = -2$ и $s = -3$ и заканчивается в трех нулях, находящихся в бесконечности.

Правило 3. Годограф имеет три асимптоты с углами наклона $\pm 60^\circ$ и 180° (см. табл. 7.1), пересекающиеся в точке на действительной оси с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{\text{число полюсов} - \text{число нулей}} = \frac{(1-2-3)}{3-0} = -\frac{4}{3},$$

как показано на рис. 7.9.

Правило 4. Корневой годограф включает в себя часть действительной оси в интервалах $-2 < s < 1$ (слева от одной особенности передаточной функции) и $s < -3$ (слева от трех особенностей передаточной функции). Интервал $s > 1$ никаких особенностей не содержит, а интервал $-3 < s < -2$ расположен слева от двух особенностей передаточной функции, поэтому данные участки не входят в корневой годограф.

Правило 5. Определим точки отрыва:

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = N(s)D'(s) = (1)\frac{d}{ds}(s^3 + 4s^2 + s - 6) = 3s^2 + 8s + 1.$$

Этот полином имеет корни $s = -0,132$ и $s = -2,54$. Из правила 4 и рис. 7.9 следует, что точка $s = -2,54$ не принадлежит корневому годографу, и мы не будем принимать ее во внимание. В действительности эта точка является точкой отрыва для той части корневой годографа, которая соответствует $K < 0$, но в данном разделе мы не рассматриваем отрицательные значения параметра K . Точка $s = -0,132$ принадлежит корневому годографу, и она является точкой отрыва, как показано на рис. 7.9. На том же рисунке изображен весь корневой годограф. Заметим, что система является неустойчивой как при малых значениях K (один корень в правой полуплоскости), так и при больших (два корня в правой полуплоскости).

Диапазон значений K , при которых система устойчива, проще всего найти с помощью критерия Рауса-Гурвица. Характеристическое уравнение системы

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

после подстановки в него выражения для передаточной функции разомкнутой системы принимает вид:

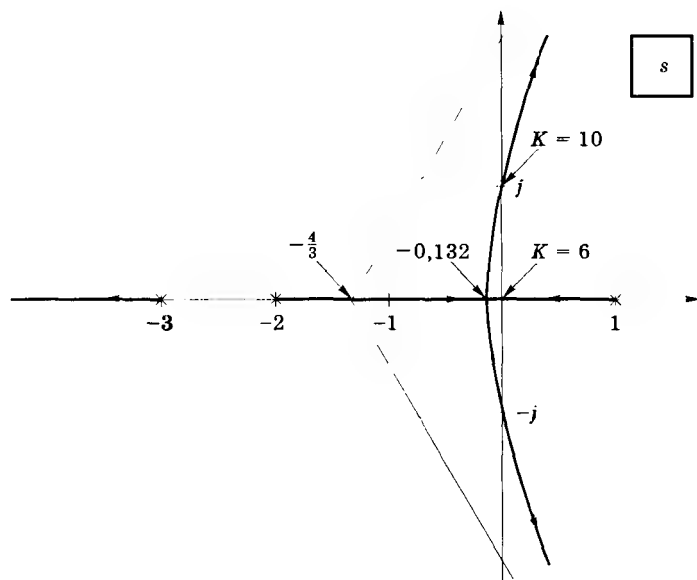
$$s^3 + 4s^2 + s - 6 + K = 0.$$

Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 4 & K-6 \\ s^1 & \frac{10-K}{4} & \\ s^0 & 4 & K-6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K < 10 \\ K > 6 \end{array}$$

Отсюда видно, что система устойчива при $6 < K < 10$.

Рис. 7.9
Корневой годограф
к примеру 7.4



Из таблицы Рауса следует, что при $K = 6$ замкнутая система имеет полюс при $s = 0$ (это отмечено на корневом годографе). Заметим, что значение K , при котором полюс будет расположен в начале координат, можно найти также с помощью выражения (7-6):

$$K = - \left. \frac{1}{G(s)H(s)} \right|_{s=0} = - (s^3 + 4s^2 + s - 6)|_{s=0} = 6,$$

что соответствует результату, полученному по критерию Рауса-Гурвица. При большем значении K , соответствующем границе устойчивости ($K = 10$) таблица Рауса дает дополнительный полином

$$4s^2 + 4 = 4(s^2 + 1).$$

Таким образом, при $K = 10$ передаточная функция замкнутой системы имеет полюсы при $\pm j$. Это также можно проверить с помощью выражения (7-6):

$$K = - \left. \frac{1}{G(s)H(s)} \right|_{s=j} = - (s^3 + 4s^2 + s - 6)|_{s=j} = 10.$$

Заметим, что критерий Рауса-Гурвица является очень хорошей поддержкой методу корневого годографа, т.к. с его помощью легко можно определить значения K , соответствующие устойчивой системе и точкам пересечения годографа с мнимой осью. Корневой годограф можно проверить с помощью следующей программы MATLAB:

```
rlocus([1], [1 4 1 -6]).
```

Пример 7.5

Построим корневой годограф для системы, имеющей в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}.$$

Правило 2. Корневой годограф начинается в точке $s = 0$, соответствующей полюсу кратности два, и заканчивается в нулях $s = -1$ и $s = \infty$.

Правило 3. Имеется одна асимптота под углом 180° .

Правило 4. Частью корневого годографа является действительная ось при $s < -1$ (слева от трех особенностей передаточной функции). Отрезок действительной оси, соответствующий $s > 0$, не содержит никаких особенностей, а диапазон $-1 < s < 0$ находится слева от двух особенностей, поэтому данные участки не принадлежат корневому годографу.

Правило 5. Определим точки отрыва:

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = (s+1)(2s) - (1)(s^2) = s(s+2) = 0.$$

Оба корня этого уравнения принадлежат корневому годографу, значит, каждый корень должен являться точкой отрыва. Точка $s = 0$ не вызывает сомнения, поскольку действительная ось в ее окрестности не является частью корневого годографа. В этой точке годограф отрывается от действительной оси. Точка $s = -2$ является точкой отрыва, поскольку в ней годограф возвращается на действительную ось, а затем стремится к нулям передаточной функции разомкнутого контура. Полный вид корневого годографа представлен на рис. 7.10. Построения можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
rlocus([0 1 1], [1 0 0]);
```

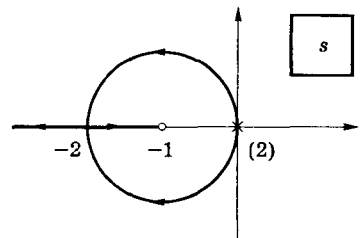


Рис. 7.10. Корневой годограф к примеру 7.5

Пример 7.6

В этом примере мы рассмотрим упрощенную систему управления курсом корабля [4], которая является частью более сложной автоматической системы. Структурная схема этой системы представлена на рис. 7.11 (б). Напряжение $u_0(t)$ (выход регулятора) представляет собой сигнал малой мощности: для управления рулевым колесом, следовательно, необходим усилитель мощности, который воздействует на угловое положение руля $u_r(t)$. Усилитель мощности и рулевое колесо представлены моделями первого порядка; динамика корабля представлена моделью второго порядка. Курс корабля обозначен как $c(t)$. Параметры τ_a , τ_r и τ_s соответствуют постоянным времени отдельных элементов системы. Учитывая массу корабля, мы можем предположить, что постоянная времени усилителя мощности и рулевого механизма малы по сравнению с постоянной времени корабля; например, мы можем вернуться к манипуляциям с рулевым колесом, где чем корабль отреагирует на них. Динамика корабля предполагает наличие интегратора, т.к. если рулевое колесо установлено в ненулевое положение, то корабль будет совершать круговое движение. Следовательно, курс корабля, как угол его поворота, будет неограниченно возрастать [$c(t)$ в установившемся режиме будет линейной функцией времени].

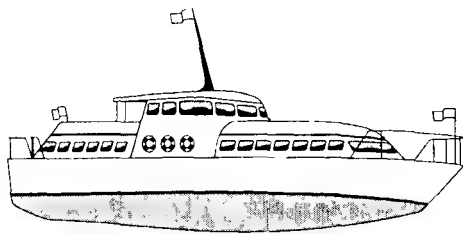
Предположим, что мы имеем следующие постоянные времени: $\tau_a = 0,05$ с, $\tau_r = 0,5$ с и $\tau_s = 10$ с. Поскольку усилитель мощности и рулевой механизм обладают существенно большим быстродействием, чем корабль, то в данном примере мы пренебрежем их постоянными времени. Однако в следующих двух примерах мы учтем эти постоянные времени, чтобы показать, как это может отразиться на построении корневого годографа и к чему может привести игнорирование полюсов передаточной функции системы. А пока мы будем считать, что структурная схема разомкнутой системы имеет вид рис. 7.11 (в). Для этой системы передаточная функция имеет вид:

$$KG(s)H(s) = \frac{(0,5)(0,1)K_a}{s(10s + 1)} = \frac{0,005K_a}{s(s + 0,1)} = \frac{K}{s^2 + 0,1s},$$

где $K = 0,005K_a$, а K_a — это коэффициент усиления усилителя мощности. Теперь займемся построением корневого годографа.

Рис. 7.11

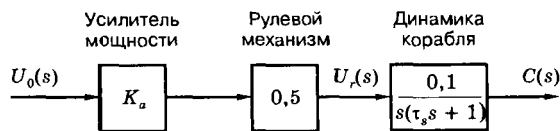
Система управления курсом корабля



(а)



(б)



(в)

Правило 2. Корневой годограф начинается в полюсах $s = 0$ и $s = -0,1$ и заканчивается в двух нулях, расположенных в бесконечности.

Правило 3. Мы имеем две асимптоты, расположенные под углами $\pm 90^\circ$ и пересекающиеся в точке

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{\text{число полюсов} - \text{число нулей}} = \frac{-0,1 - 0}{2 - 0} = -0,05.$$

Правило 4. Корневой годограф включает в себя часть действительной оси $-0,1 < s < 0$.

Правило 5. Точки отрыва определяются из условия:

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = (1)(2s + 0,1) - 0 = 2(s + 0,05) = 0.$$

Следовательно, точка отрыва соответствует значению $s = -0,05$.

Корневой годограф представлен на рис. 7.12, причем изображена только его верхняя часть на s -плоскости. Нижняя часть является зеркальным отображением верхней части. Заметим, что система является устойчивой при всех положительных значениях коэффициента усиления усилителя мощности. Если единственной целью синтеза системы является уменьшение установившейся ошибки, то коэффициент усиления K_a должен быть выбран настолько большим, насколько это возможно. Точке отрыва соответствует коэффициент усиления



Рис. 7.12. Корневой годограф к примеру 7.6

$$K_a = - \left. \frac{s^2 + 0,1s}{0,005} \right|_{s=-0,05} = - \frac{(0,05)^2 + (0,1)(-0,05)}{0,005} = 0,5.$$

Таким образом, при $K_a > 0,5$ полюсы передаточной функции замкнутой системы будут комплексными с постоянной времени $\tau = 1/0,05 = 20$ с. Следовательно, можно ожидать изменения направления движения корабля примерно через 80 секунд.

Пример 7.7

В этом примере мы еще раз рассмотрим систему управления курсом корабля, но теперь пренебрежем только динамикой усилителя мощности. Тогда передаточная функция разомкнутой системы примет вид:

$$KG(s)H(s) = \frac{0,05K_a}{s(0,5s + 1)(10s + 1)} = \frac{0,01K_a}{s(s + 2)(s + 0,1)} = \frac{K}{s^3 + 2,1s^2 + 0,2s}.$$

Теперь займемся построением корневого годографа.

Правило 2. Корневой годограф начинается в полюсах $s = 0$, $s = -0,1$ и $s = -2$ и заканчивается в трех нулях, находящихся в бесконечности.

Правило 3. Имеются три асимптоты, расположенные под углами $\pm 60^\circ$ и 180° и пересекающиеся в точке на действительной оси с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{\text{число полюсов} - \text{число нулей}} = \frac{-0,1 - 2 - 0}{3 - 0} = \frac{2,1}{3} = -0,7.$$

Правило 4. Корневой годограф включает в себя часть действительной оси в интервалах $-0,1 < s < 0$ и $s < -2$.

Правило 5. Точки отрыва определяются из условия:

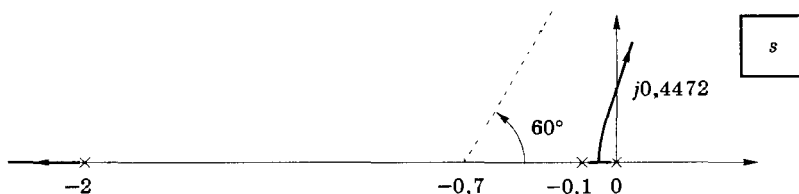
$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = (1)(3s^2 + 4,2s + 0,2) - 0 = 3(s^2 + 1,4s + 0,0667) = 0.$$

Точки отрыва соответствуют корням этого уравнения $s = -0,0494$ и $s = -1,351$. Поскольку вторая точка не принадлежит корневому годографу, то он имеет единственную точку отрыва $s = -0,0494$.

Корневой годограф (его верхняя часть) изображен на рис. 7.13. Заметим, что при увеличении коэффициента усиления система становится неустойчивой. Для определения условий устойчивости воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 = s^3 + 2,1s^2 + 0,2s + 0,01K_a.$$

Рис. 7.13
Корневой
годограф
к примеру
7.7



Составим таблицу Рауса:

s^3	1	0,2	
s^2	2,1	0,01 K_a	
s^1	$\frac{0,42 - 0,01K_a}{2,1}$		$\Rightarrow K_a < \frac{0,42}{0,01} = 42$
s^0	0,01 K_a		$\Rightarrow K_a > 0$

Таким образом, система устойчива при $0 < K_a < 42$. Границе устойчивости соответствует коэффициент усиления усилителя мощности $K_a = 42$, причем дополнительный полином, исходя из таблицы Рауса (из коэффициентов строки s^2), равен

$$Q_a(s) = 2,1s^2 + 0,01(42) = 2,1(s^2 + 0,2).$$

Следовательно, при $K_a = 42$ в системе будут возникать колебания с частотой $\omega = \sqrt{0,2} = 0,4472$ рад/с. Период колебаний $T = 2\pi/0,4472 = 14,1$ с является достаточно большим, что объясняется значительной инерционностью корабля.

Этот пример показывает, что если пренебречь полюсом передаточной функции разомкнутого контура при $s = -2$, то система будет устойчива при всех положительных значениях коэффициента усиления. Если же этот полюс учесть в модели системы, то она будет устойчивой только при $0 < K_a < 42$. Комментарии по этому поводу мы сделаем после рассмотрения следующего примера.

Пример 7.8

Продолжим анализ системы управления курсом корабля и рассмотрим ее полную модель четвертого порядка. Согласно рис. 7.11, передаточная функция разомкнутого контура равна

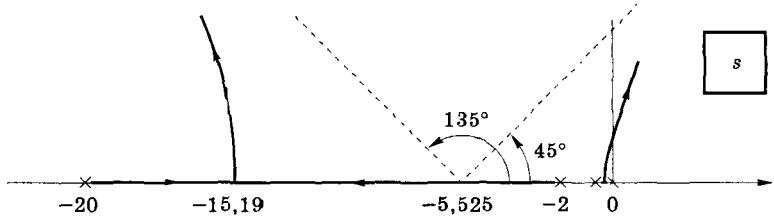
$$KG(s)H(s) = \frac{0,05K_a}{s(0,05s+1)(0,5s+1)(10s+1)} = \frac{0,2K_a}{s(s+20)(s+2)(s+0,1)} = \frac{K}{s^4 + 22,1s^3 + 42,2s^2 + 4s}.$$

Читателю предоставляется возможность в порядке упражнения с помощью известных правил провести построение корневого годографа.

Корневой годограф (его верхняя часть) изображен на рис. 7.14. Заметим, что при увеличении коэффициента усиления система становится неустойчивой. Для определения условий устойчивости воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 = s^4 + 22,1s^3 + 42,2s^2 + 4s + 0,2K_a.$$

Рис. 7.14
 Корневой
 годограф к
 примеру 7.8



Составим таблицу Рауса:

s^4	1	42,2	$0,2K_a$	
s^3	22,1	4		
s^2	42,02	$0,2K_a$		
s^1	$\frac{168,1 - 4,42K_a}{42,02}$		$\Rightarrow K_a < \frac{168,1}{4,42} = 38,03$	
s^0	$0,2K_a$		$\Rightarrow K_a > 0$	

Границе устойчивости соответствует коэффициент усиления усилителя мощности $K_a = 38,03$, а дополнительный полином можно получить, исходя из таблицы Рауса:

$$Q_a(s) = 42,02s^2 + 0,2(38,03) = 42,02(s^2 + 0,1810).$$

Таким образом, при $K_a = 38,03$ в системе будут возникать колебания с частотой $\omega = \sqrt{0,1810} = 0,4254$ рад/с.

Следующая программа MATLAB вычисляет точки отрыва и проверяет построение корневого годографа:

```
roots([4 66.3 84.4 4]), pause
rlocus([1], [1 22.1 42.2 4 0])
```

Сравнительная оценка результатов трех примеров приведена в таблицах 7.3, 7.4 и 7.5.

Таблица 7.3 Устойчивость для примеров 7.6, 7.7 и 7.8

Пример	Значение K_a , соответствующее границе устойчивости	Частота колебаний
7.6	Всегда устойчива	—
7.7	42	0,4472 рад/с
7.8	38,03	0,4254 рад/с

Таблица 7.4 Полюсы для примеров 7.6, 7.7 и 7.8

Пример	$K_a = 1$	$K_a = 20$	$K_a = 40$
7.6	$-0,05 \pm j0,05$	$-0,05 \pm j0,3123$	$-0,05 \pm j0,4444$
7.7	$-0,0486 \pm j0,0515$ -2,003	$-0,0250 \pm j0,3113$ -2,050	$-0,00218 \pm j0,4369$ -2,0096
7.8	$-0,0486 \pm j0,0513$ -2,002 -19,99997	$-0,0226 \pm j0,3111$ -2,055 -19,9994	$0,00236 \pm j0,4358$ -2,106 -19,9990

Таблица 7.3 показывает, что модель второго порядка (пример 7.6) неадекватно описывает свойства системы при больших коэффициентах усиления (порядка 40), т.к. в действительности она при таких значениях K_a является неустойчивой; модель же второго порядка этой неустойчивости не обнаруживает. Из таблицы 7.4 видно, что при $K_a = 1$ доминирующие полюсы для всех трех моделей примерно одинаковы; однако при $K_a = 20$ и $K_a = 40$ модель второго порядка опять оказывается неадекватной.

Таблица 7.5 Параметры ζ и ω_n для примеров 7.6, 7.7 и 7.8

Пример	$K_a = 1$	$K_a = 20$	$K_a = 40$
7.6	$\zeta = 0,707$ $\omega_n = 0,0707$	$\zeta = 0,158$ $\omega_n = 0,562$	$\zeta = 0,111$ $\omega_n = 0,669$
7.7	$\zeta = 0,686$ $\omega_n = 0,0708$	$\zeta = 0,080$ $\omega_n = 0,559$	$\zeta = 0,0497$ $\omega_n = 0,661$
7.8	$\zeta = 0,688$ $\omega_n = 0,0707$	$\zeta = 0,072$ $\omega_n = 0,558$	Неустойчива

При коэффициентах усиления, близких к 20, удовлетворительные результаты дает модель третьего порядка; добавление полюса $s = -20$ не оказывает существенного влияния на коэффициент затухания ζ и собственную частоту ω_n , определяемые доминирующими полюсами (см. табл. 7.5). При коэффициентах усиления 40 и более уже необходима модель четвертого порядка, т.к. при $K_a = 40$ модель третьего порядка соответствует устойчивой системе, тогда как на самом деле реальная система неустойчива.

Из трех рассмотренных примеров следует, что при малых коэффициентах усиления систему можно аппроксимировать парой комплексных доминирующих полюсов, но при больших коэффициентах усиления необходимо повышать порядок модели. Это можно видеть из того, какой вклад вносят полюсы в угловой критерий (7-8) корневого годографа. При малых коэффициентах усиления вклад полюсов $s = -2$ и $s = -20$ очень незначителен, и им можно пренебречь, но при больших значениях K_a уже нельзя пренебрегать вкладом полюса $s = -2$. При еще больших значениях K_a нельзя пренебрегать ни одним из полюсов.

В заключение отметим, что понижение порядка модели системы связано с исключением из передаточной функции таких сомножителей первого и второго порядка, которые не оказывают существенного влияния на характеристики системы в области низких частот. Сначала надо попытаться избавиться от сомножителей вида $(\tau s + 1)$ с малыми значениями τ , затем от сомножителей вида

$$\left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1$$

с большими значениями ω_n , все время проверяя, как это отражается на характеристиках системы.

Мы сформулировали шесть основных правил построения корневого годографа. В литературе приводится много дополнительных правил, которые представляют ценность для тех, кто прибегает к точному графическому построению годографа. Однако, как отмечалось ранее, с помощью цифрового компьютера корневой годограф можно построить гораздо точнее, нежели это доступно любой графической процедуре. Поэтому когда требуется точное построение, необходимо использовать компьютер; если же требуется только быстрая

предварительная оценка вида корневого годографа (и, следовательно, общее представление о характеристиках системы), вполне достаточно рассмотренных выше правил.

Правила, сведенные в таблицу 7.2, применимы в случае, когда характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 0.$$

В более общем случае характеристическое уравнение может быть записано как

$$\Delta(s) = 1 + F(s) = 1 + KF_1(s) = 0,$$

где $\Delta(s)$ — это выражение Δ из формулы Мейсона, а $F(s) = KF_1(s)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы. В этом случае во всех сформулированных правилах $G(s)H(s)$ следует заменить функцией $F_1(s)$, которая, конечно, не может зависеть от K .

7.4. Некоторые особенности корневого годографа

В этом разделе мы рассмотрим некоторые особенности корневого годографа, которые могут оказаться полезными при определении его вида для систем сравнительно невысокого порядка.

Построение корневых годографов — не такая простая задача. Поэтому полезно иметь в виду некоторые типовые ситуации, которые помогут оперативно оценивать вид корневого годографа. В таблице 7.6 как раз представлены некоторые характерные корневые годографы для систем невысокого порядка. Годографы типа (е) и (ж) в данной таблице наглядно демонстрируют проблемы, которые могут возникнуть при построениях. В каждом из этих случаев передаточная функция имеет один вещественный и два комплексных полюса. Однако обратите внимание, как меняется вид годографа в зависимости от их относительного расположения. При передаточной функции данного типа только вычисление точек отрыва будет говорить о том, какой вид должен иметь корневой годограф, поскольку в случае (е) имеются две точки отрыва слева от p_1 , а в случае (ж) точек отрыва вообще нет.

Теперь обсудим одну важную особенность корневого годографа, дополняющую правила таблицы 7.2. Как было показано при доказательстве правила 5, характеристическое уравнение системы можно записать в форме (7-22):

$$D(s) + KN(s) = 0,$$

где $N(s)$ и $D(s)$ есть, соответственно, числитель и знаменатель функции $G(s)H(s)$. При заданном значении $K = K_1$ корни характеристического уравнения располагаются на корневом годографе, если s удовлетворяет уравнению

$$D(s) + K_1 N(s) = 0. \quad (7-31)$$

Теперь предположим, что коэффициент K стал больше на величину K_2 , т.е. $K = K_1 + K_2$. Характеристическое уравнение тогда примет вид

$$D(s) + (K_1 + K_2)N(s) = 0,$$

или, что то же самое,

$$1 + K_2 \left[\frac{N(s)}{D(s) + K_1 N(s)} \right] = 1 + K_2 \frac{N(s)}{D_1(s)} = 0. \quad (7-32)$$

Если рассматривать в качестве переменного параметра коэффициент K_2 , то годограф будет начинаться в точках, соответствующих положению корней характеристического уравнения при $K = K_1$, а заканчиваться будет по-прежнему в нулях исходной передаточной функции. Следовательно, ветви корневого годографа не изменятся, только начинаться они будут в других точках. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 7.9

Для системы из примера 7.5 имеем:

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

и характеристическое уравнение

$$s^2 + K(s+1) = 0.$$

При $K = 2$ это уравнение принимает вид:

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1 = 0,$$

а его корни равны $s = -1 \pm j$. Поэтому, если передаточная функция разомкнутого контура будет иметь вид

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 2s + 2},$$

то ее корневой годограф совпадает с рис. 7.10 с той лишь разницей, что начинаться он будет в точках $s = -1 \pm j$. Этот годограф показан на рис. 7.15. Этот пример показывает, что корневые годографы, представленные в таблице 7.6, могут быть использованы и для многих систем с передаточными функциями иного вида.

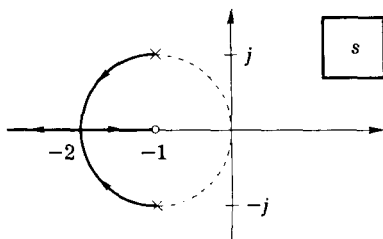


Рис. 7.15. Корневой годограф к примеру 7.9

Рассмотрим еще одно важное свойство корневого годографа, уравнение которого имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 0. \quad (7-33)$$

Построим корневой годограф для случая, когда в (7-33) переменная s будет заменена на $(s - s_1)$, где s_1 — вещественное число. Уравнение этого годографа:

$$1 + KG(s - s_1)H(s - s_1) = 0. \quad (7-34)$$

Предположим, что $s = s_0$ является корнем уравнения (7-33) при некотором значении $K = K_0$. Тогда, при том же K_0 , $(s - s_1) = s_0$ удовлетворяет уравнению (7-34). Иначе говоря, при данном K_0 уравнение (7-34) имеет корень $s = s_0 + s_1$. Это означает, что сдвиг всех полюсов и нулей передаточной функции на постоянную величину s_1 эквивалентен сдвигу всего корневого годографа на такую же величину. Проиллюстрируем это свойство на примере.

Пример 7.10

Корневой годограф для системы с передаточной функцией

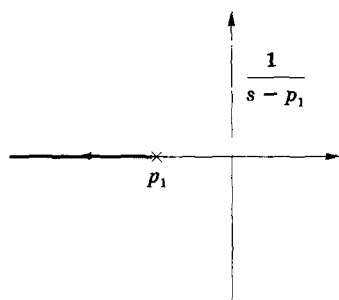
$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

был построен в примере 7.5; он воспроизводится еще раз на рис. 7.16 (а). Тогда корневой годограф для системы с передаточной функцией

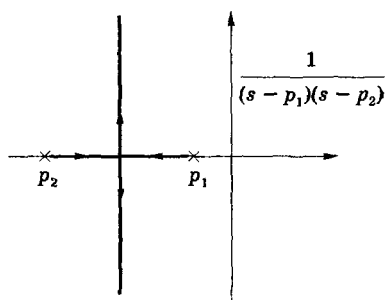
$$G(s)H(s) = \frac{(s+2)+1}{(s+2)^2} = \frac{s+3}{(s+2)^2}$$

будет иметь ту же самую форму, но только он сдвинут на две единицы влево. Он изображен на рис. 7.16 (б).

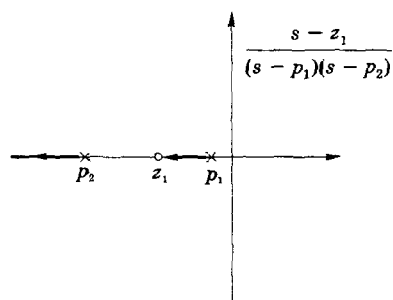
Таблица 7.6



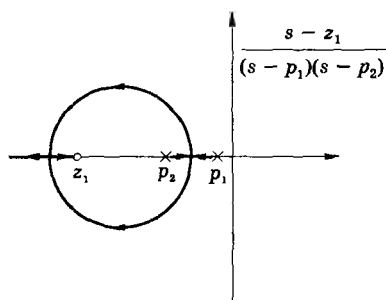
(a)



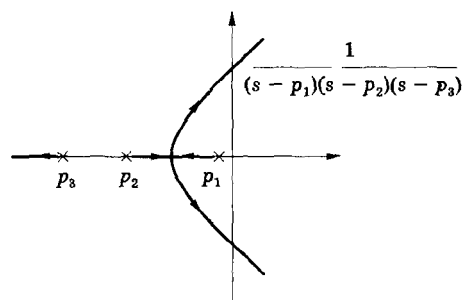
(б)



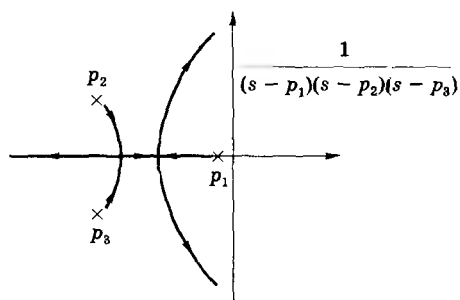
(в)



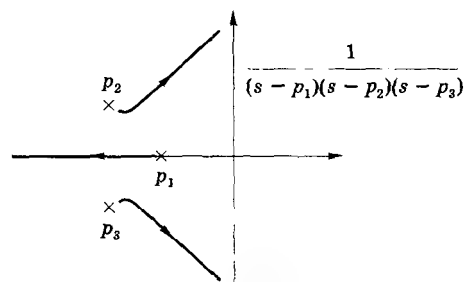
(г)



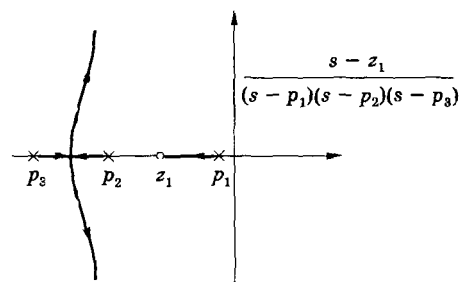
(д)



(е)



(ж)



(з)

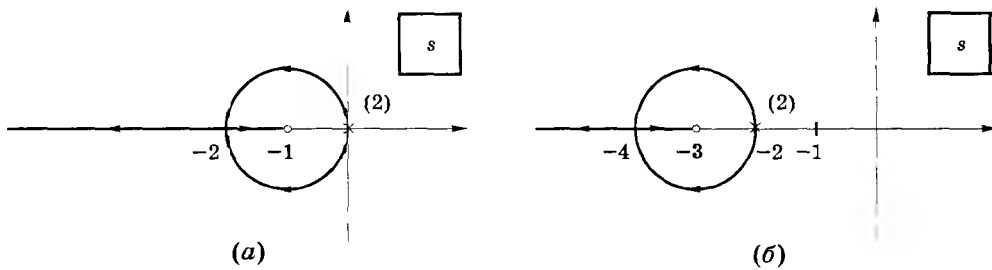


Рис. 7.16. Корневые годографы к примеру 7.10

Последнее свойство мы приведем без доказательства. Оно заключается в том, что корневой годограф обладает симметрией в точке отрыва. Например, если два корня сходятся вместе, а затем расходятся, то углы между четырьмя ветвями годографа в точке отрыва всегда будут равны $360^\circ/4 = 90^\circ$. Это видно из рис. 7.2 и 7.16. Если три корня сходятся вместе, а затем расходятся, то углы между шестью ветвями годографа в точке отрыва всегда будут равны $360^\circ/6 = 60^\circ$. Если годограф начинается в точке, соответствующей полюсу кратности три, как на рис. 7.5, то углы между ветвями будут равны 120° . Если годограф начинается в полюсе второго порядка, то углы между его ветвями будут равны 180° , как на рис. 7.16.

7.5. Другие конфигурации

Во всех предыдущих разделах предполагалось, что корневой годограф представляет собой траектории корней характеристического уравнения

$$1 + KG(s)H(s) = 0, \quad (7-35)$$

где $KG(s)H(s)$ — передаточная функция разомкнутого контура, а коэффициент K линейно входит в это уравнение и изменяется в диапазоне от 0 до ∞ . Однако метод корневого годографа можно обобщить применительно к другим конфигурациям систем и параметру, отличному от коэффициента усиления. Для этого просто необходимо рассматриваемое характеристическое уравнение привести к виду (7-35), где роль K играет варьируемый параметр, а $G(s)H(s)$ есть функция, удовлетворяющая этому уравнению и не зависящая от K .

Проиллюстрируем эту процедуру на примере. Рассмотрим замкнутую систему, изображенную на рис. 7.17 (а), и найдем траектории корней характеристического уравнения при изменении параметра α . Сначала запишем характеристическое уравнение:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{5}{s(s + \alpha)} = 0,$$

или

$$s^2 + \alpha s + 5 = 0.$$

Далее выделим члены, в которые α не входит множителем, и разделим на них все уравнение:

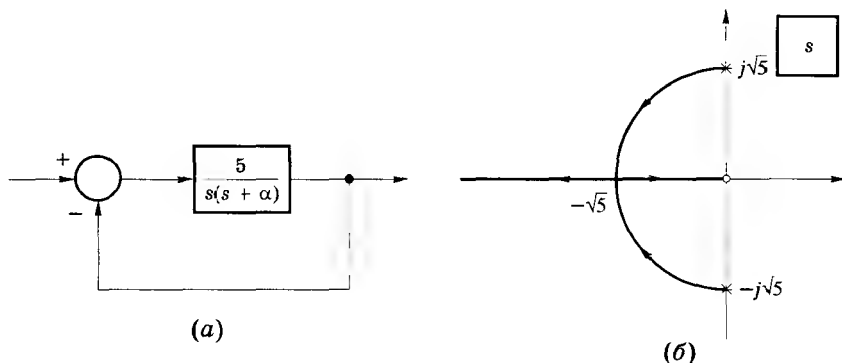
$$(s^2 + 5) + \alpha s = 0,$$

и

$$1 + \alpha \frac{s}{s^2 + 5} = 0.$$

Рис. 7.17

Корневой
годограф
при
изменении
параметра α



Это уравнение теперь представлено в форме (7-35), где эквивалентом K является параметр α , а роль функции $G(s)H(s)$ играет выражение $s/(s^2 + 5)$. Соответствующий ему корневой годограф начинается в полюсах $s = \pm j\sqrt{5}$ и заканчивается в нулях, расположенных в начале координат и в бесконечности, как показано на рис. 7.17 (б).

В общем случае характеристическое уравнение должно иметь в левой части алгебраический полином, в котором все члены, не содержащие множитель α , необходимо принять за функцию $D_e(s)$. Остальные члены, содержащие множитель α , объединяются в функцию $N_e(s)$, так что характеристическое уравнение принимает вид:

$$D_e(s) + \alpha N_e(s) = 0.$$

Затем это уравнение делится на $D_e(s)$, что дает в итоге:

$$1 + \alpha \frac{N_e(s)}{D_e(s)} = 1 + K_e G_e(s) H_e(s) = 0, \quad (7-36)$$

где $K_e = \alpha$ и $G_e(s)H_e(s) = N_e(s)/D_e(s)$. После этого нетрудно построить корневой годограф, пользуясь известными правилами.

Пример 7.11

Применим метод корневого годографа к синтезу системы регулирования температуры из примера 5.7, в которой используется ПИ-регулятор. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + G_c(s)G_p(s)H_k = 1 + \left(K_p + \frac{K_I}{s} \right) \left(\frac{0,25}{s + 0,1} \right) = 1 + \frac{0,25(K_p s + K_I)}{s(s + 0,1)} = 0.$$

Предположим, что по заданному ограничению на величину установившейся ошибки выбран коэффициент $K_I = 1$, и нам необходимо построить корневой годограф в зависимости от параметра K_p . Тогда последовательные операции с характеристическим уравнением дают:

$$s(s + 0,1) + 0,25(K_p s + 1) = 0,$$

или

$$s^2 + 0,1s + 0,25 + 0,25K_p s = 0,$$

или, в форме (7-36),

$$1 + 0,25K_p \frac{s}{s^2 + 0,1s + 0,25} = 0.$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутого контура имеет нуль в начале координат и два полюса в точках $s = -0,05 \pm j0,497$. Корневой годограф изображен на рис. 7.18. Читателю предоставляется возможность проверить построение годографа.

Поскольку корневой годограф является функцией K_p , то достаточно легко можно найти корни характеристического уравнения. Предположим, например, что система должна обладать критическим демпфированием. Из рис. 7.18 видно, что при этом корни характеристического уравнения должны находиться в точке $s = -0,5$. Тогда из последнего характеристического уравнения можно найти значение K_p , соответствующее такому положению корней:

$$K_p = - \frac{s^2 + 0,1s + 0,25}{0,25s} \Big|_{s=-0,5} = \frac{0,45}{0,125} = 3,6.$$

Таким образом, мы получаем передаточную функцию ПИ-регулятора

$$G_c(s) = 3,6 + \frac{1}{s},$$

и синтез на этом завершен. Напомним, что коэффициент K_I выбран, исходя из требований к установившейся ошибке, а K_p — из требований к виду переходной функции.

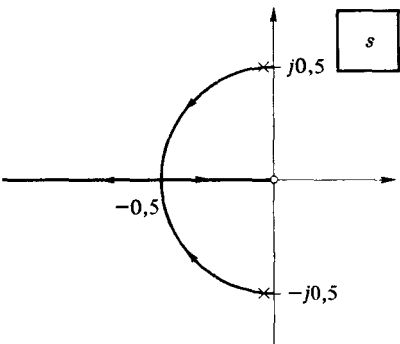


Рис. 7.18. Корневой годограф к примеру 7.11

7.6. Синтез с помощью корневого годографа

В этом разделе излагаются основы синтеза замкнутых систем управления с помощью метода корневого годографа. Этот метод дает возможность влиять на расположение, по крайней мере, некоторых полюсов передаточной функции замкнутой системы и, следовательно, на характер переходного процесса. Кроме того, мы увидим, что с помощью этого метода можно в некоторой степени влиять и на установившееся движение системы.

Применение метода корневого годографа мы рассмотрим на практическом примере синтеза системы управления положением жесткого спутника. Предположение о жесткости спутника сделано для того, чтобы ограничиться моделью второго порядка (см. раздел 2.6). Эта модель изображена на рис. 7.19 (а). Входом модели является момент $\tau(t)$, развиваемый двигателем, а выходом — угловое положение спутника θ . Сначала мы предположим, что система управления имеет вид рис. 7.19 (б). Регулятор преобразует электрический сигнал ошибки в пропорциональный ему момент двигателей. Если при синтезе единственным варьируемым параметром является коэффициент K , то корневой годограф имеет вид рис. 7.19 (в), поскольку

$$KG(s)H(s) = K \frac{1}{s^2}. \tag{7-37}$$

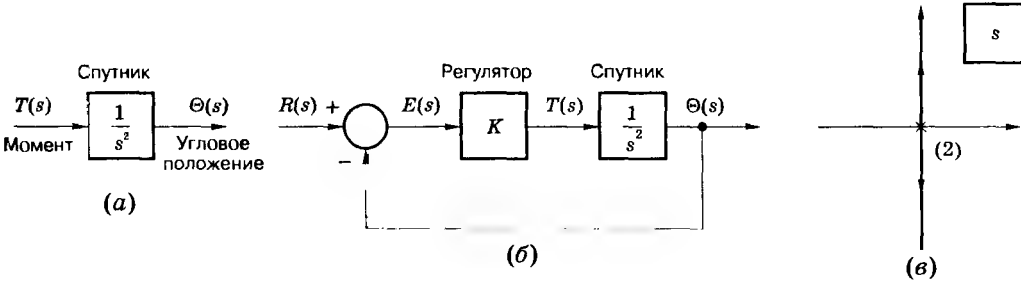


Рис. 7.19. Пример синтеза системы управления спутником

Следовательно, угловое положение спутника θ будет изменяться по синусоидальному закону при любых значениях K , т.к. система при всех $K > 0$ находится на границе устойчивости. Совершенно очевидно, что такая структура системы является неприемлемой.

Чтобы получить работоспособную систему, воспользуемся структурной схемой, изображенной на рис. 7.20 (а). В этой системе результирующий сигнал обратной связи образован двумя составляющими, одна из которых соответствует угловому положению, а другая пропорциональна угловой скорости (с коэффициентом K_v). Обычно говорят, что в такой системе использована *обратная связь по скорости, или по производной*. Передаточная функция разомкнутого контура теперь равна

$$KG(s)H(s) = K \left[\frac{K_v}{s} + \frac{1}{s^2} \right] = K \left[\frac{K_v s + 1}{s^2} \right] = KK_v \left[\frac{s + 1/K_v}{s^2} \right]. \quad (7-38)$$

Введение обратной связи по скорости позволяет изменить коэффициент усиления до значения KK_v и добавить в передаточную функцию нуль $s = -1/K_v$. Корневой годограф такой системы изображен на рис. 7.20 (б), откуда видно, что система устойчива при всех $K > 0$ и $K_v > 0$.

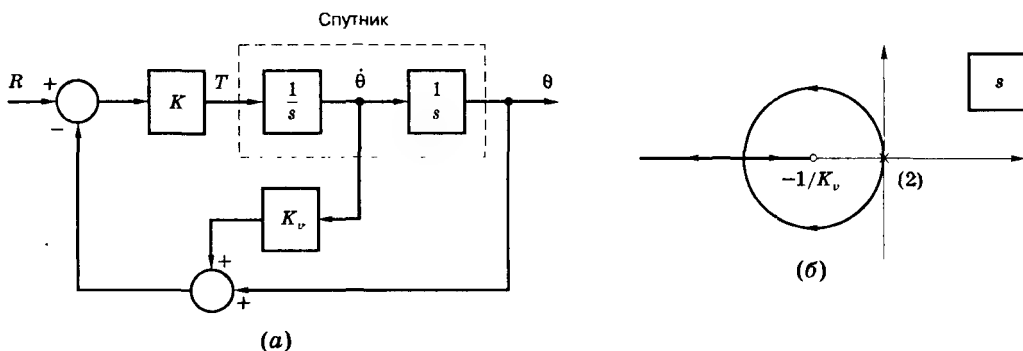


Рис. 7.20. Система управления спутником с обратной связью по скорости

Можно показать, что поскольку теперь имеются два варьируемых параметра, K и K_v , то корни характеристического уравнения системы могут быть размещены в любых точках s -плоскости (см. задачу 7.22). Этот результат говорит прежде всего о том, что в модели системы можно обеспечить практически неограниченное быстродействие. Однако не надо забывать, что ни одна модель точно не соответствует реальной системе. Например, чтобы заставить спутник в переходном режиме разогнаться со сколь угодно большой скоростью, двигатели должны развивать неограниченный момент. Разумеется, в реальной системе это невозможно, но разработанная нами модель совершенно не учитывает объективно существующие физические ограничения. Поэтому, решая задачу синтеза, не следует упускать из виду характеристики реальной системы, учитывая то, что синтез обычно производится с использованием несовершенной (и к тому же линейной) модели системы.

7.6.1. Обратная связь по скорости

Ограничения, подобные описанному выше, встречаются при синтезе любой системы управления. Тем не менее, пример с системой управления положением спутника показывает, что метод корневого годографа может с успехом применяться в процессе синтеза. Кро-

ме того, этот пример продемонстрировал также большую роль обратной связи по скорости, которая применяется во многих реальных системах управления. Учитывая важность этой обратной связи, мы продолжим ее рассмотрение, что позволит нам сделать некоторые общие выводы. После этого мы непосредственно приступим к изложению метода корневого годографа применительно к синтезу систем управления.

Сначала мы покажем, что за счет обратной связи по скорости реализуется ПД-закон (пропорционально-дифференциальный) регулирования. Как было показано ранее, обратная связь по скорости добавляет нуль в передаточную функцию разомкнутого контура, и мы можем интерпретировать это как введение в систему регулятора с передаточной функцией

$$G_c(s) = KK_v \left(s + \frac{1}{K_v} \right). \quad (7-39)$$

Для ПД-регулятора связь между его входом $e(t)$ и выходом $m(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$m(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (7-40)$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим:

$$M(s) = G_c(s)E(s) = (K_p + K_D s)E(s). \quad (7-41)$$

Сравнивая (7-39) и (7-41), мы приходим к выводу, что обратная связь по скорости эквивалентна по своему действию ПД-регулятору с параметрами

$$K_p = K \text{ и } K_D = KK_v. \quad (7-42)$$

Проблема, которую может вызвать использование ПД-регулятора, очевидна из выражения (7-41): коэффициент усиления регулятора увеличивается с ростом частоты, т.е.

$$G_c(j\omega) = K_p + j\omega K_D. \quad (7-43)$$

Если в системе присутствует высокочастотный шум, то он будет усиливаться ПД-регулятором, что является нежелательным. Обычным методом устранения этой проблемы является добавление полюса в передаточную функцию регулятора, за счет чего ограничивается его коэффициент усиления на высоких частотах. Тогда

$$G_c(s) = K_p + K_D \frac{s}{s - p_0} = \frac{K_c(s - z_0)}{(s - p_0)}. \quad (7-44)$$

Отсюда следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ функция $G_c(j\omega)$ стремится к значению K_c . Передаточная функция (7-44) соответствует типовому регулятору первого порядка, параметры которого K_c , z_0 и p_0 подлежат определению в процессе синтеза. Очевидно, что располагая тремя варьируемыми параметрами, проще удовлетворить требования, предъявляемые к системе, нежели в случае, когда можно влиять только на один или два параметра.

7.6.2. Общий случай регуляторов первого порядка

Полюс и нуль передаточной функции регулятора обычно находятся в левой полуплоскости, т.е. z_0 и p_0 представляют собой отрицательные вещественные числа. Таким образом, возможны два случая: (1) $|z_0| < |p_0|$ и (2) $|z_0| > |p_0|$. В первом случае нуль расположен ближе к началу координат, чем полюс, и их результирующий вклад в угловой критерий корневого

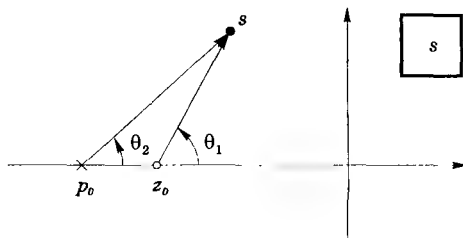


Рис. 7.21. Иллюстрация фазового сдвига, создаваемого регулятором

годографа всегда положителен. Это видно из рис. 7.21, где угол θ_1 всегда больше, чем θ_2 для любого значения s в верхней полуплоскости. Регулятор такого типа классифицируется как *регулятор с опережением по фазе*. Во втором случае, когда полюс расположен ближе к началу координат, чем нуль, говорят о регуляторе с *отставанием по фазе*, поскольку вклад нуля и полюса в угловой критерий всегда отрицателен. Эта терминология станет более понятной, когда мы рассмотрим синтез систем на основе частот-

ных характеристик (глава 9). Процедуры синтеза для этих двух случаев различны, так же, как и влияние регуляторов на свойства систем управления. В следующих разделах будут рассмотрены процедуры синтеза регуляторов с опережением по фазе и с отставанием по фазе на основе метода корневого годографа.

7.7. Синтез регулятора с опережением по фазе

В этом разделе мы рассмотрим синтез регуляторов с опережением по фазе с помощью метода корневого годографа. Для типового регулятора первого порядка передаточная функция имеет вид:

$$G_c(s) = \frac{K_c(s - z_0)}{(s - p_0)}, \quad (7-45)$$

где $|z_0| < |p_0|$, причем параметры K_c , z_0 и p_0 подлежат определению, исходя из требований, предъявляемых к системе. Прежде чем описывать процедуру синтеза, рассмотрим характеристическое уравнение скорректированной системы (т.е. системы с выбранным регулятором):

$$1 - KG_c(s)G_p(s)H(s) = 1 + \frac{KK_c(s - z_0)}{s - p_0}G_p(s)H(s)$$

Очевидно, что произведение KK_c можно рассматривать как единый параметр системы. Очень часто полагают $K = 1$ и тогда подлежит определению коэффициент усиления регулятора K_c . Мы же будем считать, что определению подлежит все произведение KK_c .

В предыдущем разделе было показано, что регулятор с опережением по фазе вносит положительный угол в угловой критерий корневого годографа (7-10), который мы еще раз напомним:

$\Sigma(\text{всех углов, обусловленных конечными нулями}) -$

$-\Sigma(\text{всех углов, обусловленных конечными полюсами}) = r(180^\circ), r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Теперь мы покажем, что регулятор с опережением по фазе за счет вносимого им положительного угла будет стремиться сдвинуть корневой годограф объекта управления влево на s -плоскости. Таким образом, улучшится качество переходного процесса, поскольку система станет более устойчивой, и, как мы вскоре увидим, повысится ее быстродействие.

Рассмотрим еще раз пример со спутником из предыдущего раздела. На рис. 7.22 (а) повторен корневой годограф нескорректированной системы, находящейся на границе устойчивости. Предположим, что по условиям синтеза доминирующие полюсы замкнутой системы должны быть расположены в точках s_1 и $\bar{s}_1$. Вклад полюсов объекта в угловой критерий (7-10) равен $-2\theta_1$, что явно превышает (с учетом знака) -180° . Однако использование регулятора с опережением по фазе, как показано на рис. 7.22 (б), изменяет вид углового критерия (7-10):

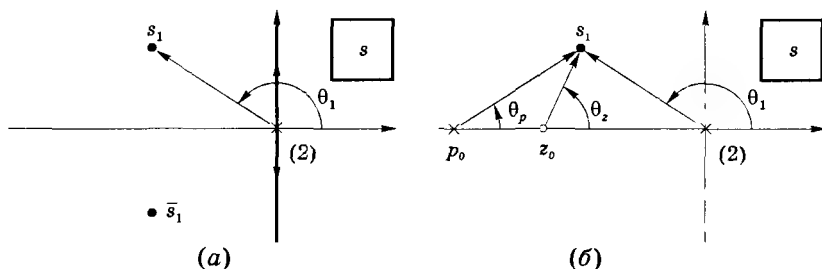
$$\theta_z - \theta_p - 2\theta_1 = -180^\circ.$$

Следовательно, задачей синтеза является выбор значений z_0 и p_0 , удовлетворяющих этому соотношению.

Данным примером мы проиллюстрировали применение метода корневого годографа к синтезу системы управления конкретным объектом. В общем случае порядок знаменателя передаточной функции объекта выше, чем порядок числителя (конечных полюсов больше, чем конечных нулей). В результате сдвиг корневого годографа нескорректированной системы влево на s -плоскости даст сумму углов в угловом критерии (7-10) меньше, чем 180° . Следовательно, если мы желаем сдвинуть корневой годограф влево, то *необходим* регулятор с опережением по фазе, который добавляет положительный угол в сумму углов критерия (7-10).

Синтез может быть выполнен методом проб и ошибок. На рис. 7.22 (б) при фиксированном значении s_1 существуют различные комбинации взаимного расположения z_0 и p_0 (но при этом p_0 всегда находится слева от z_0), при которых удовлетворяется угловой критерий. Следовательно, если можно найти хотя бы одну передаточную функцию регулятора, то существуют и многие другие ее варианты. В то же время данная задача может быть решена аналитически, что и будет рассмотрено в следующем разделе.

Рис. 7.22
Влияние
коррекции
на угловой
критерий



7.8. Аналитическое проектирование регулятора с опережением по фазе

Данный раздел посвящен изложению процедуры аналитического проектирования регулятора с опережением по фазе. Доказательство основных соотношений, используемых в этой процедуре, приведено в [4]. Для решения задачи передаточную функцию регулятора удобно представить в виде:

$$G_c(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}. \quad (7-46)$$

Целью синтеза является выбор значений a_0 , a_1 и b_1 таким образом, чтобы при некотором s_1 удовлетворялось уравнение

$$KG_c(s)G_p(s)H(s)|_{s=s_1} = -1. \quad (7-47)$$

Иначе говоря, надо синтезировать такой регулятор, который размещал бы корень характеристического уравнения системы в точке $s = s_1$, причем в общем случае s_1 надо рассматривать как комплексное число.

Уравнение (7-47) распадается на два уравнения (для модулей и для аргументов), а неизвестных — четыре, включая K . Поэтому какие-то две переменные должны быть заданы. Поскольку можно записать

$$KG_c(s) = \frac{Ka_1s + Ka_0}{b_1s + 1}, \quad (7-48)$$

то отсюда видно, что фактически мы имеем три независимых неизвестных параметра, и чтобы упростить процедуру синтеза, примем $K = 1$. Тогда, при $K = 1$,

$$G_c(s)G_p(s)H(s)|_{s=s_1} = \left[\frac{a_1s_1 + a_0}{b_1s_1 + 1} \right] G_p(s_1)H(s_1) = -1. \quad (7-49)$$

Поскольку в общем случае s_1 есть комплексное число, то и каждый сомножитель в этом уравнении является комплексным. Тогда, приравнявая модули и аргументы, мы получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1s_1 + a_0}{b_1s_1 + 1} \right| |G_p(s_1)H(s_1)| &= 1, \\ \arg \left[\frac{a_1s_1 + a_0}{b_1s_1 + 1} \right] + \arg[G_p(s_1)H(s_1)] &= 180^\circ. \end{aligned} \quad (7-50)$$

Итак, мы имеем два уравнения и три неизвестных a_0 , a_1 и b_1 ; следовательно, мы можем задать значение любой одной из неизвестных и получить решение для двух других. В общем случае, исходя из требований к переходному процессу системы управления, мы можем задать желаемое расположение полюса s_1 . Кроме того, мы предполагаем, что коэффициент усиления регулятора a_0 уже вычислен по заданному ограничению на величину установившейся ошибки. Тогда в уравнениях (7-50) неизвестными являются только a_1 и b_1 .

Сначала мы представим

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad (7-51)$$

и

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)|e^{j\psi}. \quad (7-52)$$

Решение уравнений (7-50) относительно a_1 и b_1 тогда имеет вид (см. [4]):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sin \beta + a_0 |G_p(s_1)H(s_1)| \sin(\beta - \psi)}{|s_1| |G_p(s_1)H(s_1)| \sin \psi}, \\ b_1 &= \frac{\sin(\beta + \psi) + a_0 |G_p(s_1)H(s_1)| \sin \beta}{-|s_1| \sin \psi}. \end{aligned} \quad (7-53)$$

Если известны a_0 , $G_p(s)H(s)$ и желаемое расположение полюса замкнутой системы s_1 , то выражения (7-53) определяют недостающие коэффициенты передаточной функции регулятора. С помощью рассмотренной процедуры мы размещаем полюс замкнутой систе-

мы в точке s_1 ; однако положение остальных полюсов нам не известно и может оказаться совершенно недопустимым: *некоторые из них могут оказаться в правой полуплоскости*, а это означает, что система является неустойчивой. Разумеется, в этом случае синтез нельзя считать приемлемым.

В случае, когда $\psi = 180^\circ$ (полюс s_1 находится на отрицательном направлении действительной оси), уравнения (7-53) сводятся к одному уравнению:

$$a_1 |s_1| \cos \beta - \frac{b_1 |s_1|}{|G_p(s_1)H(s_1)|} \cos \beta - \frac{1}{|G_p(s_1)H(s_1)|} + a_0 = 0. \quad (7-54)$$

В этом случае надо задаться значением либо a_1 , либо b_1 . Теперь проиллюстрируем рассмотренную процедуру синтеза на примере.

Пример 7.12

Этот пример посвящен синтезу системы управления спутником (см. раздел 7.6 и рис. 7.19), где

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{и} \quad H(s) = 1.$$

Зададимся значением

$$s_1 = |s_1| e^{j\beta} = -2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j135^\circ},$$

чтобы этот полюс в паре с комплексно-сопряженным соответствовал параметрам $\zeta = 0,707$ и $\tau = 0,5$ с. Тогда

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)| e^{j\psi} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s_1 = -2+j2} = \frac{1}{8} e^{-j270^\circ}.$$

Следовательно, $\beta = 135^\circ$ и $\psi = -270^\circ$. Выберем наугад значение $a_0 = 8/3$. Тогда, на основании (7-53):

$$a_1 = \frac{\sin 135^\circ + (8/3)(1/8)\sin 45^\circ}{(2\sqrt{2})(1/8)\sin(-270^\circ)} = \frac{(1/\sqrt{2})(1 + 1/3)}{\sqrt{2}/4} = \frac{8}{3}.$$

$$b_1 = \frac{\sin(-135^\circ) + (8/3)(1/8)\sin 135^\circ}{-(2\sqrt{2})\sin(-270^\circ)} = \frac{-(1/\sqrt{2})(1 - 1/3)}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, передаточная функция регулятора

$$KG_c(s) = \frac{(8/3)s + (8/3)}{(1/6)s + 1}.$$

Синтез можно проверить с помощью следующей программы MATLAB:

```
a0 = 8/3;
s1 = -2 + 2*j;
Gp = tf([1], [1 0 0]);
Gps1 = evalfr(Gp, s1);
beta = angle(s1);
psi = angle(Gps1);
a1 = (sin(beta) + a0*abs(Gps1)*sin(beta - psi))/...
    (abs(s1)*abs(Gps1)*sin(psi));
b1 = (sin(beta + psi) + a0*abs(Gps1)*sin(beta))/...
    (-abs(s1)*sin(psi));
```

В примере 7.12 значение параметра a_0 (коэффициента усиления регулятора) было выбрано абсолютно произвольно. Его можно было бы выбрать, основываясь на определенных требованиях, предъявляемых к системе, например, исходя из величины установив-

шейся ошибки, степени компенсации возмущения, чувствительности по отношению к какому-либо параметру и т.д. С точки зрения практики, значение a_0 можно задать по-разному в зависимости от того, какому показателю отдается приоритет. Поскольку модель объекта никогда не является точной, то и реакция реальной системы никогда не будет точно соответствовать реакции своей модели, более того — они могут существенно отличаться. Эту проблему можно решить двумя способами: либо предложить несколько вариантов синтеза, которые могут быть проверены путем испытания реальной системы, либо использовать более точную модель системы (с учетом нелинейностей). Возможно, в каком-то одном из этих случаев результат окажется приемлемым. Если ни один из этих приемов все-таки не дает удовлетворительного результата, то имеет смысл поэкспериментировать с системой и использовать какой-то другой подход. Вообще говоря, синтез системы — это *итерационная процедура*; обычно первая попытка испытания реальной системы оказывается неудачной, хотя, работая с моделью, и был получен приемлемый результат. Следующий пример продемонстрирует некоторые особенности синтеза, отмеченные выше.

Пример 7.13

Еще раз обратимся к системе управления положением спутника из примера 7.12. Исследуем влияние изменения коэффициента усиления регулятора (параметр a_0) на характеристики системы. Передаточные функции регулятора при разных значениях a_0 приведены в таблице 7.7. Скорректированная система имеет третий порядок, причем два полюса ее передаточной функции в замкнутом состоянии имеют значение $s = -2 \pm j2$. Положение третьего полюса, рассчитанное с помощью компьютера, также приведено в таблице 7.7. Все данные соответствуют значениям коэффициента усиления регулятора от 0,1 до 6,0. При коэффициенте усиления регулятора больше 7,0 система становится неустойчивой, т.к. третий полюс находится в правой полуплоскости.

Таблица 7.7. Результаты примера 7.13

Коэффициент усиления регулятора	$G_d(s)$	Положение третьего полюса	Перерегули- рование, %
0,1	$\frac{8,203s + 0,4051}{s + 4,051}$	-0,0506	7
1,0	$\frac{10,29s + 4,571}{s + 4,571}$	-0,571	23
2,667	$\frac{16,0s + 16,0}{s + 6,0}$	-2,0	33
6,0	$\frac{56,0s + 96,0}{s + 16,0}$	-12,0	30

Из таблицы 7.7 следует, что с ростом коэффициента усиления регулятора постоянная времени, соответствующая третьему полюсу передаточной функции замкнутой системы, уменьшается от примерно 20 с до 0,083 с. На рис. 7.23 приведены переходные функции скорректированной системы. Обратите внимание, как увеличивается перерегулирование с ростом коэффициента усиления регулятора. Если бы мы имели дело со стандартной системой второго порядка, то полюсам $s = -2 \pm j2$ (т.е. при $\zeta = 0,707$) соответствовало бы перерегулирование порядка 5%, что следует из рис. 4.8. Что же касается системы третьего порядка, с которой мы имеем дело в данном примере, то для нее перерегулирование изменяется от приблизительно 7% до 33%. Для си-

системы, в которой регулятор имеет коэффициент усиления 0,1, перерегулирование составляет около 7%, но третьему полюсу соответствует постоянная времени 20 с. При использовании регулятора с коэффициентом усиления 6 перерегулирование достигает 30%, но третьему полюсу соответствует постоянная времени 0,083 с. Таким образом, налицо компромисс между перерегулированием и временем установления.

Отметим еще один важный момент. Регулятор с коэффициентом усиления 0,1 на высоких частотах обладает коэффициентом передачи

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_c(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{8,203(j\omega) + 0,4051}{j\omega - 4,051} = 8,203.$$

Таким образом, отношение этого коэффициента к коэффициенту усиления на нулевой частоте равно 82,03, что является *слишком* большим. Аналогичным образом мы можем вычислить это отношение для регулятора с коэффициентом усиления 6; оно равно 56/6, или 9,33, что является более приемлемым. В реальной системе при использовании регулятора с коэффициентом усиления 0,1 могут возникнуть проблемы, связанные с влиянием высокочастотных шумов и необходимостью учета нелинейностей.

Как видно из данного примера, стремление к уменьшению времени установления приводит к увеличению перерегулирования. С другой стороны, уменьшение перерегулирования связано с увеличением времени установления и с усилением влияния высокочастотных шумов. Тем самым лишний раз показано, что синтез требует поиска компромиссного решения.

Теперь обсудим важный практический момент. Регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = \frac{K_c(s - z_0)}{s - p_0},$$

а его частотная функция равна

$$G_c(j\omega) = \frac{K_c(j\omega - z_0)}{j\omega - p_0}. \quad (7-55)$$

На нулевой частоте регулятор обладает усилением $G_c(0) = K_c z_0 / p_0$, а на высоких частотах его коэффициент передачи равен

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_c(j\omega) = K_c.$$

Следовательно, отношение коэффициента передачи на высоких частотах к коэффициенту усиления на нулевой частоте равно p_0/z_0 , и для регулятора с опережением по фазе эта величина больше единицы. Если выбрать это отношение слишком большим, есть серьезная опасность столкнуться с проблемой учета высокочастотного шума. Иногда это отношение эмпирически ограничивается цифрой 10, но все зависит от вида конкретной физической системы и, в частности, от наличия в ней шума.

Пример 7.14

В данном примере мы рассмотрим, как с помощью MATLAB можно рассчитать показатели, отраженные в таблице 7.7, и построить графики на рис. 7.23. Программа, вычисляющая дан-

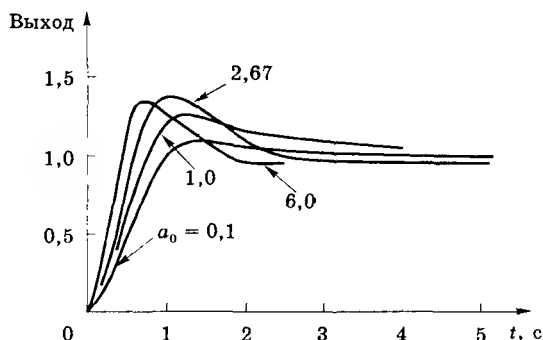


Рис. 7.23. Переходные функции к примеру 7.13

ные табл. 7.7, имеет вид:

```
a0 = [0.1 1 2.667 6];
Gp = tf([1], [1 0 0]);
s1 = -2 + i*2; slmag = abs(s1); beta = angle(s1);
Gps1 = evalfr(Gp, s1);
Gpslmag = abs(Gps1); psi = angle(Gps1);
t = 0:0.05:5; % for simulation
for k = 1:4
    a1 = (sin(beta) + a0(k)*Gpslmag*sin(beta - psi))/...
        (slmag*Gpslmag*sin(psi));
    b1 = (sin(beta + psi) + a0(k)*Gpslmag*sin(beta))/...
        (-slmag*sin(psi));
    Gc = tf([a1 a0(k)], [b1 1]);
    T = minreal(Gc*Gp/(1 + Gc*Gp));
    pole(T)
% step(T, t)
% hold on
end
% hold off
```

В этой программе использовано обозначение параметров регулятора из (7-46): $a_0 = a_0$, $a_1 = a_1$ и $b_1 = b_1$. Формулы (7-53) запрограммированы непосредственно. Имена переменных, начинающиеся с Gp, соответствуют параметрам объекта, с Gc — параметрам регулятора, а с T — параметрам передаточной функции замкнутой системы.

Переходные функции, изображенные на рис. 7.23, могут быть получены с помощью той же самой программы, но только при удалении трех символов % и помещении одного такого символа перед строкой *pole(T)*.

Программа MATLAB показывает, как можно использовать компьютер для синтеза системы управления. Здесь мы имеем возможность очень легко увеличить число значений коэффициента усиления регулятора a_0 и определить постоянные времени системы и перерегулирование, соответствующие каждому расположению третьего полюса. Кроме того, при необходимости можно задать также иное расположение доминирующих полюсов s_1 и $\bar{s}_1$.

Если, наконец, принято решение остановить выбор на некоторых вариантах регулятора, то можно продолжить исследование, усложнив задачу, а именно уточнить модель объекта путем повышения порядка его передаточной функции, учесть нелинейности, присутствующие в системе, а также типовые входные воздействия и возмущения, которые могут иметь место в реальных условиях.

7.9. Синтез регулятора с отставанием по фазе

В этом разделе мы остановимся на синтезе регуляторов иного типа — с отставанием по фазе. Как и ранее, будем считать, что передаточная функция регулятора имеет первый порядок, т.е.

$$G_c(s) = \frac{K_c(s - z_0)}{s - p_0}.$$

Выше было показано, что коррекция с опережением по фазе приводит к сдвигу корневого годографа влево на s -плоскости, поскольку в угловой критерий добавляется поло-

жительный угол. Выражение (7-45) при условии $|z_0| > |p_0|$ соответствует регулятору с отставанием по фазе. В этом случае в угловой критерий будет добавляться отрицательный угол, что приведет к сдвигу корневого годографа вправо на s -плоскости и к ухудшению устойчивости системы. Поэтому дополнительный фазовый сдвиг, вносимый таким регулятором, должен быть малым, чтобы свести к минимуму дестабилизирующий эффект. Это возможно только тогда, когда нуль и полюс передаточной функции регулятора расположены достаточно близко друг к другу. Теперь приступим к выработке требований, которым должен удовлетворять регулятор с отставанием по фазе.

Как было отмечено ранее, регулятор с опережением по фазе может быть использован с целью существенного сдвига влево корневого годографа. Напротив, регулятор с отставанием по фазе должен лишь незначительно сдвигать корневой годограф вправо. Поэтому такой регулятор практически не повлияет на переходную функцию системы, обусловленную доминирующими полюсами. Как мы сейчас покажем, он применяется для улучшения свойств системы в установившемся режиме.

Сначала, исключительно ради удобства, мы предположим, что регулятор (7-45) обладает единичным усилением на нулевой частоте, т.е.

$$G_c(s)|_{s=0} = \frac{K_c z_0}{p_0} = 1 \quad (7-56)$$

Следовательно,

$$K_c = \frac{p_0}{z_0} < 1 \quad (7-57)$$

Предположим, что корневой годограф нескорректированной системы проходит через точку s_1 при коэффициенте усиления K_0 и что этой точке соответствует удовлетворительное качество переходного процесса. Т.к. характеристическое уравнение нескорректированной системы имеет вид

$$1 + KG_p(s)H(s) = 0,$$

то

$$K_0 = -\frac{1}{G_p(s_1)H(s_1)}. \quad (7-58)$$

Как было отмечено ранее, значения z_0 и p_0 должны быть выбраны приблизительно одинаковыми, так что

$$G_c(s_1) = \frac{K_c(s_1 - z_0)}{s_1 - p_0} \approx K_c. \quad (7-59)$$

Кроме того, по причинам, которые будут объяснены позже, мы выберем модули z_0 и p_0 малыми по сравнению с $|s_1|$ (см. рис. 7.24).

Коэффициент усиления скорректированной системы, при котором корневой годограф будет проходить практически через ту же точку s_1 , на основании (7-58) и (7-59) будет равен

$$K = -\frac{1}{G_c(s_1)G_p(s_1)H(s_1)} = -\frac{1}{K_c G_p(s_1)H(s_1)} = \frac{K_0}{K_c}. \quad (7-60)$$

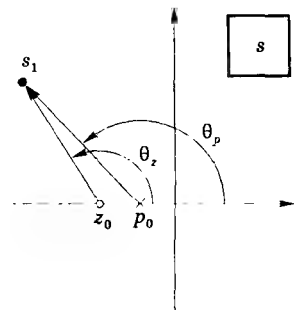


Рис. 7.24. Углы в случае коррекции с отставанием по фазе

Поскольку $K_c < 1$, то $K > K_0$. Регулятор на нулевой частоте обладает единичным коэффициентом усиления, поэтому его введение позволило увеличить коэффициент усиления контура без существенного влияния на переходный процесс. В результате точность системы в установившемся режиме повысилась, и это является основной причиной использования регуляторов с отставанием по фазе.

Заметим, что выбрав z_0 и p_0 малыми по модулю в сравнении с $|s_1|$, мы удовлетворим соотношение (7-59) и к тому же можем сделать K_c [см. (7-57)] много меньше единицы. Тем самым мы существенно повысим точность системы в установившемся режиме. Если же модули z_0 и p_0 будут велики в сравнении с $|s_1|$, но примерно одинаковы, чтобы удовлетворить (7-59), то K_c в выражении (7-57) будет приблизительно равен единице. В этом случае, как следует из (7-60), мы не получим значительного повышения точности системы.

Процедуру синтеза регулятора с отставанием по фазе можно свести к следующим этапам:

1. На основании (7-58) выбрать значение K_0 , при котором полюс передаточной функции замкнутой нескорректированной системы будет находиться в заданной (желаемой) точке s_1 .
2. Считая, что регулятор на нулевой частоте обладает единичным усилением, выбрать значение K , исходя из желаемой точности системы в установившемся режиме. Затем по формуле (7-60) определить $K_c = K_0/K$.
3. Выбрать нуль передаточной функции регулятора так, чтобы $|z_0|$ был малым по сравнению с $|s_1|$.
4. На основании (7-56) определить полюс передаточной функции регулятора $p_0 = K_c z_0$.

Проиллюстрируем процедуру синтеза регулятора с отставанием по фазе на конкретном примере. На первый взгляд, было бы разумно продолжить пример с системой управления положением спутника, где был синтезирован регулятор с опережением по фазе. Однако напомним, что регулятор с отставанием по фазе сдвигает корневой годограф нескорректированной системы вправо на s -плоскости, и это приведет к тому, что система станет неустойчивой [см. рис. 7.19 (е)]. Для системы управления спутником регулятор с отставанием по фазе не пригоден. Поэтому мы в качестве примера рассмотрим следящую систему.

Пример 7.15

Обратимся к системе радиолокационного сопровождения, представленной на рис. 7.1. Ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид

$$KG_p(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)},$$

а корневой годограф изображен на рис. 7.25. Предположим, что по условиям синтеза система должна обладать постоянной времени 1 с и коэффициентом затухания $\zeta = 0,707$. Этим показателям соответствует положение корня $s = -1 + j$. Данной точке на корневом годографе нескорректированной системы соответствует значение $K = 2$. Таким образом, этап 1 процедуры синтеза дает нам $s_1 = -1 + j$ и $K_0 = 2$.

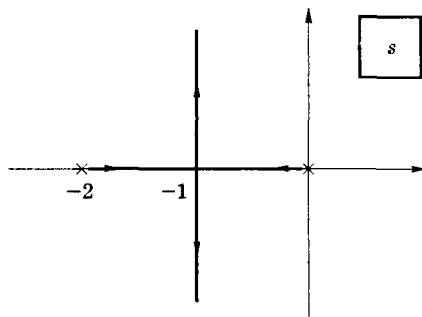


Рис. 7.25. Корневой годограф к примеру 7.15

Предположим, что система должна следить за положением самолета, движущегося с постоянной скоростью. Это эквивалентно подаче на вход системы линейно меняющегося сигнала. Следовательно, чтобы быть все время направленной на самолет, антенна должна вращаться с постоянной скоростью. По условиям синтеза при единичной скорости изменения входного сигнала установившаяся ошибка не должна превышать $0,2^\circ$, чтобы самолет всегда находился в пределах ширины луча радиолокатора. На основании (5-38) установившаяся ошибка скорректированной системы

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sKG_c(s)G_p(s)H(s)}.$$

Мы условились считать усиление регулятора на нулевой частоте равным единице; следовательно,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sKG_c(s)G_p(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s+2} = \frac{K}{2}$$

и

$$e_{ss} = \frac{2}{K}.$$

Таким образом, этап 2 процедуры синтеза дает требуемое значение коэффициента усиления $K = 10$. Тогда из соотношений (7-57) и (7-60) имеем:

$$K_c = \frac{p_0}{z_0} = \frac{K_0}{K} = \frac{2}{10}.$$

На этапе 3 зададимся значением $z_0 = -0,1$, что по модулю меньше, чем $|s_1| = \sqrt{2}$, тогда этап 4 даст значение $p_0 = K_c z_0 = -0,02$. Следовательно, передаточная функция регулятора будет равна

$$G_c(s) = \frac{0,2(s+0,1)}{s+0,02}$$

при том, что общий коэффициент усиления разомкнутой системы имеет требуемое значение $K = 10$. Этот пример мы продолжим после некоторых рассуждений.

В рассмотренном примере передаточная функция замкнутой системы имеет два полюса в точках $s = -1 \pm j$. Однако введение регулятора увеличивает порядок системы до трех. Приблизительное положение третьего полюса можно будет определить по корневому годографу, который мы построим в следующем примере.

Пример 7.16

Итак, в разомкнутом состоянии передаточная функция системы радиолокационного сопровождения имеет вид:

$$KG_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{0,2K(s+0,1)}{s(s+0,02)(s+2)}.$$

Корневой годограф этой системы изображен на рис. 7.26, причем область, прилегающая к началу координат, показана в увеличенном масштабе. При требуемом значении $K = 10$ с помощью компьютера были вычислены полюсы передаточной функции замкнутой системы:

$$s = -0,1092, -0,9454 \pm j0,9694.$$

Заметим, что вещественному полюсу соответствует постоянная времени

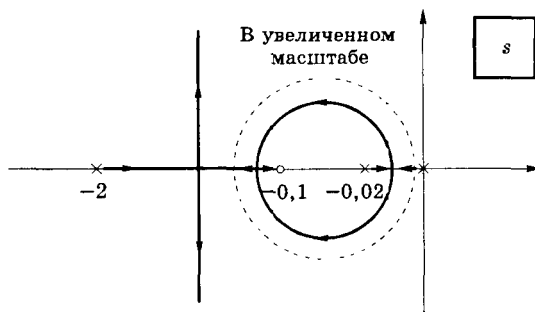


Рис. 7.26. Корневой годограф к примеру 7.16

$\tau = 1/0,1092 = 9,16$ с, и это делает систему настолько «медленной», что самолет успеет выйти из зоны луча радиолокатора прежде чем система войдет в режим установившегося движения.

Для дальнейшего анализа запишем передаточную функцию замкнутой системы:

$$T(s) = \frac{KG_c(s)G_p(s)H(s)}{1 + KG_c(s)G_p(s)H(s)} \bigg|_{K=10} = \frac{2(s+0,1)}{s^3 + 2,02s^2 + 2,04s + 0,2} =$$

$$= \frac{2(s+0,1)}{(s+0,1092)(s+0,9454 + j0,9694)(s+0,9454 - j0,9694)}.$$

Мы видим, что полюсы $s = -1 \pm j$ сдвинулись в положение $s = -0,9454 \pm j0,9694$. Кроме того, появился дополнительный полюс в точке $s = -0,1092$, которому соответствует довольно большая постоянная времени 9,16 с. Это обстоятельство делает сомнительным практическое использование такой системы. В то же время реакция данной системы (в виде изображения по Лапласу) на единичное ступенчатое воздействие равна:

$$C(s) = \frac{2(s+0,1)}{s(s+0,1092)(s^2 + 1,8908s + 1,8335)} = \frac{1}{s} + \frac{0,1028}{s+0,1092} + \frac{k_1s + k_2}{s^2 + 1,8908s + 1,8335}.$$

Несмотря на то, что одному из членов разложения соответствует составляющая переходного процесса с постоянной времени 9,16 с, величина этой составляющей незначительна и ей можно пренебречь. При входных сигналах иного вида, например, при линейной функции эта составляющая может оказаться более значительной.

Все вычисления в этом примере могут быть выполнены с помощью программы MATLAB:

```
K = 10; Gc = tf([0.2 0.02], [1 0.02]); [1 0.02]);
Gp = tf([1], [1 2 0]); H = 1;
T = mirreal(K*Gc*Gp)/(1 + K*Gc*Gp*H), pause
pole(T), pause
[n, d] = tfdata(T, 'v'), [r, p, K] = residue(n, d)
```

В заключение отметим, что для синтеза регулятора с отставанием по фазе можно также воспользоваться аналитической процедурой, описанной в разделе 7.8. Для этого просто необходимо предположить, что желаемое положение полюса находится немного правее полюса нескорректированной системы, а далее применить уже известные операции.

Теперь сделаем обобщение всех предыдущих рассуждений. За счет нуля регулятора в угловой критерий корневого годографа добавляется положительный угол, и весь годограф сдвигается влево на s -плоскости — в направлении повышения устойчивости и уменьшения постоянных времени. Полюс регулятора, напротив, приводит к добавлению отрицательного угла в угловой критерий, что имеет следствием сдвиг корневого годографа вправо на s -плоскости. Этот сдвиг приводит к увеличению постоянных времени и уменьшению устойчивости. Регулятор первого порядка имеет как нуль, так и полюс. Для регулятора с опережением по фазе преобладает влияние нуля, а для регулятора с отставанием по фазе — полюса. Разумеется, при синтезе регулятора с отставанием по фазе сдвиг корневого годографа вправо должен быть минимальным, чтобы сохранить устойчивость системы.

7.10. Синтез ПИД-регулятора

В данном разделе рассматривается синтез пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов. ПИД-регулятор — это наиболее общий тип регуляторов, используемых в системах управления. Если $e(t)$ — входной сигнал регулятора, а $m(t)$ — его выходной сигнал, то связь между ними определяется уравнением:

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (7-61)$$

Преобразование по Лапласу этого уравнения позволяет найти передаточную функцию:

$$M(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s),$$

откуда

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (7-62)$$

Структурные схемы, соответствующие выражениям (7-61) и (7-62), изображены на рис. 7.27 (а) и (б). Довольно часто в конкретной системе управления не требуется выполнение всех трех операций. Например, если необходим ПИ-регулятор, то просто нужно положить $K_D = 0$, и т.д. Дальнейшее изложение посвящено синтезу ПИД-регуляторов с помощью метода корневого годографа.

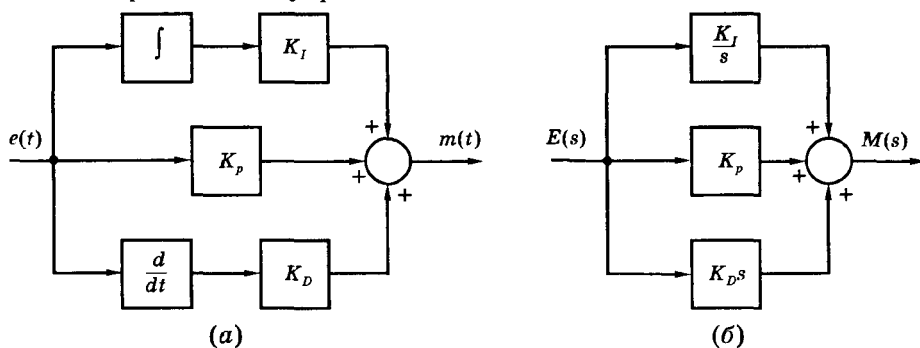


Рис. 7.27. ПИД-регулятор

7.10.1. П-регуляторы

П-регулятор — это устройство, описываемое идеальным коэффициентом усиления K_p . Таким образом, мы видим, что коэффициент K , в зависимости от которого строится корневой годограф, по сути соответствует П-регулятору, т.е. характеристическое уравнение системы принимает вид:

$$1 + K_p G_p(s) H(s) = 0. \quad (7-63)$$

Этот тип регулятора используется тогда, когда желаемых показателей качества в переходном и установившемся режимах можно достичь простой настройкой коэффициента усиления системы, не прибегая к динамическим преобразованиям сигнала. Следовательно, мы можем рассматривать построение корневого годографа нескорректированной системы как одновременный синтез этой системы, в которой используется П-регулятор.

7.10.2. ПИ-регуляторы

ПИ-регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}. \quad (7-64)$$

Этот регулятор увеличивает тип системы на единицу (см. раздел 5.5) и применяется для повышения точности системы в установившемся режиме. Его передаточную функцию можно представить в виде:

$$G_c(s) = \frac{K_p s + K_I}{s} = \frac{K_p(s + K_I/K_p)}{s}. \quad (7-65)$$

Регулятор имеет полюс в начале координат и нуль в точке $-K_I/K_p$. Поскольку нуль расположен левее полюса, то регулятор вносит отрицательный угол в угловой критерий корневого годографа (см. рис. 7.24) и обладает запаздыванием по фазе.

Скорректированная система в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$KG_c(s)G_p(s)H(s) = \left(KK_p + \frac{KK_I}{s} \right) G_p(s)H(s), \quad (7-66)$$

откуда следует, что в процессе синтеза подлежат определению два независимых параметра. Без потери общности мы можем принять $K = 1$, и тогда коэффициенты K_p и K_I должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить требования, предъявляемые к поведению системы в установившемся режиме.

7.10.3. ПД-регуляторы

Передаточная функция ПД-регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p + K_D s = K_D \left(s + \frac{K_p}{K_D} \right). \quad (7-67)$$

Таким образом, ПД-регулятор, как отмечалось в разделе 7.6, имеет единственный нуль в точке $s = -K_p/K_D$, и, следовательно, добавляет положительный угол в угловой критерий корневого годографа. Будучи регулятором с опережением по фазе, он улучшает вид переходных процессов в системе. Синтез такого регулятора может быть выполнен методом проб и ошибок, как это описано в разделе 7.6. Как и в случае ПИ-регулятора, мы можем записать:

$$KG_c(s) = KK_p + KK_D s,$$

откуда видно, что определению подлежат два независимых параметра; если положить $K = 1$, то это параметры K_p и K_D . Частотная характеристика ПД-регулятора определяется выражением

$$G_c(j\omega) = K_p + j\omega K_D, \quad (7-68)$$

и здесь опять мы имеем дело с проблемой, которая была рассмотрена в разделе 7.6. С возрастанием частоты растет и усиление ПД-регулятора за счет дифференциальной составляющей его коэффициента передачи. Если сигнал претерпевает быстрое изменение во времени, то он обладает большой производной. Поэтому ПД-регулятор будет эффективно усиливать высокочастотный шум, и чем выше частота, тем больше это усиление. Чтобы ослабить влияние высокочастотного шума, обычно в передаточную функцию ПД-регулятора включают дополнительный полюс, так что она принимает вид:

$$G_c(s) = \frac{K_D(s + K_p/K_D)}{s - p_0}. \quad (7-69)$$

Осуществив в этом выражении замену $s = j\omega$ и устремив ω к бесконечности, можно видеть, что коэффициент усиления регулятора ограничен величиной K_D . Полос в передаточной функции выбирают так, чтобы он был больше чем нуль, и регулятор по-прежнему обладал опережением по фазе. В этом случае синтез данного регулятора производят уже известным способом, как это было описано в разделе 7.7.

7.10.4. ПИД-регуляторы

ПИД-регулятор применяют в системах управления тогда, когда требуется улучшить как вид переходного процесса, так и точность в установившемся режиме. Передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид;

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}. \quad (7-70)$$

Эта передаточная функция имеет два нуля и один полюс. Чтобы ограничить усиление в области высоких частот, обычно прибегают к введению в $G_c(s)$ дополнительного полюса. Один из методов синтеза ПИД-регулятора заключается в следующем. Сначала рассчитывают ПИ-часть регулятора, исходя из требований к поведению системы в установившемся режиме. Затем ПИ-регулятор рассматривают как часть объекта и определяют ПД-часть с целью коррекции вида переходного процесса. В следующем разделе приводится несколько иная процедура синтеза ПИД-регулятора.

7.11. Аналитическое проектирование ПИД-регулятора

В этом разделе излагается аналитическая процедура синтеза ПИД-регуляторов. Как и в разделе 7.8, мы предполагаем, что основой для синтеза является заданное расположение полюса s_1 передаточной функции замкнутой системы, который в общем случае может быть комплексным. Тогда мы определяем углы β и ψ из соотношений:

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad (7-71)$$

и

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)|e^{j\psi}. \quad (7-72)$$

Уравнения для определения K_p , K_I и K_D , согласно [4], имеют вид:

$$K_p = \frac{-\sin(\beta + \psi)}{|G_p(s_1)H(s_1)|\sin\beta} - \frac{2K_I \cos\beta}{|s_1|}, \quad (7-73)$$

$$K_D = \frac{\sin\psi}{|s_1||G_p(s_1)H(s_1)|\sin\beta} + \frac{K_I}{|s_1|^2}. \quad (7-74)$$

Поскольку мы имеем три неизвестных и только два уравнения, то один из коэффициентов должен быть задан, исходя из какого-то требования к качеству системы. Например, можно выбрать определенное значение K_I по требованию к точности системы в установившемся режиме. Эти уравнения применимы также к синтезу ПИ- и ПД-регуляторов, для чего достаточно приравнять нулю соответствующий коэффициент. Процедура синтеза иллюстрируется приводимыми ниже примерами.

Пример 7.17

Этот пример мы посвятим синтезу ПД-регулятора для системы радиолокационного сопровождения (см. пример 7.15), которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$KG_p(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}.$$

Сначала мы воспользуемся процедурой синтеза, основанной на размещении полюсов и нуля замкнутой системы, а затем ту же задачу решим аналитически. Допустим, что по условиям задачи система должна иметь постоянную времени $\tau = 0,5$ с и коэффициент затухания $\zeta = 0,707$. Это означает, что замкнутая система должна иметь полюсы в точках $s = -2 \pm j2$. Из рис. 7.28 мы видим, что полюсы объекта вносят в угловой критерий корневого годографа угол -225° , и чтобы сумма углов равнялась 180° , регулятор должен добавить угол, равный 45° . Следовательно, нуль регулятора необходимо поместить в точку $s = -4$, как показано на рис. 7.28. Тогда, на основании (7-67), $K_p/K_D = 4$. Для того, чтобы полюсы замкнутой системы имели заданное значение, при $K = 1$ должно удовлетворяться соотношение:

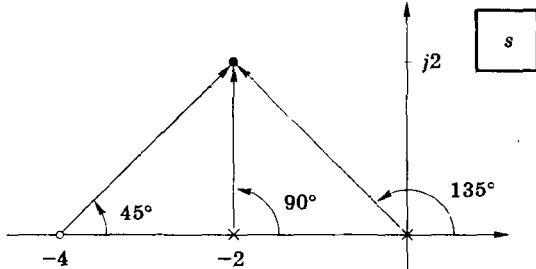


Рис. 7.28. К примеру 7.17

$$G_c(s)G_p(s)H(s)|_{s=-2+j2} = \frac{K_D(s+4)}{s(s+2)} \Big|_{s=-2+j2} = -1,$$

или

$$\frac{K_D(2+j2)}{(-2+j2)(j2)} = \frac{K_D 2\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{2\sqrt{2}e^{j135^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ}} = -\frac{K_D}{2} = -1.$$

Таким образом, $K_D = 2$, а поскольку $K_p/K_D = 4$, то $K_p = 8$.

Итак,

$$G_c(s) = 8 + 2s.$$

Корневой годограф системы приведен на рис. 7.29. Заметим, что ПД-регулятор не увеличивает порядок системы, поэтому в данном примере третий полюс отсутствует.

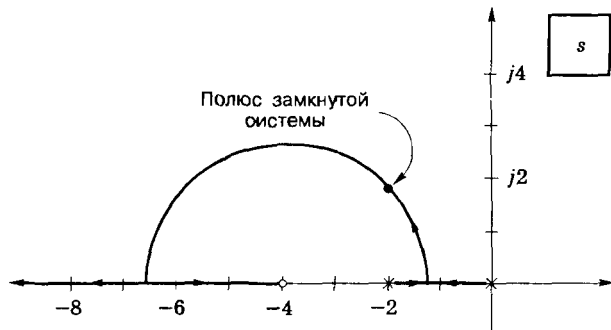
Теперь воспользуемся аналитической процедурой синтеза. В соответствии с (7-71), (7-72), (7-73) и (7-74) имеем:

$$s_1 = -2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j135^\circ};$$

$$G_p(s_1)H(s_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}e^{j135^\circ}(-2+j2+2)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-j225^\circ};$$

Рис. 7.29

Корневой годограф
к примеру 7.17



$$K_p = \frac{-\sin 270^\circ}{(1/4\sqrt{2})\sin 135^\circ} - \frac{1}{(1/4\sqrt{2})(1/\sqrt{2})} = 8;$$

$$K_D = \frac{\sin(-225^\circ)}{(2\sqrt{2})(1/4\sqrt{2})\sin 135^\circ} + \frac{1/\sqrt{2}}{(1/2)(1/\sqrt{2})} = 2.$$

Пример 7.18

В этом примере мы рассмотрим систему регулирования напряжения генератора с активной нагрузкой, которая была описана в разделе 2.7. Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$KG_p(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}.$$

Входом объекта служит напряжение, приложенное к обмотке возбуждения, а выходом — напряжение, снимаемое с якоря. Поскольку нескорректированная система относится к типу 0, то при постоянном входном сигнале (когда мы пытаемся поддерживать постоянное значение выходного напряжения) в ней будет иметь место ненулевая установившаяся ошибка. Кроме того, постоянное возмущение, например, изменение скорости вращения приводного двигателя, также будет вызывать изменение выходного напряжения в установившемся режиме. В каждом из этих случаев, чтобы свести установившуюся ошибку к нулю, необходимо ввести в систему интегратор (см. примеры 5.4 и 5.5).

Корневой годограф нескорректированной системы изображен на рис. 7.30. Если при некотором K корни ее характеристического уравнения являются комплексными, то им соответствует постоянная времени $\tau = 1/1,5 = 0,67$ с. Предположим, что по условиям синтеза система не должна иметь установившейся ошибки при постоянном входном сигнале, а ее постоянная времени должна быть равна 0,25 с. Первое требование может быть удовлетворено за счет использования ПИ-регулятора, а второе — за счет ПД-регулятора. Следовательно, налицо задача синтеза ПИД-регулятора. Ограничение на постоянную времени требует, чтобы действительная часть s_1 была равна -4 ; кроме того, зададимся значением $\zeta = 0,707$. Тогда

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} = -4 + j4 = 4\sqrt{2}e^{j135^\circ},$$

и

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)|e^{j\psi} = \frac{1}{(-3 + j4)(-2 + j4)} = 0,04472e^{-j243,4^\circ}.$$

Предположим, что $K_I = 0,1$. Тогда, поскольку $\beta = 135^\circ$ и $\psi = -243,4^\circ$, из (7-73) и (7-74) имеем:

$$K_p = \frac{-\sin(-108,4^\circ)}{0,04472\sin(135^\circ)} - \frac{2K_I\cos(135^\circ)}{4\sqrt{2}} = 30,01 + 0,25K_I = 30,03,$$

$$K_D = \frac{\sin(-243,4^\circ)}{4\sqrt{2}(0,04472)\sin(135^\circ)} + \frac{K_I}{(4\sqrt{2})^2} = 4,999 + 0,0313K_I = 5,002$$

Таким образом, ПИД-регулятор имеет параметры $K_p = 30,03$, $K_I = 0,1$ и $K_D = 5,002$. Переходная функция скорректированной системы, полученная путем моделирования, изображена на рис. 7.31. Хотя установившаяся ошибка должна гарантированно равняться нулю (система относится к типу 1), спустя 10 с после начала переходного процесса она еще отлична от нуля и равна 0,06. В следующем примере решение данной задачи будет продолжено.

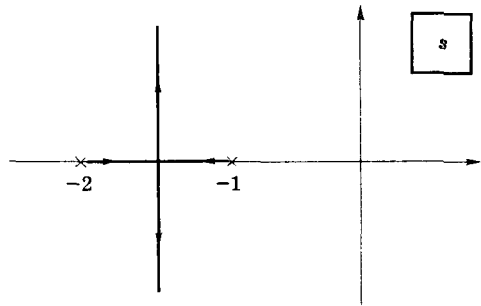
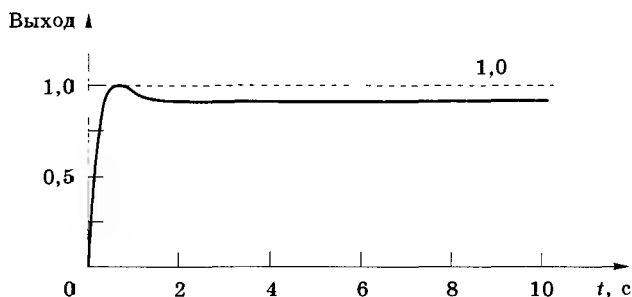


Рис. 7.30. Корневой годограф к примеру 7.18

Рис. 7.31
Переходная функция
к примеру 7.18



Пример 7.19

Хотя предыдущий пример показал, что установившееся значение ошибки равно нулю, но для этого требуется очень большой промежуток времени. Попробуем исследовать, что получится при других значениях коэффициента K_I , если доминирующие полюсы по-прежнему останутся в точках $s = -4 \pm j4$. Для этого зададимся значениями коэффициента усиления интегратора, равными 1,0 и 10,0. Как и в предыдущем примере, уравнения (7-73) и (7-74) подлежат решению при каждом значении K_I . Результат приведен в таблице 7.8. Введение ПИД-регулятора повышает порядок системы до третьего. Положение двух полюсов передаточной функции замкнутой системы определено условиями задачи, т.е. $s = -4 \pm j4$. Положение третьего полюса было вычислено с помощью компьютера и также приведено в таблице 7.8. Из этой таблицы становится понятным, почему переходный процесс, полученный в примере 7.18, является таким затянутым, — этому полюсу соответствует постоянная времени более 300 с. При $K_I = 10,0$ постоянная времени, соответствующая третьему полюсу, уменьшается примерно до 3 с. При $K_I = 0,1$ перерегулирование составляет около 3%; оно увеличивается почти до 7% при $K_I = 10,0$. Тем самым мы можем убедиться в том, как влияет коэффициент усиления интегратора на качество переходного процесса.

Таблица 7.8. Параметры ПИД-регулятора к примеру 7.19

K_P	K_I	K_D	Положение третьего полюса
30,03	0,1	5,003	-0,00313
30,25	1,0	5,031	-0,03125
32,50	10,0	5,312	-0,31250

Пример 7.20

Продолжим решение задачи синтеза, рассмотренное в примере 7.18. Здесь мы покажем, как с помощью программы MATLAB можно получить данные, представленные в таблице 7.8 и изображенные графически на рис. 7.31. Кроме того, приведенная ниже программа позволяет построить переходные функции при значениях $K_I = 1$ и $K_I = 10$. Эта программа имеет следующий вид:

```
KI = [0.1 1 10];
Gp = tf([0 0 1], [1 3 2]);
s1 = -4 + i*4; slmag = abs(s1); beta = angle(s1);
Gps1 = evalfr(Gp, s1); psi = angle(Gps1);
Gpslmag = abs(Gps1);
t = 0:0.05:5;
for k = 1:3
    KP = -sin(beta + psi)/(Gpslmag*sin(beta)) - ...
        2*KI(k)*cos(beta)/slmag;
```

```

KD = sin(psi)/(slmag*Gpslmag*sin(beta)) + KI(k)/slmag^2;
[KP KI(k) KD]
Gc = tf([KD KP KI(k)], [0 1 0]);
T = Gc*Gp/(1 + Gc*Gp);
% P = pole(T);
step(T, t)
hold on
end
hold off

```

В этой программе символ % следует удалить из той строки, где он приведен, и поместить в начало двух следующих строк. Данная программа вычисляет переходные функции системы для указанных в ней значений K_I . Параметры регулятора заданы переменными KP, KI и KD. Уравнения (7-73) и (7-74) запрограммированы непосредственно. Имена переменных, начинающиеся с Gp, соответствуют параметрам объекта, начинающиеся с Gc — параметрам регулятора, а начинающиеся с T — параметрам передаточной функции замкнутой системы.

Обсудим результаты, полученные с помощью этой программы. В таблице 7.8 приведено положение третьего полюса замкнутой системы. При $K_I = 0.1$ ему соответствует постоянная времени $\tau = 1/0.00313 = 319$ с. Такое большое значение отражается на виде переходной функции (рис. 7.31). Спустя 10 с ошибка еще составляет примерно 6%. Поскольку система относится к типу I, установившаяся ошибка должна равняться нулю, но для этого требуется приблизительно $4\tau = 1278$ с, или 21 мин. При $K_I = 1$ время установления уменьшается до $4\tau = 4/0.03125 = 128$ с, а при $K_I = 10$ — до $4\tau = 4/0.3125 = 12.8$ с. Таким образом, налицо явное сокращение длительности переходного процесса при возрастании коэффициента K_I . Если при $K_I = 0.1$ ошибка в момент $t = 10$ с составляет 6%, то при $K_I = 10$ она в тот же самый момент времени равна уже около 0.2%. Что касается перерегулирования, то оно примерно одинаково при трех различных значениях коэффициента K_I .

Приведенная выше программа MATLAB, как и в примере 7.14, иллюстрирует одну из возможных процедур синтеза системы управления.

ПИД-регулятор можно оценить также с несколько иной точки зрения. Пропорциональный канал регулятора образует на выходе составляющую, которая является функцией текущего состояния системы. Поскольку выход интегратора зависит от входного сигнала во все предшествующие моменты времени, то эта составляющая выходного сигнала регулятора определяется прошлым состоянием системы. Она не может измениться мгновенно и поэтому характеризует инерционность системы. Выход дифференциатора пропорционален скорости изменения входного сигнала, поэтому данный канал можно рассматривать в качестве предсказателя будущего состояния системы. Таким образом, дифференциальная составляющая выхода регулятора способствует улучшению вида переходного процесса в системе (сокращению его длительности). Конечно, следует отдавать отчет в том, что если входной сигнал «засорен» высокочастотным шумом, то это предсказание может привести к нежелательным результатам. Итак, ПИД-регулятор можно рассматривать как устройство, вырабатывающее сигнал, являющийся функцией прошлого, настоящего и предсказуемого состояния системы.

7.12. Дополнительный корневой годограф

В этом разделе мы сформулируем правила построения корневого годографа для случая, когда K принимает отрицательные значения, т.е. $-\infty < K \leq 0$. Такой корневой годограф иногда называют *дополнительным*.

Как и в случае положительных значений K , мы предполагаем, что характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 0. \quad (7-75)$$

Следовательно, независимо от знака K , условие принадлежности точки s_1 корневому годографу (если K — вещественное число) формулируется в виде:

$$K = -\frac{1}{G(s_1)H(s_1)}.$$

Для случая отрицательных значений K мы имеем:

$$|K| = \frac{1}{G(s_1)H(s_1)}. \quad (7-76)$$

Следовательно, амплитудный критерий (7-7) имеет тот же вид, что и для положительных значений K , однако угловой критерий выглядит иначе:

$$\arg G(s)H(s) = r(360^\circ), \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7-77)$$

Сравнивая выражения (7-77) и (7-8), мы видим, что в угловом критерии для отрицательных K главное значение аргумента $G(s_1)H(s_1)$ должно быть равно 0° , а не 180° , как это было для положительных значений K . Обратив внимание на это отличие, мы можем теперь сформулировать правила построения корневого годографа для отрицательных значений K . Вот эти шесть правил:

1. Корневой годограф симметричен относительно действительной оси.
2. Корневой годограф начинается в полюсах функции $G(s)H(s)$ (при $K = 0$) и заканчивается в нулях $G(s)H(s)$ (при $K \rightarrow \infty$), включая нули, расположенные в бесконечности.
3. Если передаточная функция разомкнутого контура имеет α нулей в бесконечности ($\alpha \geq 1$), то корневой годограф при $K \rightarrow \infty$ стремится к α асимптотам. Эти асимптоты расположены под углами

$$\theta = \frac{r360^\circ}{\alpha}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

и выходят из точки на действительной оси с координатой

$$\sigma_a = \frac{(\text{сумма конечных полюсов}) - (\text{сумма конечных нулей})}{(\text{число конечных полюсов}) - (\text{число конечных нулей})}.$$

4. Корневой годограф включает все точки действительной оси, расположенные слева от четного числа вещественных полюсов и нулей.
5. Точки отрыва корневого годографа появляются среди корней уравнения

$$\frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = 0,$$

или $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$, где $N(s)$ и $D(s)$ есть, соответственно, числитель и знаменатель функции $G(s)H(s)$.

6. Корневой годограф будет выходить из полюса p_i (входить в нуль z_i) функции $G(s)H(s)$ под углом θ_d (θ_n), где

$$\theta_d = \sum_i \theta_{z_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{p_i} + r(360^\circ),$$

$$\theta_a = \sum_i \theta_{p_i} - \sum_{i \neq j} \theta_{z_i} + r(360^\circ),$$

где $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, а θ_{p_i} (θ_{z_i}) есть угол между полюсом p_i (нулем z_i) и полюсом p_j (нулем z_j).

Заметим, что правила 3, 4 и 6 отличаются от соответствующих правил, сформулированных для случая положительных K . Они основаны на угловых соотношениях и могут быть легко доказаны по аналогии с правилами для положительных K (см. разделы 7.2 и 7.3); поэтому их доказательство мы здесь не приводим. Далее рассмотрим следующий пример.

Пример 7.21

Вернемся к системе из примера 7.4, в котором был построен корневой годограф, соответствующий положительным значениям коэффициента K для передаточной функции

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s+3)}.$$

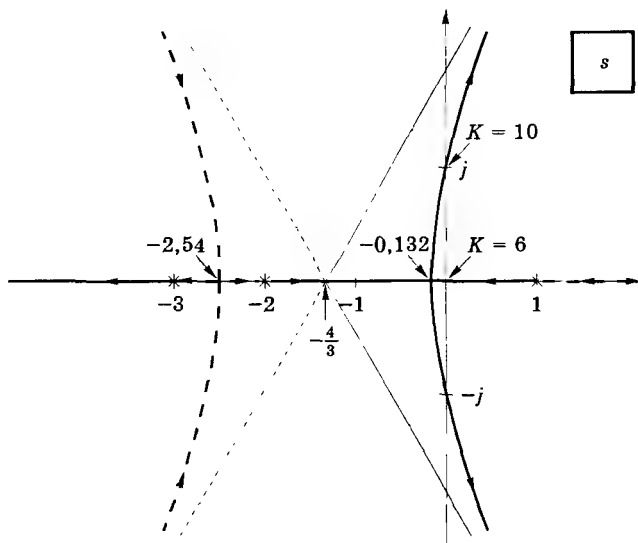
Этот годограф изображен на рис. 7.9 и еще раз представлен в виде части рис. 7.32. Ранее была найдена точка пересечения асимптот $s = -4/3$; согласно правилу 3, в этой же точке пересекаются асимптоты, соответствующие отрицательным значениям K . Знак K не влияет на положение точки пересечения асимптот. Поскольку передаточная функция разомкнутого контура имеет три нуля в бесконечности, то три асимптоты для положительных K расположены под углами $\pm 60^\circ$ и 180° . По правилу 3, асимптоты для отрицательных K расположены под углами

$$\theta = \frac{r360^\circ}{\alpha}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

где α — количество асимптот (в данном случае $\alpha = 3$). Таким образом, для отрицательных K асимптоты расположены под углами 0° и $\pm 120^\circ$.

Рис. 7.32

Корневой годограф к примеру 7.21



Далее, согласно правилу 4, при отрицательных значениях K корневой годограф должен включать в себя ту часть действительной оси, которая не вошла в годограф для положительных K . Следовательно, корневой годограф любой системы, который строится как для положительных, так и для отрицательных значений K , будет включать в себя всю действительную ось.

В примере 7.4 были найдены точки $s = -0,132$ и $s = -2,54$, претендующие на роль точек отрыва. Теперь мы видим, что $s = -0,132$ есть точка отрыва для положительных K , а $s = -2,54$ — для отрицательных K .

Полный корневой годограф, соответствующий как положительным, так и отрицательным значениям K , изображен на рис. 7.32. Положительным K соответствуют сплошные линии, а отрицательным — пунктирные. Стрелки на ветвях годографа указывают направление возрастания K в каждом случае. Программа MATLAB, с помощью которой в данном примере строится корневой годограф, соответствующий отрицательным значениям K , имеет вид:

```
GH = zpk([ ], [1 -2 -3], -1);  
rlocus(GH);
```

В последнем примере корневой годограф изображен так, что стрелки соответствуют изменению K от $-\infty$ до ∞ . В связи с этим правило 2 должно быть изменено следующим образом:

2. Корневой годограф при $K = -\infty$ начинается в нулях функции $G(s)H(s)$, включая нули, расположенные в бесконечности, и заканчивается при $K = 0$ в полюсах функции $G(s)H(s)$.

Это изменение, касающееся направления стрелок на ветвях годографа при отрицательных K , имеет единственную цель, а именно — показать, что корневой годограф непрерывным образом проходит через полюсы передаточной функции разомкнутого контура, как это изображено на рис. 7.32.

7.13. Реализация регулятора

В этом разделе мы рассмотрим способы реализации передаточных функций регуляторов с помощью электронных схем. Для этого, в частности, могут быть использованы операционные усилители в сочетании с резисторами и конденсаторами.

Основная схема, реализующая передаточную функцию регулятора или аналогового фильтра, приведена на рис. 2.9 и еще раз воспроизведена на рис. 7.33 (а). Передаточная функция этой схемы, как было показано в разделе 2.2 [см. выражение (2-9)], определяется как

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}. \quad (7-78)$$

Путем надлежащего выбора полных сопротивлений $Z_i(s)$ и $Z_f(s)$ мы можем реализовать регуляторы с опережением по фазе, с отставанием по фазе, а также ПИ-, ПД- и ПИД-регуляторы. Однако заметим, что передаточная функция (7-78) имеет знак минус. Если в реальной системе это недопустимо, то схема рис. 7.33 (а) должна быть дополнена инвертирующим усилителем, изображенным на рис. 7.33 (б), который может быть включен как перед, так и после схемы рис. 7.33 (а). Из (7-78) следует, что коэффициент усиления инвертирующего усилителя равен $-R_f/R$, и, следовательно, передаточная функция последовательного соединения двух схем равна

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_f Z_f(s)}{R_i Z_i(s)},$$

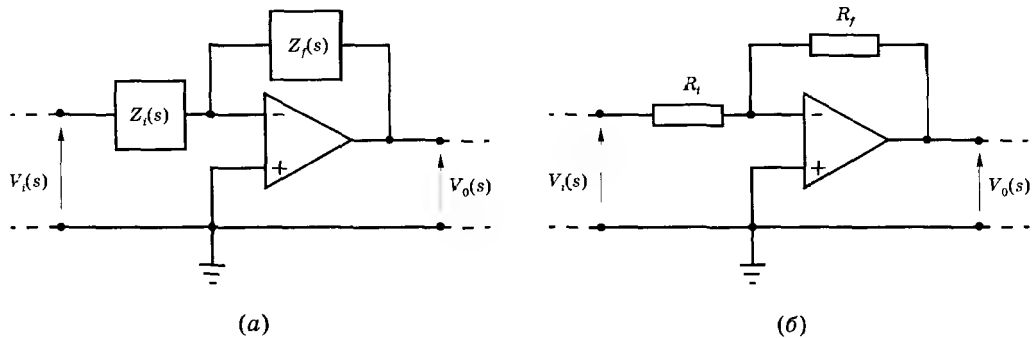


Рис. 7.33. Реализация регуляторов с помощью операционных усилителей

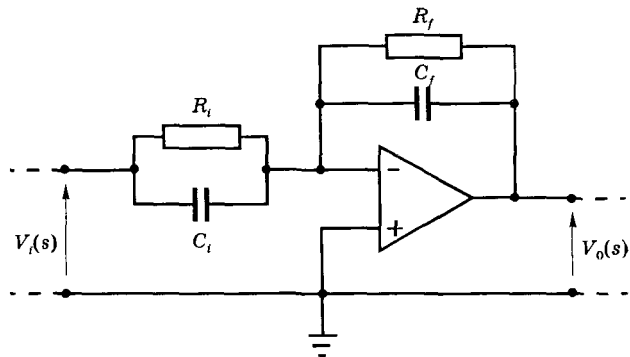
где $V_1(s)$ — входное напряжение, а $V_2(s)$ — выходное напряжение. Схема рис. 7.33 (б) применяется также для изменения коэффициента усиления в контуре замкнутой системы управления и для усиления слабых сигналов от датчиков.

Рассмотрим сначала схему, изображенную на рис. 7.34. Полное сопротивление цепи из параллельного соединения R и C равно

$$Z(s) = \frac{R(1/Cs)}{R + 1/Cs} = \frac{R}{RCs + 1}. \quad (7-79)$$

Рис. 7.34

Схема общего вида
на операционном усилителе



Тогда, на основании (7-78) и (7-79), схема рис. 7.34 имеет передаточную функцию

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} = -\frac{R_f / (R_f C_f s + 1)}{R_i / (R_i C_i s + 1)} = -\frac{R_f (R_i C_i s + 1)}{R_i (R_f C_f s + 1)},$$

или

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{C_i (s + 1/R_i C_i)}{C_f (s + 1/R_f C_f)} = -\frac{K_c (s - z_0)}{s - p_0}. \quad (7-80)$$

Следовательно, при надлежащем выборе элементов схемы, с ее помощью можно реализовать следующие регуляторы:

1. *Регулятор с опережением по фазе.* При $R_i C_i > R_f C_f$ нуль передаточной функции по модулю будет меньше, чем полюс; следовательно, регулятор будет обладать опережением по фазе.
2. *Регулятор с отставанием по фазе.* При $R_i C_i < R_f C_f$ нуль передаточной функции по модулю будет больше, чем полюс; регулятор будет обладать отставанием по фазе.

3. *ПИ-регулятор.* При $R_f = \infty$ (данный резистор отсутствует) передаточная функция примет вид:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{C_i}{C_f} - \frac{1/R_i C_f}{s} = -\left(K_p + \frac{K_I}{s}\right), \quad (7-81)$$

что соответствует ПИ-регулятору.

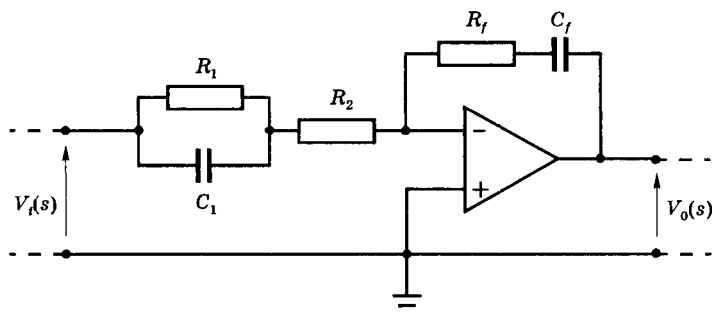
4. *ПД-регулятор.* При $C_f = 0$ (конденсатор C_f отсутствует) передаточная функция примет вид:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_f}{R_i} - R_f C_i s = -(K_p + K_D s) \quad (7-82)$$

Однако на практике обычно выбирают малое ненулевое значение C_f , чтобы ограничить усиление на высоких частотах. В этом случае ПД-регулятор превращается в обычный регулятор с опережением по фазе.

5. *ПИД-регулятор.* Этот тип регулятора не может быть реализован с помощью схемы рис. 7.34. Для этого можно использовать схему, представленную на рис. 7.35. Предоставляем читателю возможность в порядке упражнения убедиться, что данная схема действительно реализует передаточную функцию ПИД-регулятора.

Рис. 7.35
Реализация
ПИД-регулятора



Регуляторы всех возможных типов могут быть реализованы и с помощью иных схемотехнических решений. Кроме того, регуляторы могут быть построены также на основе гидравлических или пневматических элементов [5, 6]. Ниже приводится пример реализации электронного регулятора.

Пример 7.22

В примере 7.12 был синтезирован регулятор с опережением по фазе для системы управления положением спутника. Передаточная функция этого регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = \frac{16(s+1)}{s+6}.$$

Сравнивая эту передаточную функцию с выражением (7-80), мы видим, что элементы схемы на рис. 7.35 должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$R_i C_i = 1; R_f C_f = 1/6; C_i/C_f = 16.$$

Поскольку мы имеем три уравнения с четырьмя неизвестными, то зададимся значением $R_i = 100$ кОм. Тогда другие элементы будут иметь следующие номиналы: $R_f = 266,7$ кОм, $C_i = 10$ мкФ и $C_f = 0,625$ мкФ. Соответствующая схема изображена на рис. 7.36, причем к ней добавлен инвертирующий усилитель с единичным коэффициентом усиления для того, чтобы передаточная функция имела нужный знак.

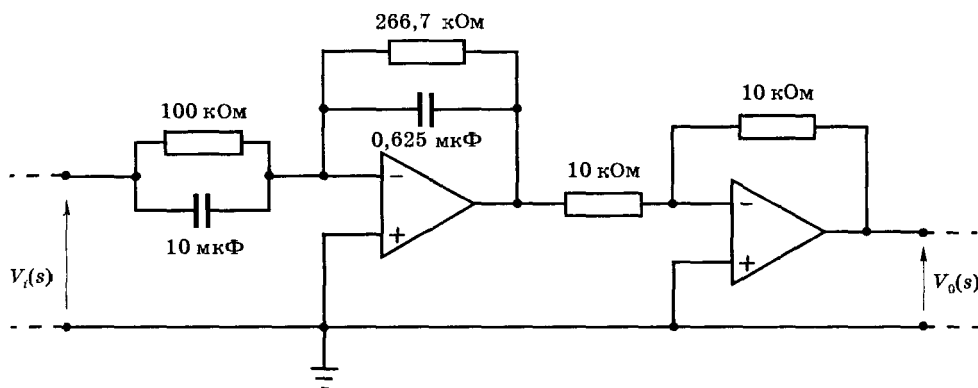


Рис. 7.36. Регулятор с опережением по фазе к примеру 7.22

7.14. Заключение

В этой главе мы рассмотрели методы анализа и синтеза систем управления с использованием корневого годографа. Задача синтеза подразделяется на два варианта. В первом случае предъявляются требования к поведению системы в переходном режиме — например, к ее быстродействию. Это приводит к синтезу регулятора с опережением по фазе. Во втором случае предъявляются требования к поведению системы в установившемся режиме — здесь речь идет о синтезе регулятора с отставанием по фазе. Этот тип регулятора может применяться и тогда, когда в силу тех или иных причин необходимо уменьшить быстродействие системы. Полную ясность в этот вопрос мы внесем после того, как рассмотрим применение частотных характеристик к синтезу систем управления (главы 8 и 9).

В данной главе были рассмотрены две различные процедуры синтеза. Одна из них основана на методе проб и ошибок, а другая — на аналитическом методе. Однако аналитический метод предполагает, что некоторые из параметров системы должны быть каким-то образом заданы, поэтому данный метод мало чем отличается от метода проб и ошибок.

Общая черта двух методов синтеза состоит в том, что некоторые полюсы передаточной функции замкнутой системы должны занимать определенное положение на s -плоскости. Поскольку положение других полюсов неизвестно, то корневой годограф должен дать ответ на вопрос — является ли их положение приемлемым.

В следующих двух главах будут представлены частотные методы анализа и синтеза систем управления. Методы синтеза регуляторов с опережением и с отставанием по фазе будут основаны на тех же принципах, которые рассматривались в данной главе. Однако метод частотных характеристик позволит понять нечто такое, что недоступно методу корневого годографа, и наоборот, метод корневого годографа включает в себе информацию, которую невозможно получить, пользуясь частотными характеристиками. Таким образом, два метода дополняют друг друга, и оба могут принести пользу при синтезе конкретной системы управления.

Литература

1. W.R.Evans. «Graphical Analysis of Control Systems», *Trans. AIEE*, 67(1948), pp. 547-551.
2. B.C.Kuo. *Automatic Control Systems*, 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
3. T.Arie, M.Itoh, A.Senoh, N.Takahashi, S.Fujii, and M.Mizuno. «An Adaptive Steering System for a Ship», *IEEE Control Sys.* (October 1986), pp. 3-8.
4. C.L.Phillips and R.D.Harbor. *Feedback Control Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
5. J.Van de Vegte. *Feedback Control Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.
6. W.J.Palm. *Control System Engineering*. New York: Wiley, 1986.

Задачи

- 7.1. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}, \quad 0 \leq K \leq \infty.$$

Определите, принадлежат ли корневому годографу указанные ниже точки.

- (a) $s = -0,5$.
 - (б) $s = 0,5$ (в области неустойчивости).
 - (в) $s = j1,732$.
 - (г) $s = -1 + j$.
 - (д) Проверьте все результаты с помощью MATLAB (инструкция *roots*).
- 7.2. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$KG(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}.$$

Определите, можно ли выбрать такое значение $K > 0$, при котором передаточная функция замкнутой системы имела бы полюс:

- (a) $s = -1,0$.
 - (б) $s = -3,0$.
 - (в) $s = -5,0$.
 - (г) $s = 1,0$ (в области неустойчивости).
 - (д) Проверьте все результаты с помощью MATLAB (инструкция *roots*).
- 7.3. Для системы, изображенной на рис. 7.3 (3):
- (a) Постройте корневой годограф, если

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}.$$

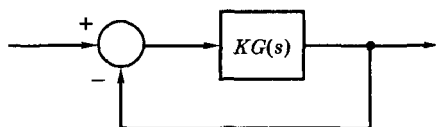


Рис. 7.3 (3)

- (б) Проверьте результат п. (а), вычислив положение корня как функцию коэффициента K .
 - (в) Проверьте вид корневого годографа с помощью MATLAB (инструкция *rlocus*).
- 7.4. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 7.4 (3).
- (а) Проведите точное построение корневого годографа для данной системы.
 - (б) С помощью MATLAB проверьте результат п. (а).

7.5. В системе на рис. 7.4 (3) измените передаточную функцию. Пусть

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{s(s + 2)}.$$

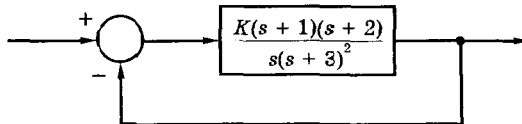


Рис. 7.4 (3)

(а) Проведите точное построение корневого годографа для данной системы.

(б) Проверьте результат п. (а) с помощью MATLAB (инструкция *rlocus*).

7.6. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 7.6 (3). Обратите внимание, что датчик обладает неединичным коэффициентом усиления.

(а) Постройте корневой годограф для данной системы.

(б) Найдите все точки, в которых корневой годограф пересекает мнимую ось. Если необходимо, воспользуйтесь критерием Раунса-Гурвица.

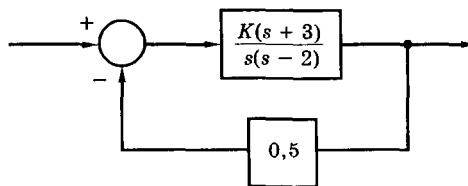


Рис. 7.6 (3)

(в) По результатам пп. (а) и (б) определите диапазон значений K , при которых система устойчива.

(г) По результатам пп. (а) и (б) определите диапазон значений K , при которых система устойчива, а полюсы ее передаточной функции вещественны.

(д) По предыдущим результатам найдите все значения K , при которых система обладает критическим демпфированием.

(е) Проверьте построение корневого годографа, выполненное в п. (а), с помощью MATLAB.

(ж) С помощью SIMULINK проверьте результат п. (б).

7.7. Постройте корневой годограф для одноконтурных систем, передаточные функции которых в разомкнутом состоянии $KG(s)H(s)$ приведены ниже. Определите значения переменной s , соответствующие пересечению годографом мнимой оси.

(а) $\frac{K(s+1)}{s^2}.$

(б) $\frac{K}{s(s+2)^2}.$

(в) $\frac{K}{s[(s+10)^2 + 1]}.$

(г) $\frac{K}{s[(s+5)^2 + 25]}.$

(д) Каждый корневой годограф проверьте с помощью MATLAB.

(е) С помощью SIMULINK проверьте все пересечения корневым годографом мнимой оси.

7.8. В системе на рис. 7.8 (3) ПД-регулятор использован с целью добавления нуля в передаточную функцию разомкнутого контура, так что

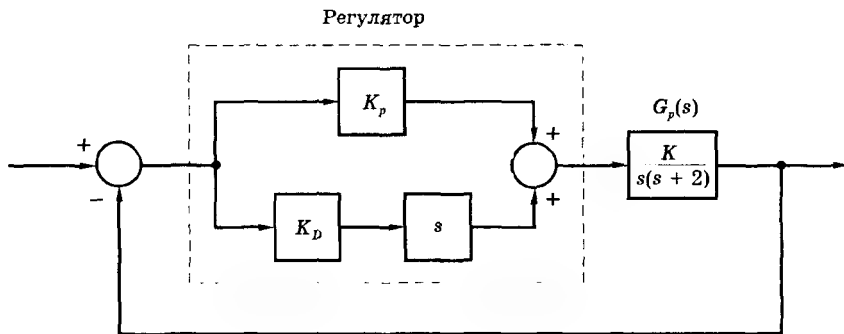
$$KG_c(s)G_p(s) = \frac{K(K_p + K_D s)}{s(s+2)} = \frac{KK_D(s+a)}{s(s+2)}, \quad a = \frac{K_p}{K_D}.$$

(а) Чтобы проиллюстрировать влияние регулятора, построьте корневой годограф для следующих ограничений на положение нуля:

(1) $-a > 0;$

(2) $-2 < -a < 0;$

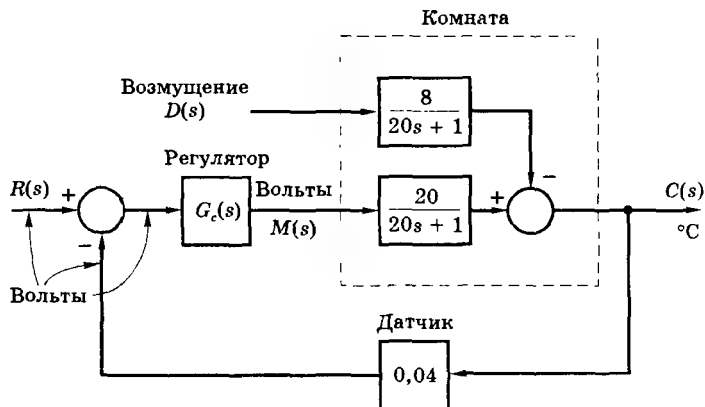
Рис. 7.8 (3)



(3) — $a < -2$.

- (б) В каком из трех случаев п. (а) система будет обладать самым коротким временем установления?
- (в) В каком из трех случаев п. (а) система может стать неустойчивой?
- 7.9. На рис. 7.9 (3) приведена модель системы регулирования температуры в большом помещении. Эта система была рассмотрена в задаче 6.12. В данной задаче предположите, что $D(s) = 0$, т.е. дверь в комнату остается закрытой.
- (а) Определите постоянную времени для замкнутой системы, полагая $G_c(s) = 1$.
- (б) Заданное значение температуры в комнате равно 40°C . Определите требуемое для этого значение входного сигнала $r(t)$, выраженное в вольтах.
- (в) Приведите систему к случаю с единичной обратной связью (см. рис. 5.2).
- (г) В случае единичной обратной связи, полагая $G_c(s) = 1$, для условий п. (б) определите установившуюся ошибку в градусах Цельсия.
- (д) Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе так, чтобы полюс, соответствующий постоянной времени, найденной в п. (а), существенно не изменился, а установившаяся ошибка не превышала бы 5% от заданной температуры.
- (е) Синтезируйте ПИ-регулятор, удовлетворяющий требованиям п. (д), при котором полюс замкнутой системы имел бы значение $s = -0,085$.
- (ж) С помощью SIMULINK проверьте результат п. (г). Почему для получения результата требуется столь большое время?
- (з) С помощью SIMULINK проверьте результат п. (д).
- (и) С помощью SIMULINK проверьте результат п. (е).

Рис. 7.9 (3)



7.10. В системе, представленной на рис. 7.10 (3), передаточная функция объекта имеет вид:

$$KG_p(s) = \frac{50K}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

- Постройте корневой годограф при $G_c(s) = 1$.
- При $G_c(s) = 1$ и $K = 0,377$ полюсы замкнутой системы расположены в точках $s = -1,377 \pm \pm j1,377$ и $s = -10,25$. Следовательно, комплексным полюсам соответствует $\zeta = 0,707$. Определите установившуюся ошибку в случае единичного ступенчатого воздействия на входе.
- Подлежит синтезу регулятор с отставанием по фазе, имеющий единичный коэффициент усиления на нулевой частоте. При этом коэффициент K должен быть увеличен до 3. Чему в этом случае будет равна установившаяся ошибка, вызванная единичным ступенчатым воздействием?
- Проведите синтез регулятора с отставанием по фазе таким образом, чтобы при $K = 3$ полюсы замкнутой системы, указанные в п. (б), сдвинулись на очень малую величину.
- С помощью MATLAB проверьте положение полюсов замкнутой системы, соответствующих п. (г).
- С помощью SIMULINK проверьте результаты пп. (б) и (г).

7.11. Предположите, что в системе на рис. 7.10 (3) передаточная функция задана в виде

$$KG_p(s) = \frac{K}{s(s+4)}.$$

- При $G_c(s) = 1$ постройте корневой годограф.
- При $G_c(s) = 1$ определите постоянную времени замкнутой системы, если коэффициент K выбран так, что полюсы замкнутой системы являются комплексными.

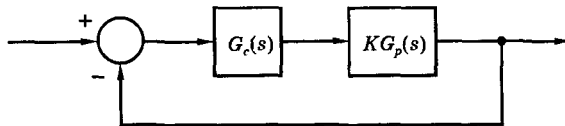


Рис. 7.10 (3)

- Предположим, что по условиям эксплуатации системы постоянная времени должна быть равна 0,333 с. С помощью каких типов регуляторов можно добиться выполнения этого требования?
- Синтезируйте ПД-регулятор, исходя из того, что полюсам замкнутой системы должны соответствовать значения $\zeta = 0,707$, $\tau = 0,333$ с и $K = 1$.
- С помощью MATLAB проверьте значения полюсов при условиях п. (г).
- С помощью MATLAB (инструкция *step*) проверьте значение постоянной времени системы.

7.12. На рис. 7.12 (3), а изображена система управления положением космической ракеты-носителя. Угловое положение θ регулируется за счет изменения угла δ , характеризующего наклон двигателя относительно оси ракеты и, следовательно, угол приложения силы тяги F_T . Скорость ракеты обозначена через v . Такие системы управления часто являются неустойчивыми в разомкнутом состоянии за счет того, что центр аэродинамического давления оказывается выше центра тяжести ЦТ ракеты. Например, ракета-носитель Сатурн V имела передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{0,9407}{s^2 - 0,0297}.$$

В эту передаточную функцию не включены динамика изгиба ракеты, динамика колебаний жидкого топлива в камере и динамика гидропривода, управляющего положением двигателя. За счет этих факторов передаточная функция ракеты увеличивается на 25 порядков. Устойчивость ракеты можно обеспечить путем введения обратной связи по скорости, как показано на рис. 7.12 (3), б.

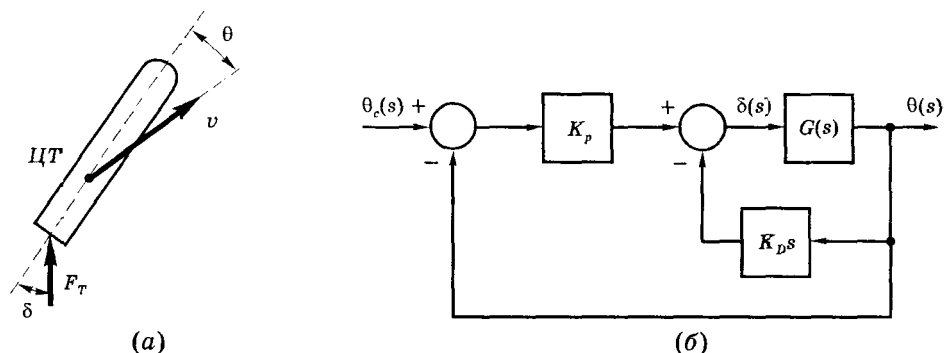


Рис. 7.12 (3)

- (а) При $K_D = 0$ (обратная связь по скорости отсутствует) изобразите корневой годограф и укажите, какие возможны типы неустойчивого движения.
- (б) Синтезируйте изображенный на рисунке регулятор (ПД-регулятор), который размещал бы полюсы замкнутой системы в точках $s = -0,25 \pm j0,25$. Обратите внимание, что этим полюсам соответствует постоянная времени 4 с, что, конечно, вряд ли достижимо для большой ракеты.
- (в) Постройте корневой годограф скорректированной системы, задав значение K_D , найденное в п. (б), и считая переменной величину K_p .
- (г) В данной задаче полюсы объекта управления по модулю имеют очень малое значение по сравнению с другими системами, которые мы рассматривали ранее. Напомним, что сейчас речь идет о передаточной функции ракеты Сатурн V. Что означает малое значение модуля полюсов в отношении переходной характеристики системы? Является ли это значение приемлемым?
- (д) С помощью MATLAB проверьте значения полюсов замкнутой системы, заданные в п. (б).
- (е) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени из п. (б).
- (ж) С помощью MATLAB проверьте корневой годограф, построенный в п. (в).
- 7.13.** В системе управления положением ракеты Сатурн V на рис. 7.12 (3) коэффициент $K_D = 0$.
- (а) Изобразите корневой годограф и укажите возможные типы неустойчивого движения.
- (б) Замените коэффициент K_p регулятором с передаточной функцией $G_c(s)$. На основании корневого годографа из п. (а) укажите, какие типы регуляторов могут быть использованы, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы.
- (в) Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, имеющий коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 0,1, и обеспечивающий размещение полюсов замкнутой системы в точках $s = -0,25 \pm j0,25$.
- (г) С помощью MATLAB проверьте, действительно ли полюсы замкнутой системы равны заданным в п. (в).
- (д) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени, соответствующей полюсам из п. (в).
- 7.14.** На рис. 7.14 (3) изображена структурная схема следящей системы, предназначенной для позиционирования пера цифрового плоттера по одной из координатных осей. Эта система подробно описана в задаче 6.13.
- (а) Пусть $K_d = K$ и $K_v = 0$. Изобразите корневой годограф этой системы.
- (б) Удалите обратную связь по скорости и замените коэффициент K_d ПД-регулятором с передаточной функцией $G_c(s) = K_p + K_I s$. Вычислите значения коэффициентов K_p и K_I , при ко-

- торых характеристическое уравнение системы имело бы корни $s = -1 \pm j$.
- (в) Определите эквивалентные значения коэффициентов K_d и K_v в системе с обратной связью, при которых корни характеристического уравнения были бы теми же, что и в п. (б).
- (г) Постройте корневой годограф скорректированной системы, чтобы определить примерное положение третьего корня характеристического уравнения. Для этого предположите, что в цепь между двумя сумматорами добавлен коэффициент усиления и именно он является варьируемой переменной при построении корневого годографа.
- (д) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (а), (б), (в) и (г).
- (е) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени системы для условий пп. (б) и (в).

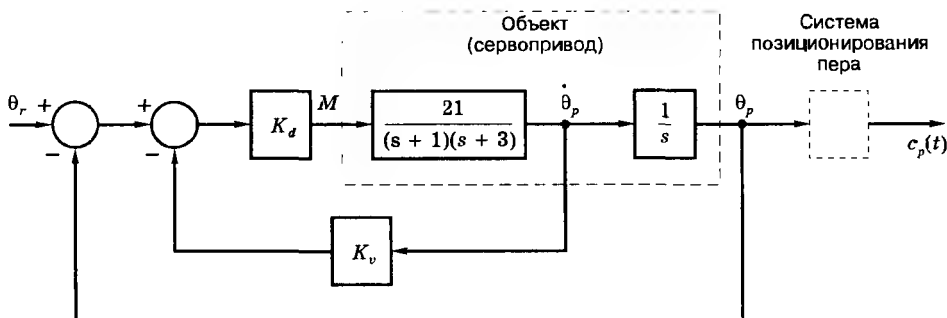


Рис. 7.14 (3)

7.15. В системе из задачи 7.14 обратная связь по скорости исключена, а вместо коэффициента K_d использован регулятор с опережением по фазе вида (7-46).

- (а) Синтезируйте такой регулятор, который имел бы коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 0,15, обеспечивающий значения полюсов замкнутой системы $s = -1 \pm j$.
- (б) Постройте корневой годограф скорректированной системы, чтобы определить примерное положение двух других корней характеристического уравнения четвертого порядка.
- (в) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (а) и (б).
- (г) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени системы для условий п. (а).

7.16. На рис. 7.16 (3) изображена структурная схема следящей системы управления одним из звеньев руки робота. Эта система описана в разделе 2.12.

- (а) Покажите, что объект имеет передаточную функцию

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0,15}{s(s+1)(s+5)}.$$

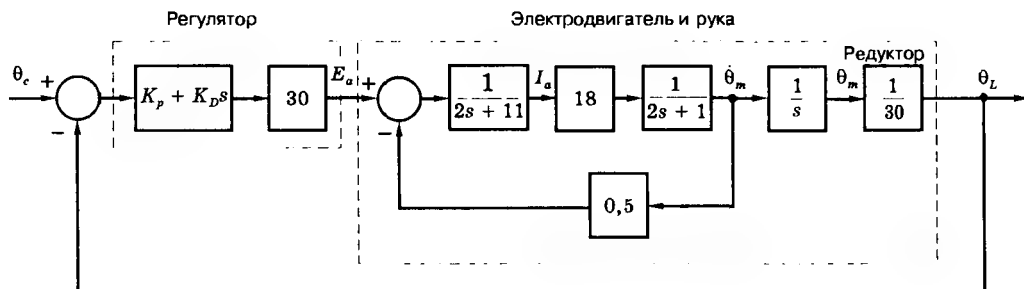


Рис. 7.16 (3)

и постройте корневой годограф нескорректированной системы (регулятор заменен коэффициентом усиления K).

- (б) Определите параметры регулятора K_p и K_D так, чтобы характеристическое уравнение имело корни $s = -1 \pm j$.
- (в) Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, который обеспечивал бы те же значения корней характеристического уравнения, что и в п. (б). Коэффициент усиления этого регулятора на нулевой частоте должен быть равен единице.
- (г) Постройте корневой годограф скорректированной системы для условий п. (б), чтобы определить примерное положение третьего корня характеристического уравнения системы. Для этого предположите, что в цепи между двумя сумматорами находится коэффициент усиления K и именно он является варьируемой переменной при построении корневого годографа.
- (д) Повторите п. (г) для системы с коррекцией из п. (в).
- (е) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (б), (в), (г) и (д).
- (ж) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени системы для условий пп. (б) и (в).

7.17. Рассмотрите систему управления скоростью автомобиля, изображенную на рис. 7.17 (3). Эта система ранее была описана в задаче 3.11. В данном случае возмущающий момент считается отсутствующим.

- (а) Постройте корневой годограф нескорректированной системы и определите постоянную времени, соответствующую комплексным корням.
- (б) Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, имеющий коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 8, и размещающий комплексные полюсы системы так, что $\zeta = 0,707$, а постоянная времени в два раза меньше найденной в п. (а).
- (в) Постройте корневой годограф скорректированной системы и укажите на нем положение полюсов передаточной функции.
- (г) Синтезируйте ПД-регулятор, удовлетворяющий условиям п. (б). Требование к коэффициенту усиления регулятора можно не учитывать. Почему?
- (д) Постройте корневой годограф системы с ПД-регулятором и укажите на нем положение полюсов передаточной функции.
- (е) С помощью MATLAB проверьте положение полюсов замкнутой системы, полученное в пп. (б) и (г).
- (ж) С помощью SIMULINK проверьте значение постоянной времени системы, полученное в пп. (б) и (г).

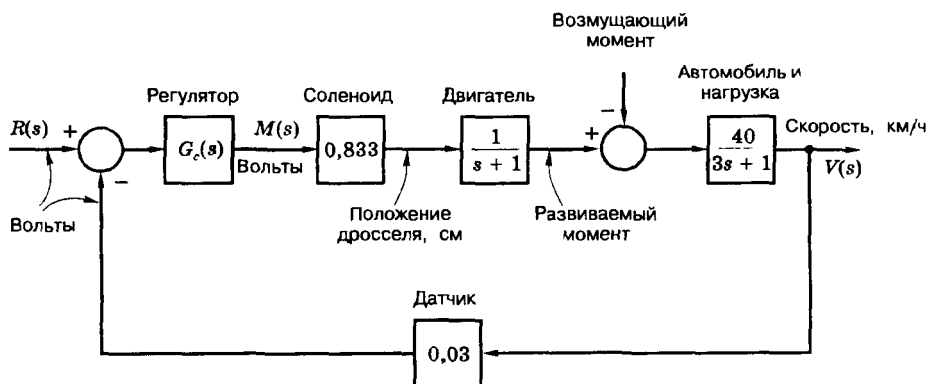


Рис. 7.17 (3)

7.18. Рассмотрите систему радиолокационного сопровождения из примера 7.15. Предположите, что при входном воздействии, скорость изменения которого равна единице, установившаяся ошибка должна составлять $0,1^\circ$. Все другие требования к системе остаются прежними.

- (а) Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, который удовлетворял бы выдвинутым требованиям.
- (б) Сравните постоянные времени для замкнутой системы из п. (а) и системы из примера 7.15.
- (в) Промоделируйте систему из п. (а) при входном воздействии, скорость изменения которого равна единице, и определите приблизительное значение ошибки через 20 с и через 50 с.
- (г) Повторите п. (в) для системы из примера 7.15 и сравните значения ошибки.

7.19. Еще раз вернитесь к системе управления положением спутника (раздел 7.6, рис. 7.19). Пусть передаточная функция спутника имеет вид

$$G_p(s) = \frac{0,5}{s^2}.$$

- (а) Постройте корневой годограф системы как для положительных, так и для отрицательных значений K .
- (б) Отметьте все пересечения корневым годографом мнимой оси и определите значения K , соответствующие каждому пересечению.
- (в) По результатам п. (б) определите значения K , при которых система устойчива, неустойчива или находится на границе устойчивости.

7.20. Система в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$KG(s)H(s) = \frac{50K}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

- (а) Постройте корневой годограф системы как для положительных, так и для отрицательных значений K .
- (б) Отметьте все пересечения корневым годографом мнимой оси и определите значения K , соответствующие каждому пересечению.
- (в) По результатам п. (б) укажите полный диапазон значений K , при которых система является устойчивой.
- (г) С помощью компьютера проверьте построение корневого годографа. Если соответствующая программа строит корневой годограф только для $K > 0$, то как ее можно использовать для построения корневого годографа при $K < 0$?

7.21. В приводимых ниже случаях используйте резисторы в диапазоне от 1 кОм до 10 МОм и конденсаторы емкостью менее или равной 10 мкФ.

- (а) Синтезируйте схему на операционном усилителе, реализующую ПИ-регулятор из примера 7.11, т.е. $G_c(s) = 3,6 + 1/s$.
- (б) Синтезируйте схему на операционном усилителе, реализующую регулятор с отставанием по фазе из примера 7.15, т.е. $G_c(s) = 0,2(s + 0,1)/(s + 0,02)$.
- (в) Синтезируйте схему на операционном усилителе, реализующую регулятор с отставанием по фазе из примера 7.13, т.е. $G_c(s) = (10,29s + 4,571)/(s + 4,571)$.
- (г) Синтезируйте схему на операционном усилителе, реализующую ПД-регулятор из примера 7.17, т.е. $G_c(s) = 8 + 2s$.

7.22. Рассмотрите систему управления жестким спутником, включающую обратную связь по скорости (рис. 7.20). Передаточная функция разомкнутой системы задана выражением (7-38). Докажите, что надлежащим выбором коэффициентов K и K_v корни характеристического уравнения системы можно разместить в любых заданных точках s -плоскости.

8. Анализ в частотной области

В предыдущих главах мы несколько раз обращались к частотным характеристикам, чтобы проиллюстрировать их применение к анализу систем управления. Частотные методы играют заметную роль как при анализе, так и при синтезе систем управления. Как уже было отмечено ранее, различные методы анализа и синтеза скорее дополняют, а не исключают друг друга. Очевидными преимуществами обладает метод корневого годографа, как дающий ясное представление о поведении системы в переходном режиме. Однако для использования этих преимуществ корневого годографа нужно иметь достаточно точную модель системы. Как будет показано ниже, экспериментальный метод получения частотных характеристик системы, не связанный с определением ее передаточной функции, также обладает рядом преимуществ. Фактически это означает, что мы можем решить задачу синтеза системы управления, располагая только частотными характеристиками.

Кроме того, одним из распространенных методов проверки адекватности передаточной функции системы является построение на ее основании частотных характеристик и сравнение их с частотными характеристиками, полученными в результате экспериментального исследования реальной системы. Например, в вооруженных силах США частотные характеристики самолета получают, прикладывая к автопилоту синусоидальное воздействие и измеряя следствие — положение самолета в воздухе во время полета [1].

В этой главе мы рассмотрим частотные методы анализа систем, а в следующей главе распространим эти методы применительно к задачам синтеза.

8.1. Частотные характеристики

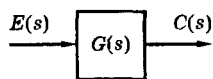


Рис. 8.1
Линейная система

В разделе 4.4 мы рассмотрели реакцию устойчивой линейной стационарной системы на синусоидальное воздействие. Если на вход системы подан синусоидальный сигнал с частотой ω_1 , то изменение его амплитуды и фазы определяется передаточной функцией, вычисленной при $s = j\omega_1$. Рассмотрим систему на рис. 8.1, для которой

$$C(s) = G(s)E(s). \quad (8-1)$$

После замены $s = j\omega$, полученную комплексную функцию $G(j\omega)$ представим в виде:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \quad (8-2)$$

Тогда, если входной сигнал $e(t)$ является синусоидальным, т.е.

$$e(t) = A \sin \omega_1 t, \quad (8-3)$$

выходной сигнал в установившемся режиме будет иметь вид:

$$c_{ss}(t) = A |G(j\omega_1)| \sin[\omega_1 t + \theta(\omega_1)]. \quad (8-4)$$

(См. также раздел 4.4.) Как пример, предположим, что для схемы на рис. 8.1 $e(t) = 8\sin 2t$ и

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Тогда, на основании (8-2),

$$G(j\omega)|_{s=j2} = \frac{2}{(j2)^2 + 3(j2) + 2} = \frac{2}{-2 + j6} = 0,316e^{-j108,4^\circ}.$$

В соответствии с (8-4) выходной сигнал в установившемся режиме равен

$$c_{ss}(t) = 8(0,316) \sin(2t - 108,4^\circ) = 2,528 \sin(2t - 108,4^\circ). \quad (8-5)$$

Эти вычисления можно проверить с помощью следующей программы MATLAB:

```
G = tf([2], [1 3 2]);
Gj2 = evalfr(G, j*2)
Gmag = abs(Gj2), arg Gj2 = angle(Gj2)*180/pi
```

Если передаточную функцию записать в виде

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(0,5s+1)} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)},$$

то отсюда следует, что система имеет постоянные времена $\tau_1 = 1$ с и $\tau_2 = 0,5$ с. Таким образом, спустя примерно 4 с (время, в четыре раза превышающее наибольшую из постоянных времени) система придет в режим установившихся колебаний, и ее реакция будет описываться выражением (8-5).

В связи с этим примером сделаем одно дополнительное замечание. Запишем

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Тогда

$$(s^2 + 3s + 2)C(s) = 2E(s)$$

и, переходя к обратному преобразованию Лапласа, запишем дифференциальное уравнение системы:

$$\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2c(t) = 2e(t).$$

В приведенном выше примере мы получили решение этого дифференциального уравнения при воздействии $e(t) = 8\sin 2t$, которое описывает реакцию системы спустя примерно 4 с после подачи на вход синусоидального сигнала. При временах, меньших 4 с, существенный вклад в реакцию вносит свободное движение системы, имеющее вид

$$c_n(t) = k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t},$$

и им нельзя пренебрегать.

Если система устойчива, то с помощью комплексной функции $G(j\omega)$ можно определить ее реакцию в установившемся режиме на любое синусоидальное воздействие. Функцию $G(j\omega)$, $0 \leq \omega \leq \infty$, называют *частотной функцией системы*. При конкретном значении частоты ω , $G(j\omega)$ представляет собой комплексное число. Следовательно, при некотором данном значении ω , $G(j\omega)$ определяется двумя числами — модулем и аргументом, либо действительной и мнимой частью, либо иными числами, о которых речь будет идти ниже.

Обычно функцию $G(j\omega)$ представляют графически в зависимости от частоты ω . Это можно сделать двумя способами, которые мы проиллюстрируем на простом примере. На

рис. 8.2 изображена RC -схема, для которой передаточная функция в соответствии с методом полных сопротивлений (см. раздел 2.2), равна

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{(1/sC)}{R + (1/sC)} = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Предположим, что постоянная времени цепи равна 1 с; тогда

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Частотная функция этой системы имеет вид:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} e^{-j \arctg \omega}. \quad (8-6)$$

Одним из способов графического представления этой функции является изображение ее в *полярных координатах*. В этом случае модуль и аргумент частотной функции (или ее действительная и мнимая части) откладываются на плоскости в зависимости от частоты ω . Для этого сначала необходимо вычислить соответствующие компоненты функции $G(j\omega)$ для различных значений ω . Как пример, вычисления для функции (8-6) приведены в таблице 8.1. Затем эти значения откладываются на комплексной плоскости, как показано на рис. 8.3. Заметим, что с математической точки зрения частотная характеристика является отображением на комплексную плоскость верхней половины мнимой оси s -плоскости через функцию $G(j\omega)$.

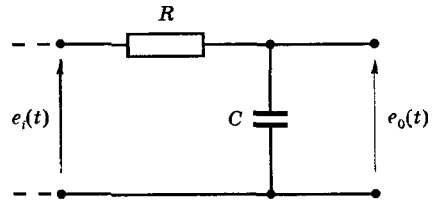


Рис. 8.2. RC -схема

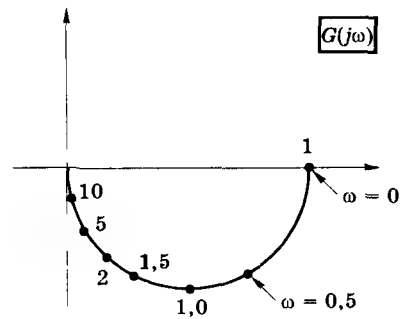


Рис. 8.3. Частотная характеристика

Таблица 8.1 Частотные характеристики

ω	$ G(j\omega) $	$\arg G(j\omega)$
0	1	0°
0,5	0,894	$-26,6^\circ$
1,0	0,707	-45°
1,5	0,555	$-56,3^\circ$
2,0	0,447	$-63,4^\circ$
3,0	0,316	$-71,6^\circ$
5,0	0,196	$-78,7^\circ$
10,0	0,100	$-84,3^\circ$
∞	0	-90°

На графике, построенном в полярных координатах (рис. 8.3) частота ω является параметром. Другой способ графического представления частотной функции заключается в построении кривых, отражающих зависимость от частоты модуля и аргумента $G(j\omega)$. Такие графики для приведенного выше примера изображены на рис. 8.4. Заметим, что изменение с ростом частоты коэффициента усиления системы здесь прослеживается более четко, чем на графике в полярных координатах. Такая кривая или некоторая ее модификация обычно используется для изображения частотной характеристики фильтров. Из рис. 8.4 видно, что схема представляет собой фильтр низких частот, т.е. она будет пропускать все частоты, которые ниже граничной частоты (верхней границы полосы пропускания), и ослаблять все частоты, которые выше граничной частоты. (Определение частоты пропускания — см. раздел 4.4.) Для нашего примера граничная частота $\omega = 1$ рад/с. На практике такой фильтр используется для уменьшения пульсаций напряжения на выходе источника постоянного тока [2].

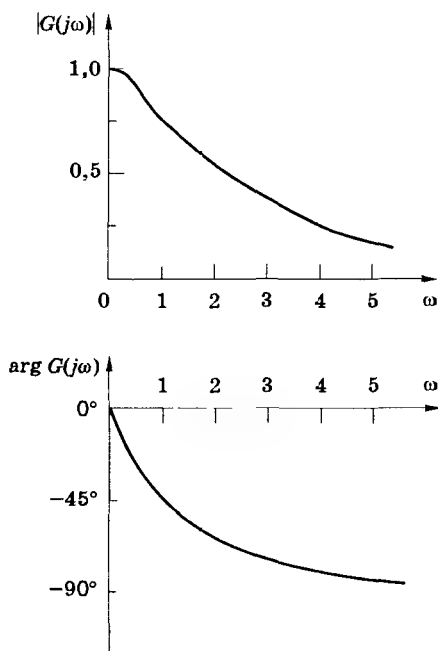


Рис. 8.4. Частотные характеристики

Теперь рассмотрим общее выражение передаточной функции первого порядка:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (8-7)$$

Соответствующая частотная функция имеет вид:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K/\tau}{1/\tau + j\omega}. \quad (8-8)$$

Знаменатель можно представить в виде вектора, начало которого находится в полюсе $-1/\tau$, а конец — в точке $j\omega$ на s -плоскости. Этот вектор изображен на рис. 8.5 (а). При увеличении ω от 0 до ∞ длина этого вектора неограниченно возрастает. Таким образом, на основании (8-8), модуль $G(j\omega)$ уменьшается от K до нуля, поскольку модуль знаменателя увеличивается от $1/\tau$ до бесконечности. Из рис. 8.5 (а) следует также, что аргумент вектора увеличивается от 0° до 90° , следовательно аргумент $G(j\omega)$ будет уменьшаться от 0° до -90° . Таким образом, частотные характеристики, соответствующие передаточной функции (8-7), можно получить из рассмотрения вектора на рис. 8.5 (а).

Аналогичными рассуждениями можно воспользоваться применительно к системам более высокого порядка. Рассмотрим передаточную функцию второго порядка с вещественными полюсами:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} = \frac{K/\tau_1\tau_2}{(1/\tau_1 + j\omega)(1/\tau_2 + j\omega)}. \quad (8-9)$$

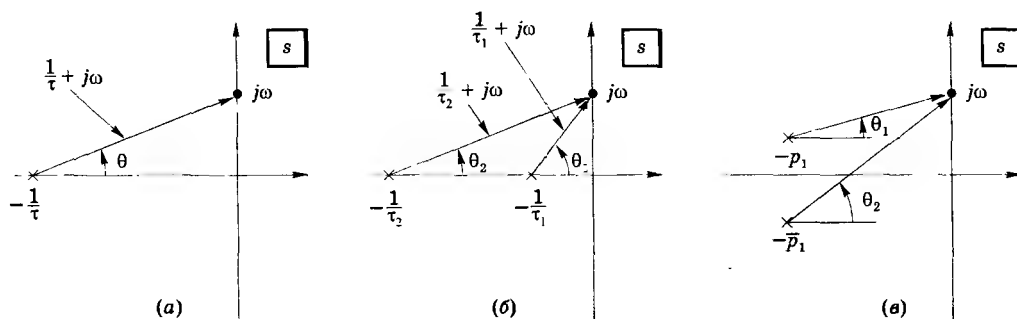


Рис. 8.5. Иллюстрация определения вида частотных характеристик

Два сомножителя в знаменателе соответствуют двум векторам, изображенным на рис. 8.5 (б). Поскольку длина этих векторов при изменении ω от 0 до ∞ неограниченно возрастает, то модуль $G(j\omega)$ уменьшается до нуля. Аргумент каждого вектора увеличивается от 0° до 90° , поэтому аргумент $G(j\omega)$ уменьшается от 0° до -180° .

Случай, когда передаточная функция имеет два комплексных полюса, изображен на рис. 8.5 (в). Что касается аргументов векторов и функции $G(j\omega)$, то здесь результат совпадает с выводами для случая двух вещественных полюсов. Однако модуль $G(j\omega)$ может вести себя совершенно иначе. Предположим, что полюс $-p_1$ расположен близко к мнимой оси. Тогда при изменении ω от 0 до ∞ длина вектора $(j\omega + p_1)$ сначала уменьшается до минимального значения, а затем неограниченно возрастает. Следовательно, $|G(j\omega)|$ будет иметь максимум, после чего начнет убывать до нуля, как показано на рис. 8.6. Тот же самый эффект (называемый резонансом) показан на рис. 4.14 для системы второго порядка с комплексными полюсами.

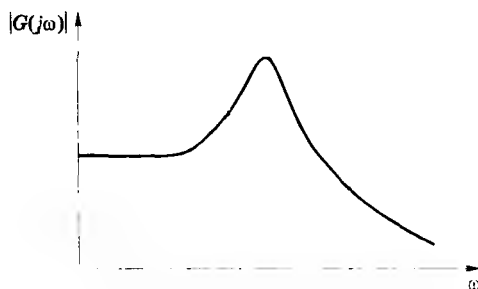


Рис. 8.6. Частотная характеристика резонансного вида

Очевидно, если передаточная функция имеет вещественный нуль, то числителю будет соответствовать вектор описанного выше типа, длина которого при изменении ω от 0 до ∞ будет неограниченно возрастать. Аргумент этого вектора будет увеличиваться от 0° до 90° , и настолько же будет возрастать аргумент $G(j\omega)$.

Из сказанного выше мы видим, что для систем невысокого порядка можно быстро найти приблизительный вид частотных характеристик, анализируя поведение векторов на s -плоскости. Эти графики очень полезны для предварительного анализа систем управления. Если же необходим точный вид частотных характеристик, то они обычно рассчитываются с помощью компьютера. Ниже приводится пример построения частотной характеристики.

Пример 8.1

Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tau_1 > \tau_2 > \tau_3.$$

Частотная функция этой системы имеет вид:

$$G(j\omega) = \frac{(K\tau_3/\tau_1\tau_2)(1/\tau_3 + j\omega)}{(1/\tau_1 + j\omega)(1/\tau_2 + j\omega)}.$$

При изменении ω от 0 до ∞ каждый полюс вносит в частотную характеристику фазовый сдвиг от 0° до -90° , а нуль — от 0° до 90° . Следовательно, результирующий фазовый сдвиг изменяется от 0° до -90° . Заметим, что предельные значения $G(j\omega)$ имеют выражения:

$$G(j0) = Ke^{j0^\circ}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K\tau_3/\tau_1\tau_2}{j\omega}.$$

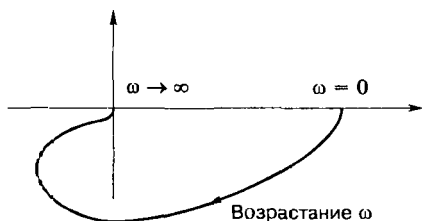


Рис. 8.7. Частотная характеристика

Таким образом, $G(j\omega)$ при $\omega = 0$ начинается из точки K на действительной оси и при $\omega \rightarrow \infty$ входит в начало координат под углом -90° . Аргументы $G(j\omega)$ при других значениях частоты определяются соотношением между постоянными времени τ_1 , τ_2 и τ_3 . В данном случае характеристика будет заходить в третий квадрант. Ее вид показан на рис. 8.7.

8.2. Диаграммы Бode

В этом разделе будет рассмотрен метод изображения частотных характеристик, отличающийся от двух способов, представленных в предыдущем разделе. Данный метод предполагает построение кривых для модуля частотной функции и для фазового сдвига в зависимости от частоты, но масштаб по оси частот является логарифмическим. Кроме того, и для модуля $G(j\omega)$ также используется логарифмический масштаб. Такие графики называют *диаграммой Бode*^{*}. Основным преимуществом диаграммы Бode перед другими способами изображения частотных характеристик является то, что она дает возможность достаточно просто учесть добавление в передаточную функцию вещественного полюса или вещественного нуля. По этой причине диаграммы Бode чрезвычайно полезны при синтезе систем управления.

Поясним суть диаграммы Бode, воспользовавшись в качестве примера передаточной функцией второго порядка:

$$G(s) = \frac{K(1 + \tau_3 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K(1 + s/\omega_3)}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)}, \quad (8-10)$$

где предполагается, что оба полюса и нуль являются вещественными. Заметим, что здесь мы использовали обозначения ω , которые обратны соответствующим постоянным времени τ . Смысл этих обозначений будет ясен несколько позже. Каждую частоту ω , мы будем называть *частотой излома*, опять-таки по причине, которую объясним позже.

Сначала запишем выражение для модуля функции $G(j\omega)$:

$$|G(j\omega)| = \frac{|K| |1 + j\omega/\omega_3|}{|1 + j\omega/\omega_1| |1 + j\omega/\omega_2|}. \quad (8-11)$$

В общем случае коэффициент K может быть отрицательным; этот факт мы отразили, снабдив K символом модуля. Таким образом, при конкретном значении частоты выраже-

* В отечественной литературе обычно используется термин *логарифмические частотные характеристики*.
— Прим. перев.

ние (8-11) превращается в положительное вещественное число.

Далее мы воспользуемся свойством логарифмов:

$$\lg\left(\frac{ab}{cd}\right) = \lg ab - \lg cd = \lg a + \lg b - \lg c - \lg d,$$

а также единицами, называемыми децибелами (дБ):

$$\text{дБ} = 20 \lg a,$$

где a — коэффициент усиления. Мы будем измерять и строить модуль частотной функции в децибелах, т.е. как $20 \lg|G(j\omega)|$. Для передаточной функции (8-11) это соответствует выражению:

$$20 \lg|G(j\omega)| = 20 \lg|K| + 20 \lg\left|1 + j \frac{\omega}{\omega_3}\right| - 20 \lg\left|1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right| - 20 \lg\left|1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right|. \quad (8-12)$$

Из выражения (8-12) становится очевидным преимущество измерения модуля $G(j\omega)$ в децибелах: отдельные сомножители в числителе передаточной функции входят в (8-12) со знаком плюс, а сомножители в знаменателе передаточной функции — со знаком минус.

Теперь рассмотрим отдельный член из выражения (8-12), зависящий от частоты:

$$\text{дБ} = 20 \lg\left|1 + j \frac{\omega}{\omega_i}\right| = 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}. \quad (8-13)$$

На рис. 8.8 представлен график этой функции в зависимости от $\lg \omega$. Заметим, что на частоте ω , выражение (8-13) имеет значение $20 \lg \sqrt{2}$, т.е. 3,0103. Обычно это значение округляют до 3 дБ и говорят, что для сомножителя первого порядка в числителе передаточной функции модуль его частотной функции на частоте излома равен 3 дБ. Если аналогичный сомножитель находится в знаменателе, то на частоте излома модуль его частотной функции равен -3 дБ. Кроме того, на частоте 10ω , модуль частотной функции сомножителя первого порядка в числителе равен $20 \lg \sqrt{101} = 20,04$ или приблизительно 20 дБ.

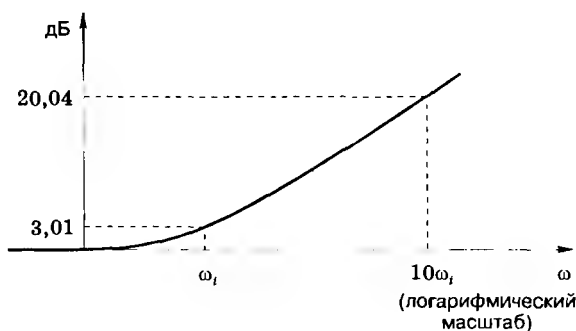


Рис. 8.8. Частотная характеристика элемента первого порядка

Если требуется точное построение диаграммы Боде, то обычно прибегают к помощи цифрового компьютера. Однако бывают случаи, когда вполне достаточно иметь приближенное представление диаграммы Боде. Такие «наброски» особенно полезны тогда, когда требуется, например, определить тип регулятора, приемлемого в конкретной системе управления, или оценить эффект, связанный с введением в передаточную функцию регулятора дополнительных полюсов или нулей. Подобная аппроксимация обычно применяется только в случае вещественных нулей и полюсов, в противном случае (при комплексных полюсах и нулях) аппроксимация связана с большими погрешностями из-за сильного влияния на вид характеристик коэффициента затухания ζ .

Рассмотрим теперь аппроксимацию частотной характеристики, соответствующей члену первого порядка (8-13):

$$\text{дБ}_i \approx 20 \lg \sqrt{1 + (\omega / \omega_i)^2}.$$

Для частот, много меньших частоты излома ω_i ,

$$\text{дБ}_i \approx 20 \lg(1) = 0, \quad \omega \ll \omega_i, \quad (8-14)$$

а для частот, очень больших в сравнении с ω_i ,

$$\text{дБ}_i \approx 20 \lg(\omega / \omega_i) = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_i, \quad \omega \gg \omega_i. \quad (8-15)$$

При низких частотах, как следует из (8-14), характеристика аппроксимируется прямой линией, совпадающей с осью ω . При высоких частотах, как следует из (8-15), характеристика, если рассматривать ее как функцию $\lg \omega$, также аппроксимируется прямой линией. Дифференцирование (8-15) по $\lg \omega$ показывает, что эта прямая линия имеет наклон 20 дБ на декаду частоты. Приравнявая выражения (8-14) и (8-15), мы обнаруживаем, что две прямые линии пересекаются при $\omega = \omega_i$, как показано на рис. 8.9 (а). Сравнивая этот результат с точной кривой, изображенной на рис. 8.8, мы видим, что точная кривая асимптотически стремится к прямым линиям, как показано на рис. 8.9 (б). Поэтому при приближенных построениях точная кривая обычно заменяется двумя асимптотами, пересекающимися в точке $\omega = \omega_i$. Максимальная ошибка от замены точной кривой ее асимптотами имеет место на частоте излома $\omega = \omega_i$ и составляет 3 дБ, как было показано выше. Отсюда также становится понятным, почему ω_i названа частотой излома — это частота, при которой происходит резкое изменение наклона асимптотической характеристики [см. рис. 8.9 (б)].

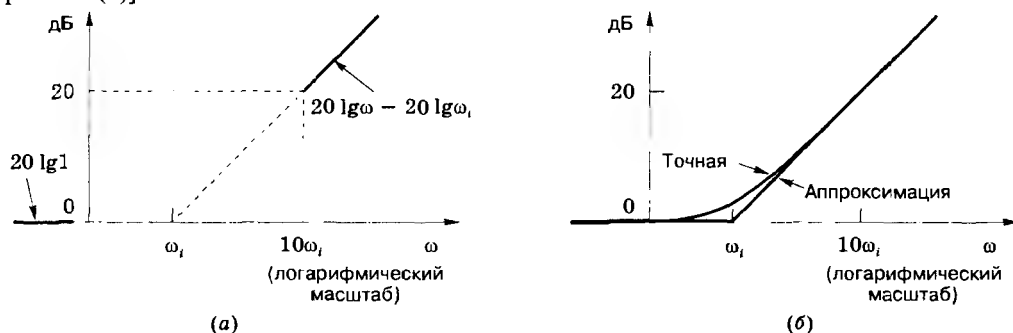


Рис. 8.9. Аппроксимация частотной характеристики элемента первого порядка

При построении частотных характеристик мы рассмотрим элементарные сомножители передаточных функций, имеющие следующие особенности:

1. Постоянный коэффициент усиления.
2. Полюсы и нули в начале координат.
3. Вещественные полюсы и нули не в начале координат.
4. Комплексные полюсы и нули.
5. Идеальное запаздывание по времени.

В таком порядке мы и рассмотрим эти элементы, причем сначала найдем вид амплитудных, а затем фазовых частотных характеристик.

8.2.1. Постоянный коэффициент усиления

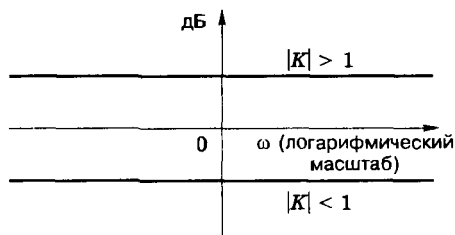
В случае постоянного коэффициента усиления

$$\text{дБ} = 20 \lg|K|,$$

и модуль этого выражения не зависит от частоты. На рис. 8.10 изображены две возможных ситуации. Если $|K| > 1$, то $\text{дБ} > 0$; если $|K| < 1$, то $\text{дБ} < 0$. В любом случае амплитудная характеристика имеет вид прямой линии с нулевым наклоном.

Рис. 8.10

Частотная характеристика для постоянного коэффициента усиления



8.2.2. Полюсы и нули в начале координат

В случае, когда передаточная функция имеет нуль в начале координат, соответствующая амплитудная характеристика определяется выражением

$$\text{дБ} = 20 \lg|j\omega| = 20 \lg\omega.$$

Следовательно, частотная характеристика имеет вид прямой линии с наклоном 20 дБ/дек, пересекающей ось частот при $\omega = 1$, как показано на рис. 8.11 (а). Эта прямая линия является точной характеристикой, над ней непосредственно указан наклон, выраженный в децибелах на декаду частоты. Для большей ясности на всех прямолинейных участках диаграммы Бode обычно указывается их наклон.

Если передаточная функция имеет полюс в начале координат, то амплитудная характеристика определяется выражением

$$\text{дБ} = -20 \lg\omega,$$

и соответствующий график является зеркальным отображением относительно оси частот предыдущей характеристики. Мы снова имеем прямую линию, пересекающую ось частот при $\omega = 1$, но наклон ее в данном случае равен -20 дБ/дек. Эта характеристика приведена на рис. 8.11 (б), она также является точной.

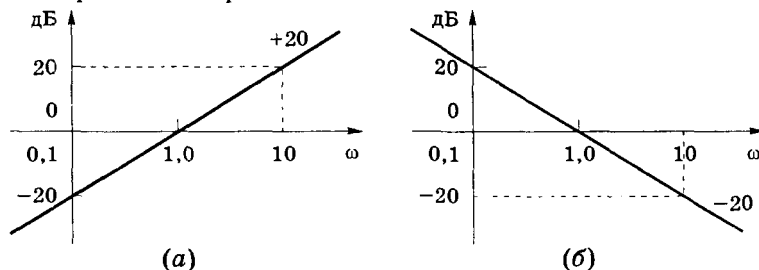
Если в начале координат находится нуль N -го порядка, то

$$\text{дБ} = 20 \lg|(j\omega)^N| = 20 \lg\omega^N = 20N \lg\omega,$$

т.е. характеристика по-прежнему имеет вид прямой линии, пересекающей ось частот при $\omega = 1$, но наклон ее равен $20N$ дБ/дек. При наличии в начале координат полюса N -го порядка последняя характеристика зеркально отображается относительно оси частот.

Рис. 8.11

Нуль и полюс при $s = 0$



8.2.3. Ненулевые вещественные полюсы и нули

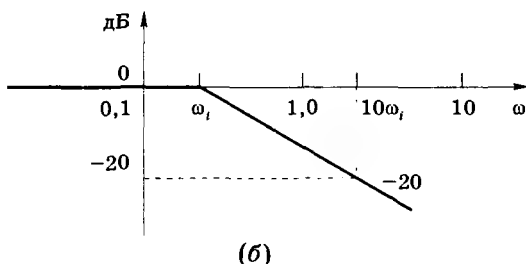
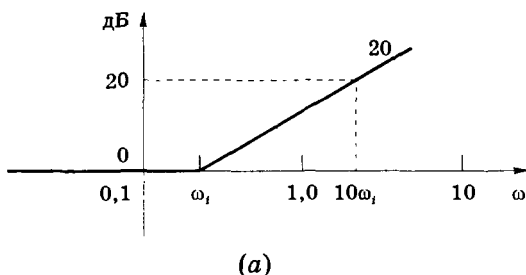
Этот случай уже был нами рассмотрен выше. Для элементарного сомножителя данного вида

$$20\lg\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_i}\right| = 20\lg\sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2} \approx \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_i, \\ 20\lg\omega - 20\lg\omega_i, & \omega > \omega_i. \end{cases} \quad (8-16)$$

На рис. 8.12 (а) показана прямолинейная аппроксимация частотной характеристики в случае нуля, а на рис. 8.12 (б) — в случае полюса передаточной функции. При этом соответствующие члены нормализованы так, чтобы их коэффициент усиления был равен единице, что соответствует значению 0 дБ. Такая нормализация не является обязательной, она сделана лишь для удобства построения.

Рис. 8.12

Частотные характеристики элементов первого порядка



Предположим теперь, что передаточная функция содержит сомножитель первого порядка в N -й степени, т.е. $(1 + s/\omega_i)^N$. Тогда ему будет соответствовать амплитудная характеристика с уравнением

$$\text{дБ}_i = 20\lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right]^{N/2} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_i, \\ 20N \lg(\omega/\omega_i), & \omega \gg \omega_i. \end{cases}$$

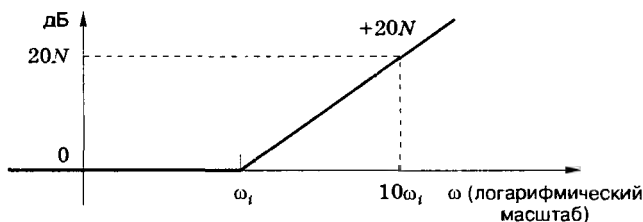
Прямолинейная аппроксимация такой характеристики в случае, когда подобный сомножитель находится в числителе передаточной функции, приведена на рис. 8.13. При $\omega > \omega_i$ наклон прямой линии равен $20N$ дБ/дек. Если аналогичный член находится в знаменателе, то при $\omega > \omega_i$ наклон прямой линии будет равен $-20N$ дБ/дек.

Пример 8.2

Рассмотрим передаточную функцию

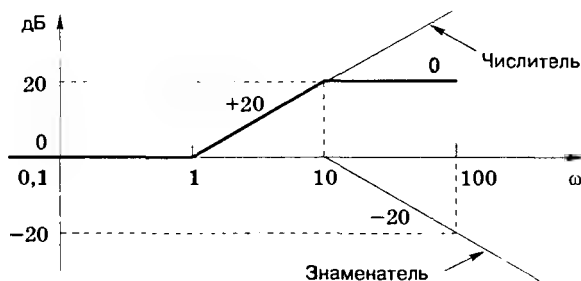
$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+10)} = \frac{s+1}{s/10+1}.$$

Рис. 8.13
 Диаграмма Бode
 для случая
 кратных корней



Частота излома для числителя $\omega = 1$, а для знаменателя $\omega = 10$. На рис. 8.14 изображены асимптотические амплитудные частотные характеристики для числителя, для знаменателя, и результирующая [которая, согласно (8-12), является суммой двух предыдущих]. Обратите внимание на легкость, с которой построена частотная характеристика, соответствующая простой передаточной функции.

Рис. 8.14
 Частотная характеристика
 к примеру 8.2



Мы всегда можем легко проверить начальное (при низких частотах) и конечное (при высоких частотах) значения амплитудной частотной характеристики, соответствующие диаграмме Бode. Так, для системы из примера 8.2,

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega/10}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \Rightarrow 0 \text{ дБ}$$

и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j\omega}{j\omega/10} = 10 \Rightarrow 20 \text{ дБ}.$$

Обратите внимание, что эти значения полностью соответствуют характеристике на рис. 8.14. Подобные вычисления очень полезны при проверке построения диаграммы Бode, и к ним всегда рекомендуется прибегать, даже если используется цифровой компьютер (возможны ошибки в программе или могут быть неправильно введены данные, или возникают ошибки при вычислениях).

Пример 8.3

Рассмотрим передаточную функцию из предыдущего примера, но с другим коэффициентом усиления и дополнительным полюсом при $s = -10$, т.е.

$$G(s) = \frac{200(s+1)}{(s+10)^2} = \frac{2(1+s)}{(1+s/10)^2}.$$

Диаграмма Бode имеет три составляющих. Первая соответствует постоянному коэффициенту усиления и имеет вид прямой линии с нулевым наклоном, расположенной на уровне

$20 \lg 2 = 6$ дБ. Вторая составляющая соответствует числителю с частотой излома $\omega = 1$, третья — полюсу кратности два при $s = -10$. На рис. 8.15 изображены все три составляющих и результирующая характеристика (как их сумма). Коэффициент усиления на низких частотах $G(0) = 2$, или 6 дБ. На высоких частотах

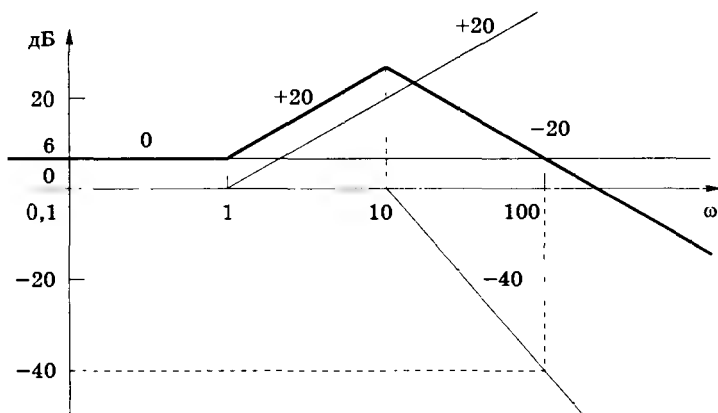
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \frac{200}{\omega}.$$

Следовательно, высокочастотная асимптота диаграммы Бode имеет наклон -20 дБ/дек. Диаграмма Бode для данного примера может быть построена с помощью программы MATLAB:

```
bode(tf([200 200], [1 20 100]));
```

Рис. 8.15

Частотная характеристика к примеру 8.3



Пример 8.4

В качестве третьего примера на построение диаграммы Бode рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1000(s+3)}{s(s+12)(s+50)} = \frac{5(1+s/3)}{s(1+s/12)(1+s/50)}.$$

Сначала определим постоянный коэффициент усиления (не зависящий от частоты):

$$\frac{(1000)(3)}{(12)(50)} = 5.$$

Тогда $20 \lg 5 = 14$ дБ, и все пять составляющих диаграммы Бode, а также результирующая характеристика изображены на рис. 8.16.

На низких частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \frac{5}{\omega},$$

что соответствует наклону -20 дБ/дек. На высоких частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \frac{1000}{\omega^2},$$

что соответствует наклону -40 дБ/дек. Эти вычисления полностью согласуются с рис. 8.16.

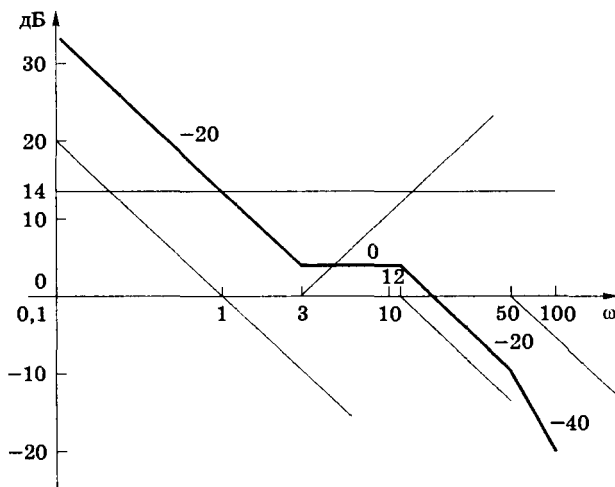


Рис. 8.16. Частотная характеристика к примеру 8.4

Разумеется, можно проверить и промежуточные точки характеристики, задавая численные значения ω .

Низкочастотная асимптота пересекает ось ω при $\omega = 5$, а высокочастотная — при $\omega = (1000)^{1/2} = 31,6$.

8.2.4. Фазовые характеристики

Перед тем, как рассматривать последние два типа сомножителей, входящих в передаточные функции, мы займемся построением фазовых характеристик, соответствующих трем предыдущим сомножителям. Для постоянного коэффициента усиления сдвиг по фазе равен либо 0° (если коэффициент положителен), либо $\pm 180^\circ$ (если коэффициент отрицателен).

Если передаточная функция имеет нуль в начале координат, то сдвиг по фазе равен 90° , поскольку

$$s|_{s=j\omega} = j\omega = \omega e^{j90^\circ}. \quad (8-18)$$

Аналогично, полюсу в начале координат соответствует сдвиг по фазе -90° , т.к.

$$\frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ}. \quad (8-19)$$

Отметим, что в обоих случаях фазовый сдвиг не зависит от частоты.

Если передаточная функция имеет вещественный нуль, расположенный вне начала координат, то соответствующий сомножитель представляется в виде

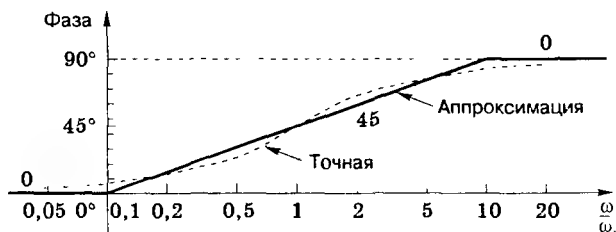
$$\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \Big|_{s=j\omega} = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2} e^{j\theta(\omega)}, \quad (8-20)$$

где

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (8-21)$$

Рис. 8.17

Фазовая характеристика для случая вещественного нуля



Значения θ при различных отношениях ω/ω_1 приведены в таблице 8.2, а сама фазовая характеристика изображена на рис. 8.17. На этом же рисунке приведена кусочно-линейная аппроксимация точной характеристики, которая имеет два излома — на частотах $0,1\omega_1$ и $10\omega_1$. Между этими частотами, как ясно из рисунка, прямая имеет наклон 45 град/дек. Хотя подобная аппроксимация связана с определенной погрешностью, мы в данной книге будем ее использовать ради удобства. Когда необходимо точное построение фазовой характеристики, расчеты должны выполняться с помощью компьютера. Заметим, что в случае вещественного ненулевого полюса передаточной функции фазовая характеристика отличается от

предыдущей только знаком, т.к.

$$\left. \frac{1}{1 + s/\omega_i} \right|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2}} e^{j\theta(\omega)}, \quad (8-22)$$

где

$$\theta(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_i}.$$

Далее мы рассмотрим три примера на построение фазовой частотной характеристики.

Таблица 8.2

ω/ω_i	Точное значение (град)	Кусочно-линейная аппроксимация (град)
0,05	2,9	0
0,1	5,7	0
0,2	11,3	13,5
0,5	26,6	31,5
0,8	38,7	40,6
1,0	45,0	45,0
2	63,4	58,5
5	78,7	76,5
8	82,9	85,6
10	84,3	90
20	87,1	90

Пример 8.5

Рассмотрим еще раз систему из примера 8.2:

$$G(s) = \frac{s+1}{s/10+1}.$$

Кусочно-линейная аппроксимация фазовой характеристики, соответствующей нулю передаточной функции, имеет изломы на частотах $\omega = 0,1(1) = 0,1$ и $\omega = 10(1) = 10$. Для полюса аналогично получаем изломы при $\omega = 0,1(10) = 1$ и $\omega = 10(10) = 100$. Эти составляющие, а также результирующая характеристика (их сумма) изображены на рис. 8.18. Там же указаны наклоны участков в градусах на декаду.

Как и при построении амплитудных характеристик, мы можем проверить предельные значения фазового сдвига. При низких частотах

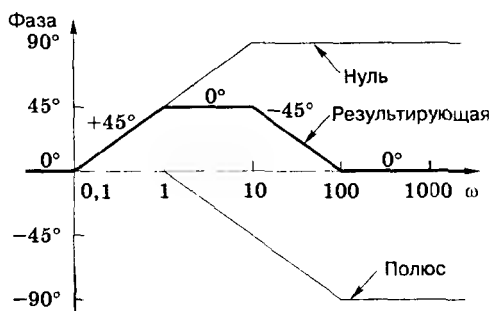


Рис. 8.18

Фазовая характеристика к примеру 8.5

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1,$$

что соответствует сдвигу по фазе 0° . На высоких частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 10,$$

это также дает сдвиг по фазе 0° (см. рис. 8.18).

Пример 8.6

В качестве второго примера, иллюстрирующего построение фазовой характеристики диаграммы Боде, рассмотрим систему из примера 8.4, передаточная функция которой

$$G(s) = \frac{5(1 + s/3)}{s(1 + s/12)(1 + s/50)}.$$

На рис. 8.19 приведены фазовые характеристики отдельных сомножителей, а также результирующая характеристика. В области низких частот

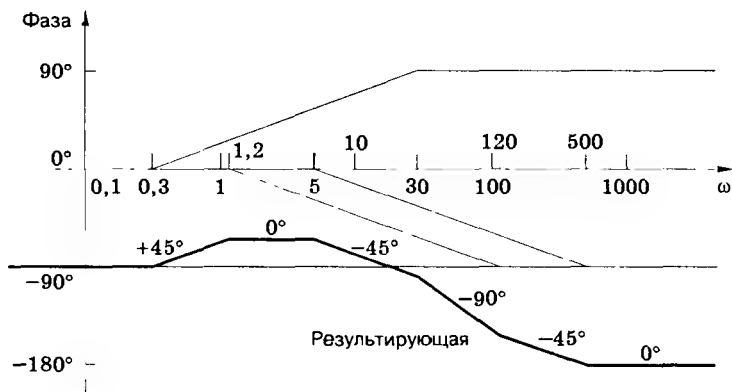
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{5}{j\omega} = \frac{5}{\omega} e^{-j90^\circ},$$

следовательно, начальное значение фазового сдвига равно -90° . При высоких частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{1000}{(j\omega)^2} = \frac{1000}{\omega^2} e^{-j180^\circ},$$

таким образом, конечное значение фазового сдвига равно -180° . Этот факт отражают построения на рис. 8.19. Обратите внимание, что предельные значения $G(j\omega)$ позволяют также определить наклон низкочастотной и высокочастотной асимптот амплитудной характеристики.

Рис. 8.19
Фазовые
характеристики
к примеру 8.6



Пример 8.7

Последний пример связан с построением полной диаграммы Боде для передаточной функции

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s/10}.$$

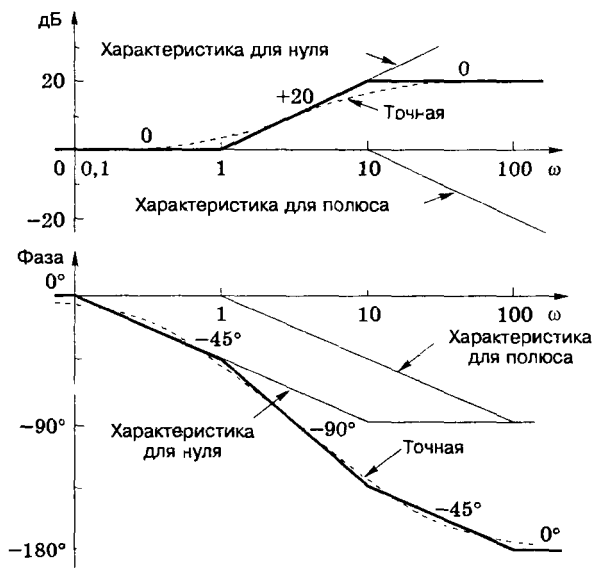
Эта передаточная функция отличается от рассмотренных в примерах 8.2 и 8.5 тем, что ее нуль находится вместо точки $s = -1$ в точке $s = 1$. Таким образом, эта передаточная функция является *неминимально-фазовой* (некоторые полюсы и/или нули находятся в правой полуплоскости). Прежде всего отметим, что амплитудная характеристика ничем не отличается от построенной в примере 8.2, т.к. модуль комплексного числа не зависит от знака действительной или мнимой части, т.е.

$$|1 + j\omega| = |1 - j\omega| = \sqrt{1 + \omega^2}.$$

Таким образом, амплитудная характеристика, изображенная на рис. 8.20, совпадает с характеристикой на рис. 8.14.

Рис. 8.20

Диаграмма Бode
для примера 8.7



Фазовая характеристика, соответствующая нулю передаточной функции, изменяется от 0° до -90° вследствие знака минус у мнимой части:

$$1 - j\omega = \sqrt{1 + \omega^2} e^{j\theta(\omega)}, \quad \theta(\omega) = -\arctg \omega.$$

Резльтирующая фазовая характеристика приведена на рис. 8.20. Предельные значения сдвига по фазе проверяются по следующим выражениям:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1e^{j0^\circ},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{-j\omega}{j\omega/10} = -10 = 10e^{-j180^\circ}.$$

Ошибки, связанные с кусочно-линейной аппроксимацией фазовых характеристик, соответствующих простым передаточным функциям, можно оценить, построив точную характеристику для рассматриваемой системы (см. рис. 8.20). Диаграмма Бode, представленная на рис. 8.20, может быть построена с помощью программы MATLAB:

```
bode([-10 10], [1 10])
```

В заключение отметим, что график в полярных координатах (например, для примера 8.3) не изменится в результате поворота на 360° или на -360° . То же самое справедливо для диаграммы Бode, если сместить ее фазовую характеристику вверх или вниз на 360° .

В данном разделе мы уделили внимание диаграммам Бode для случая, когда передаточная функция имеет только вещественные полюсы или нули. Далее будет рассмотрен случай комплексных полюсов и нулей.

8.3. Остальные составляющие

В данном разделе мы рассмотрим два типа сомножителей, которые могут встретиться при построении диаграмм Бode. Сначала возьмем за основу сомножители в числителе либо в знаменателе передаточной функции вида

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2, \quad 0 \leq \zeta < 1. \quad (8-23)$$

Затем рассмотрим передаточную функцию, соответствующую эффекту идеального запаздывания по времени (транспортного запаздывания).

8.3.1. Комплексные полюсы и нули

Сначала мы рассмотрим комплексные полюсы и нули, обусловленные сомножителями вида (8-23). Как и в последнем разделе, для удобства построения нормализуем (8-23) так, чтобы данный сомножитель имел единичный коэффициент усиления на нулевой частоте; для этого вынесем из него ω_n^2 и будем рассматривать выражение

$$1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2. \quad (8-24)$$

Модуль и аргумент этого выражения при $s = j\omega$ являются функциями коэффициента затухания ζ , что в общем случае не позволяет использовать кусочно-линейную аппроксимацию. Однако мы приведем некоторые случаи, когда это допустимо, а затем рассмотрим общий случай, когда недопустимо.

Сначала предположим, что $\zeta = 1$. В этом случае (8-24) имеет два одинаковых вещественных нуля:

$$\left[1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 \right] \bigg|_{\zeta=1} = \left(1 + \frac{s}{\omega_n} \right)^2.$$

Поскольку нули вещественные, мы можем воспользоваться методами, изложенными в предыдущем разделе. Кусочно-линейная аппроксимация амплитудной и фазовой характеристик вместе с их точным изображением представлена на рис. 8.21. Максимальная ошибка при аппроксимации амплитудной характеристики имеет место при $\omega = \omega_n$ и равна 6 дБ. Это весьма ощутимая погрешность, т.к. она соответствует расхождению в 2 раза. При $\omega = \omega_n$ точное значение амплитудной характеристики равно 2, тогда как аппроксимация дает значение 1.

В случаях, когда $\zeta < 1$, иногда также используется кусочно-линейная аппроксимация, но при этом погрешность может быть весьма значительной. На рис. 8.22 приведены несколько точных кривых, для которых максимальная ошибка при аппроксимации амплитудных характеристик не превышает 6 дБ. Это значение выбрано достаточно произвольно; на практике могут использоваться и другие максимально допустимые значения ошибки. Из графиков на рис. 8.22 видно, что кусочно-линейная аппроксимация с погрешностью

6 дБ может быть применена при комплексных нулях и полюсах с параметром $\zeta \geq 0,3$. Од-

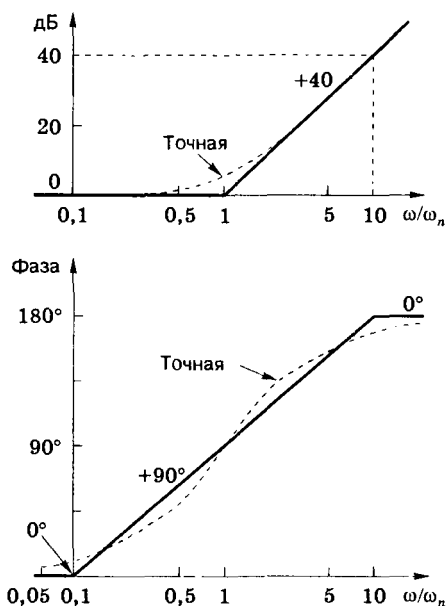
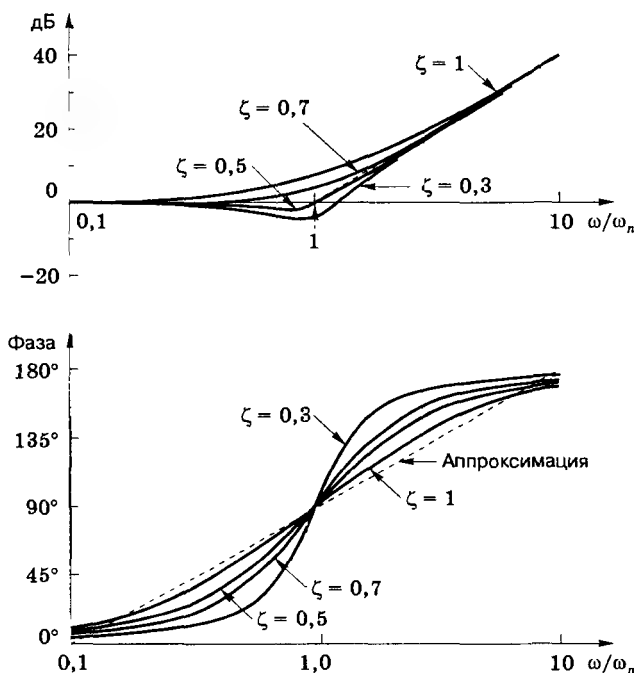


Рис. 8.21. Диаграмма Бode для случая кратного нуля

Рис. 8.22
Диаграмма Бode
для случая
комплексных нулей



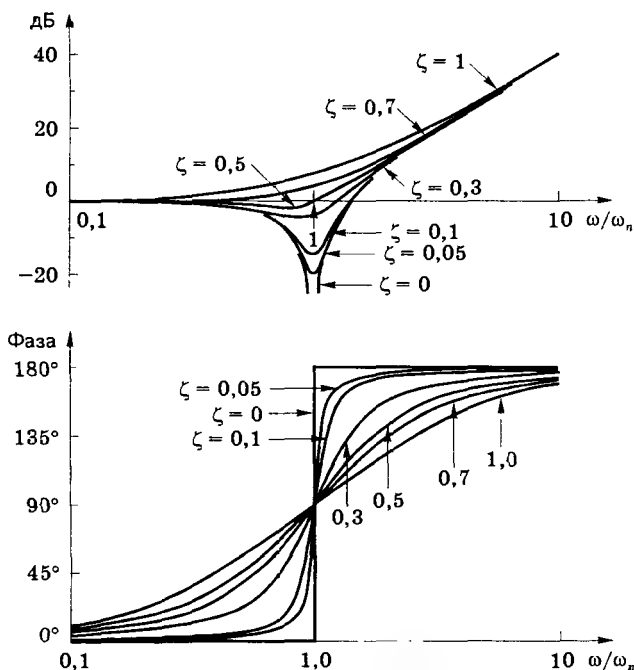
нако обратите внимание, что аппроксимация фазовых характеристик при этом дает очень большую погрешность. Следует помнить также, что мы пользуемся аппроксимацией диаграммы Бode только с целью получения общего представления о частотных характеристиках. Если при анализе или синтезе системы требуется точный вид этих характеристик, то они должны вычисляться с помощью компьютера.

Диаграммы Бode на рис. 8.22 изображены для случая комплексных нулей; в случае комплексных полюсов все значения характеристик должны быть взяты с противоположным знаком. При $\zeta < 0,3$ кусочно-линейная аппроксимация является очень грубой и поэтому редко используется. Вместо этого прибегают к построению точных кривых. На рис. 8.23 приведены точные кривые, соответствующие комплексным нулям, для нескольких значений ζ в интервале от 0 до 1. Еще раз отметим, что в случае комплексных полюсов характеристики зеркально отображаются относительно оси частот. Предельный случай для $\zeta = 1$ был рассмотрен ранее. Представляет интерес и другой предельный случай для $\zeta = 0$, который приводит к появлению множителя вида

$$1 + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2.$$

Он имеет чисто мнимые нули $\omega = \pm j\omega_n$. Следовательно, на частоте $\omega = \omega_n$ модуль множителя равен 0 (или $-\infty$ дБ). Аргумент этого множителя равен 0° при $\omega < \omega_n$ и 180° при $\omega > \omega_n$. Таким образом, фазовая характеристика при $\omega = \omega_n$ претерпевает скачок на 180° . Эти характеристики приведены на рис. 8.23. Далее рассмотрим пример, иллюстрирующий учет комплексных множителей при построении диаграммы Бode.

Рис. 8.23
Диаграмма Бode
для случая
комплексных нулей



Пример 8.8

Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{200(s+1)}{s^2 + 4s + 100} = \frac{2(s+1)}{(s/10)^2 + 2(0.2)(s/10) + 1}.$$

Паре комплексных полюсов соответствует $\zeta = 0,2$, поэтому трудно ожидать, что в окрестности частоты $\omega_n = 10$ кусочно-линейная аппроксимация будет достаточно точной. На рис. 8.24 приведена такая аппроксимация вместе с точной амплитудной характеристикой, откуда видно, что максимальная погрешность равна примерно 8 дБ. Обратите внимание, сколь велика погрешность при аппроксимации фазовой характеристики. Точные кривые на рис. 8.24 построены с помощью инструкции MATLAB:

```
bode([0 200 200], [1 4 100])
```

8.3.2. Идеальное запаздывание по времени

Сначала мы дадим математическое определение *идеального запаздывания по времени*, а потом приведем пример системы, обладающей данным эффектом. Предположим, что на вход звена идеального запаздывания подан сигнал $e(t)$, как показано на рис. 8.25 (а). Тогда, по определению, выходной сигнал будет равен $e(t - t_0)u(t - t_0)$, где t_0 — величина запаздывания по времени. Если $E(s)$ и $C(s)$ есть, соответственно, изображения по Лапласу сигналов $e(t)$ и $c(t)$, то

$$C(s) = L[e(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 s} E(s). \quad (8-25)$$

Следовательно, звено идеального запаздывания имеет передаточную функцию

$$G(s) = e^{-t_0 s}, \quad (8-26)$$

Рис. 8.24
Диаграмма Бode
к примеру 8.8

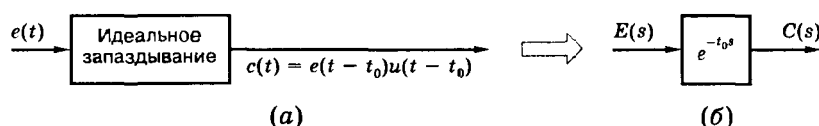
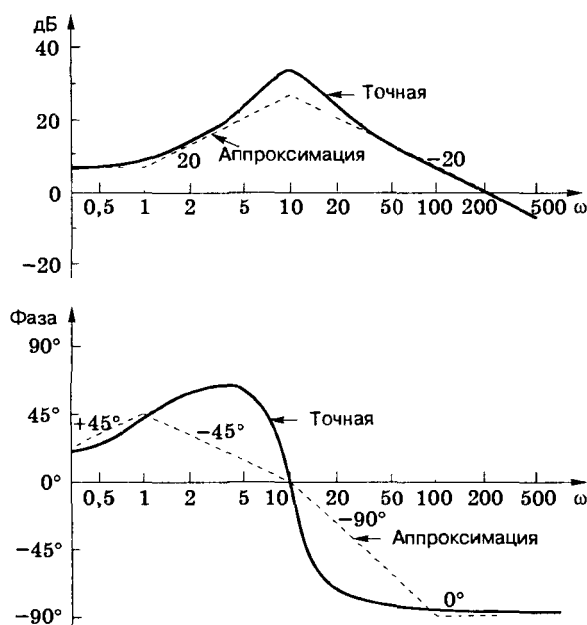


Рис. 8.25. Идеальное запаздывание по времени

как показано на рис. 8.25 (б). Заметим, что эта передаточная функция отличается от всех ранее рассмотренных тем, что она не является отношением двух полиномов. Это обстоятельство затрудняет анализ систем, содержащих идеальное запаздывание. Например, к таким системам не применим критерий Рауса-Гурвица, т.к. в этом случае характеристическое уравнение не является полиномом относительно степеней s . Эту проблему мы рассмотрим более детально после того, как познакомимся с критерием Найквиста.

Прежде чем мы займемся построением диаграммы Бode для передаточной функции (8-26), рассмотрим систему с идеальным запаздыванием по времени, чтобы лучше уяснить суть явления. На рис. 8.26 схематически изображен процесс работы прокатного стана. Система предназначена для точного выдерживания толщины w стального листа при прокате. Пусть $w(t)$ есть расстояние между наружными поверхностями валков. Это расстояние обычно устанавливается с помощью гидравлического исполнительного механизма и не поддается точному измерению. Вместо этого толщина стального листа измеряется датчиком на некотором удалении от валков. Следовательно, результат измерения толщины листа, определяемый расстоянием между валками, появляется спустя t_0 секунд, где t_0 определяется положением датчика относительно валков и скоростью движения стального листа. Если результат измерения используется в замкнутой системе управления толщиной листа, то датчик дает информацию не о текущей толщине листа, а о том ее значении, которое имело место на t_0 секунд ранее. Это запаздывание по времени может создать определенные проблемы при синтезе систем управления, как мы увидим в дальнейшем.

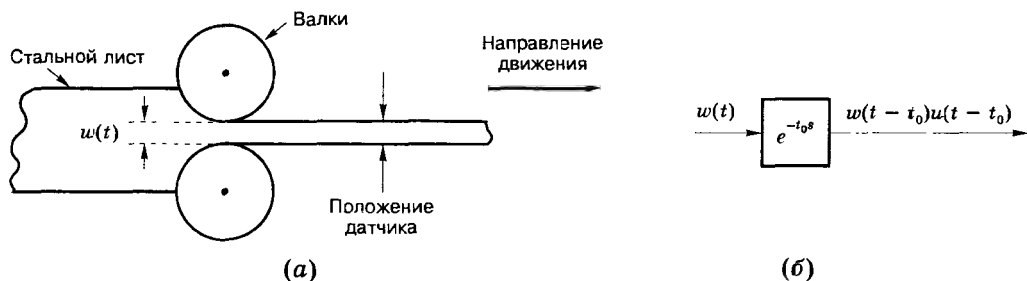


Рис. 8.26. Пример идеального запаздывания по времени

Частотные характеристики, соответствующие передаточной функции (8-26), мы получим путем замены s на $j\omega$:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0}. \quad (8-27)$$

Таким образом, модуль частотной функции равен единице, а аргумент является линейной функцией частоты. Отставание по фазе за счет идеального запаздывания по времени неограниченно растет с увеличением частоты. То, что коэффициент усиления звена запаздывания равен единице, очевидно, поскольку сам сигнал не претерпевает никаких изменений за исключением только сдвига по времени. Например, предположим, что на вход звена запаздывания на t_0 секунд поступает сигнал $e(t) = A \cos \omega t$. Тогда выходной сигнал звена по определению будет равен

$$\begin{aligned} A \cos[\omega(t - t_0)]u(t - t_0) &= A \cos(\omega t - \omega t_0)u(t - t_0) = \\ &= A \cos(\omega t - \theta)u(t - t_0), \quad \theta = \omega t_0. \end{aligned} \quad (8-28)$$

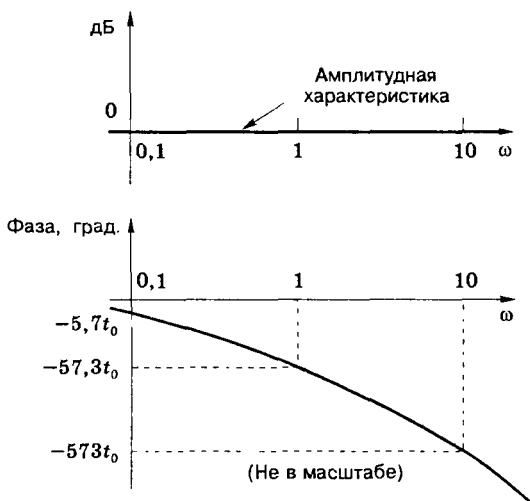
При $t > t_0$ выходной сигнал равен $A \cos(\omega t - \theta)$. Отсюда видно, что амплитуда сигнала не изменилась, он лишь приобрел отставание по фазе на ωt_0 радиан.

Диаграмма Бode, соответствующая передаточной функции звена идеального запаздывания, представлена на рис. 8.27. Амплитудная характеристика, разумеется, равна 0 дБ, а фазовая определяется выражением:

$$\text{фаза} = -57,3\omega t_0 \text{ (град.)} \quad (8-29)$$

Рис. 8.27

Частотные характеристики идеального запаздывания по времени



Теперь проиллюстрируем на примере построение диаграммы Бode для системы, содержащей идеальное запаздывание по времени.

Пример 8.9

Рассмотрим систему с идеальным запаздыванием по времени, изображенную на рис. 8.28. Передаточная функция этой системы

$$G(s) = \frac{e^{-0,2s}}{s(s+1)}.$$

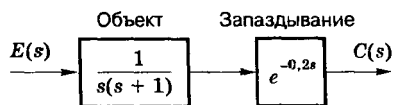


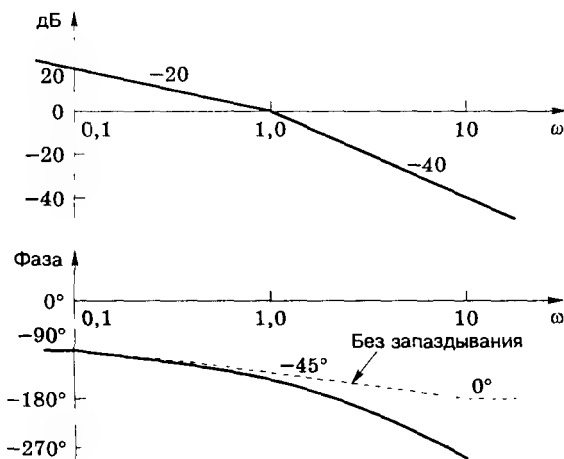
Рис. 8.28. Система к примеру 8.9

Два полюса передаточной функции учитываются при построении диаграммы Бode так, как было описано выше. Идеальное запаздывание дает вклад 0 дБ в амплитудную характеристику и $-57,3\omega t_0 = -11,46\omega$ (град.) — в фазовую. Соответствующая диаграмма Бode приведена на рис. 8.29. Расчеты и построения выполнены с помощью следующей программы MATLAB:

```
nn = 30; a = -1; b = 1;
w = logspace(a, b, nn);
[mag, phase, w] = bode([1], [1 1 0], w);
db = 20*log10(mag);
phased1 = (-0.2)*57.296*w;
phase = phase + phased1;
subplot(211), semilogx(w, db)
title('Bode diagram'); xlabel('frequency');
ylabel('dB'); grid
subplot(212), semilogx(w, phase)
xlabel('frequency'); ylabel('phase'); grid
```

Рис. 8.29

Диаграмма Бode к примеру 8,9



8.4. Критерий Найквиста

В этом разделе мы будем рассматривать замкнутые системы с конфигурацией, изображенной на рис. 8.30. Характеристическое уравнение такой системы имеет вид:

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (8-30)$$

По этому уравнению можно определить, является ли система устойчивой и если да, то оценить некоторые важные показатели переходного процесса, как это было рассмотрено ранее. Данный раздел будет посвящен анализу устойчивости замкнутой системы по диа-

грамме Боде для разомкнутой системы, построенной на основании частотной функции $G(j\omega)H(j\omega)$. Такую возможность представляет нам критерий Найквиста, суть которого рассматривается в данном разделе.

Чтобы перейти к критерию Найквиста, рассмотрим сначала некоторые функциональные отображения с комплексной s -плоскости на плоскость $F(s)$. Пусть, например, функция $F(s)$ задана выражением

$$F(s) = s - s_0, \quad (8-31)$$

где s_0 — некоторая заданная величина, которая в общем случае может быть комплексной. Предположим, что мы хотим отобразить окружность с центром в точке s_0 на s -плоскости в кривую на плоскости $F(s)$, как показано на рис. 8.31. Кривая C на s -плоскости, представленная на рис. 8.31 (а), должна быть отображена в кривую Γ на плоскости $F(s)$ путем вычисления значений $F(s)$ для точек кривой C и нанесения полученных комплексных чисел на плоскость $F(s)$. Для простой функции (8-31) $F(s)$ есть вектор, изображенный на рис. 8.31 (а), а результирующая кривая на плоскости $F(s)$ является окружностью того же радиуса, что и кривая C , но с центром в начале координат.

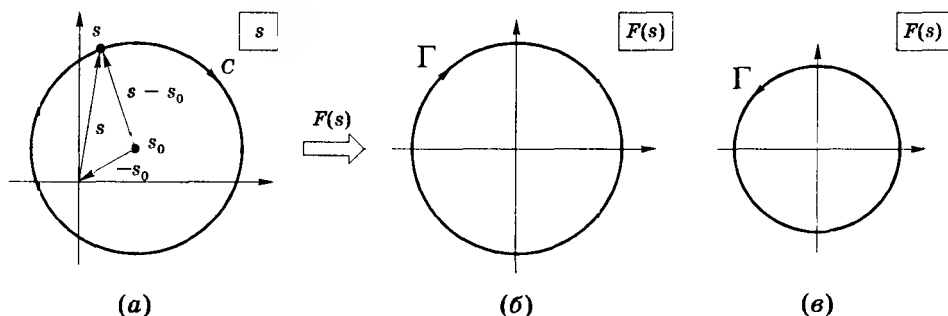


Рис. 8.31. Отображения на комплексной плоскости

Заметим, что кривая C охватывает нуль функции $F(s)$ на s -плоскости по часовой стрелке, при этом кривая Γ охватывает начало координат на плоскости $F(s)$ также по часовой стрелке. Как вскоре будет показано, это обстоятельство является очень важным.

Теперь рассмотрим функцию

$$F(s) = \frac{1}{s - s_0}, \quad (8-32)$$

которая является обратной выражению (8-31). Если с помощью данной функции отображать кривую C на рис. 8.31 (а) на плоскость $F(s)$, то вектор $s - s_0$ остается тем же, что на этом рисунке. Следовательно, вектор $F(s)$ является обратным вектору $s - s_0$. Модуль $F(s)$ является величиной, обратной модулю вектора на рис. 8.31 (б), а его аргумент отличается знаком. Таким образом, в данном случае кривая Γ на плоскости $F(s)$ также представляет собой окружность, как показано на рис. 8.31 (в), за исключением того, что движение по ней совершается против часовой стрелки. Для данной функции охват ее полюса на s -плоскости по часовой стрелке приводит к охвату начала координат на плоскости $F(s)$ против часовой стрелки.

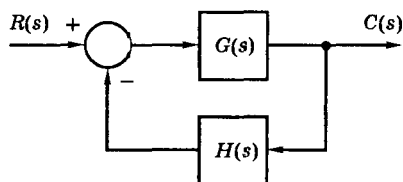


Рис. 8.30. Замкнутая система

В качестве третьего примера отображения рассмотрим функцию $F(s)$ вида

$$F(s) = (s - s_0)(s - s_1) \quad (8-33)$$

и предположим, что кривая C на s -плоскости охватывает оба нуля s_0 и s_1 , так, как показано на рис. 8.32 (а). В данном случае кривая C не обязательно должна быть окружностью. Два вектора, образующие $F(s)$, также показаны на рис. 8.32 (а). При движении точки s по замкнутой кривой C вектор $(s - s_0)$ поворачивается на угол -360° , и на такой же угол поворачивается вектор $(s - s_1)$. Следовательно, аргумент функции $F(s)$ изменяется на -720° . В то же время модули обоих векторов являются ограниченными и отличными от нуля. Таким образом, кривая Γ , отображающая кривую C на плоскость $F(s)$, дважды должна охватывать начало координат, как показано на рис. 8.32 (б). Заметим, что кривая C на s -плоскости охватывает два нуля функции $F(s)$ по часовой стрелке. При этом кривая Γ на плоскости $F(s)$ дважды охватывает начало координат также по часовой стрелке.

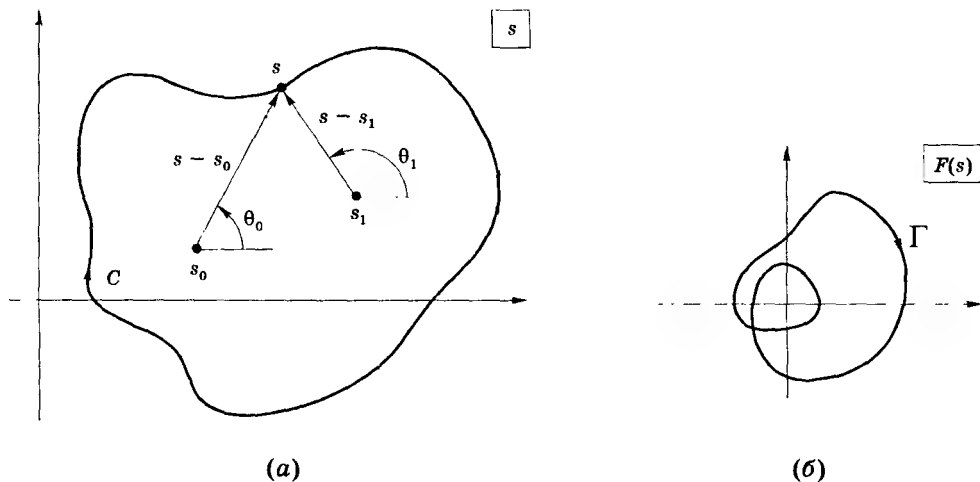


Рис. 8.32. Контур охвата двух нулей

Если отображение $F(s)$ является обратным функции (8-33), т.е.

$$F(s) = \frac{1}{(s - s_0)(s - s_1)}, \quad (8-34)$$

то векторы, «привязанные» к кривой C , остаются теми же, как на рис. 8.32. Поскольку аргумент произведения двух этих векторов изменяется на -720° , то аргумент $F(s)$ в выражении (8-34) изменяется на 720° . Следовательно, кривая Γ должна дважды охватить начало координат против часовой стрелки. Охват двух полюсов на s -плоскости по часовой стрелке приводит к двум охватам против часовой стрелки начала координат на плоскости $F(s)$.

Как мы уже заметили, существует определенная связь между числом полюсов и нулей, охватываемых контуром C на s -плоскости, и числом и направлением охватов начала координат на плоскости $F(s)$. Можно было бы привести еще ряд примеров, подтверждающих такую связь, но их результаты обобщаются в виде теоремы, известной под названием *принцип аргумента Коши* [3].

Теорема. Пусть $F(s)$ — отношение двух полиномов от s , а замкнутая кривая C на s -плоскости отображается с помощью $F(s)$ в другую замкнутую кривую на комплексной плоскости. Если $F(s)$ является аналитической внутри и на C за исключением конечного

числа полюсов, и если $F(s)$ не имеет ни нулей ни полюсов на C , то

$$N = Z - P, \quad (8-35)$$

где Z — число нулей $F(s)$, P — число полюсов $F(s)$, а N — число охватов отображенной кривой начала координат в том же смысле, что и обход по кривой C .

Принцип аргумента Коши является математической основой критерия Найквиста. Мы не будем здесь уточнять понятие *аналитическая* функция. Заметим только, что все функции, рассматриваемые в этой книге, удовлетворяют условиям теоремы. Читатель, интересующийся математическими аспектами данной проблемы, может обратиться к любой книге по теории функций комплексного переменного (например, [3]).

Теперь приступим к формулировке критерия Найквиста. Предположим, что нам нужно найти отображение на комплексную плоскость характеристической функции замкнутой системы (рис. 8.30), которая имеет вид:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s).$$

Далее, пусть кривая C имеет вид, изображенный на рис. 8.33 (а). Эта кривая, образованная мнимой осью и дугой бесконечного радиуса, полностью охватывает правую половину s -плоскости. Согласно принципу аргумента Коши (8-35), Z есть число нулей характеристической функции системы, расположенных в правой половине s -плоскости. Следовательно, чтобы система была устойчива, Z должно равняться нулю.

В выражении (8-35) P есть число полюсов характеристической функции в правой половине s -плоскости, а следовательно, и число «правых» полюсов передаточной функции разомкнутого контура $G(s)H(s)$, поскольку полюсы $[1 + G(s)H(s)]$ одновременно являются и полюсами $G(s)H(s)$. Следовательно, P характеризует устойчивость разомкнутой системы. Если P не равно нулю, то разомкнутая система неустойчива. Как будет показано ниже, чтобы воспользоваться критерием Найквиста, сначала нужно определить P .

Кривая на рис. 8.33 (а) называется *путем (контуром) Найквиста*, а на рис. 8.33 (б) показан пример отображения его на комплексную плоскость. Последняя кривая дважды охватывает начало координат по часовой стрелке, тогда на основании (8-35)

$$N = 2 = Z - P$$

или

$$Z = 2 + P.$$

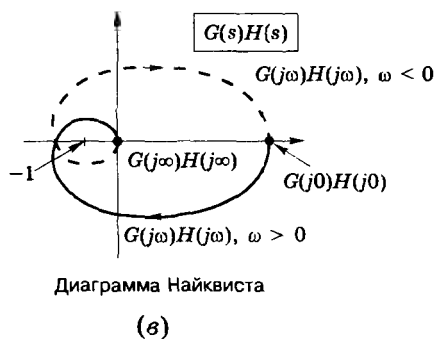
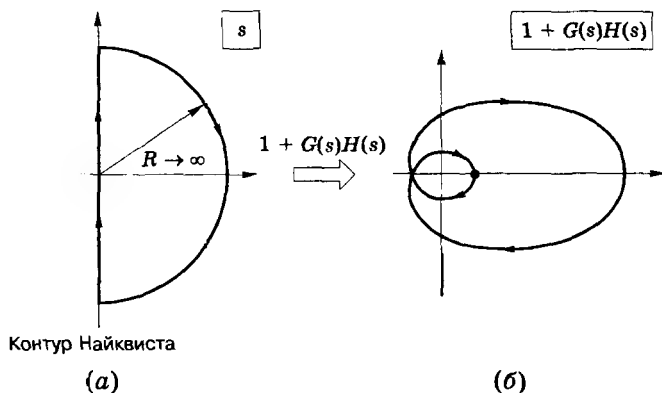
Поскольку P есть число полюсов функции внутри контура Найквиста, оно не может быть отрицательным. Поэтому в данном примере $Z \geq 2$, значит, замкнутая система неустойчива.

Критерий Найквиста может быть несколько модифицирован, чтобы упростить его практическое применение. Предположим, что вместо изображения кривой $1 + G(s)H(s)$, как на рис. 8.33 (б), мы будем строить кривую $G(s)H(s)$. Очевидно, она сохранит ту же форму, но будет сдвинута на единицу влево, как показано на рис. 8.33 (в). Таким образом, вместо того, чтобы строить кривую $1 + G(s)H(s)$ и подсчитывать число охватов ею начала координат, мы получим тот же результат, если построим кривую $G(s)H(s)$ и подсчитаем число охватов ею точки $-1 + j0$ (в дальнейшем будем эту точку обозначать как просто -1). Обычно критерий Найквиста применяется именно в этой модификации, а кривая, построенная на основании передаточной функции разомкнутой системы $G(s)H(s)$, называется *диаграммой Найквиста*. Еще раз отметим, что мы пользуемся характеристикой разомкнутой системы для определения устойчивости замкнутой системы.

Теперь критерий Найквиста можно сформулировать, имея в виду рис. 8.34. Контур Найквиста изображен на рис. 8.34 (а). Отображение этого контура в диаграмму Найквиста

Рис. 8.33

Диаграмма Найквиста



посредством передаточной функции разомкнутой системы $G(s)H(s)$ показано на рис. 8.34 (б). Тогда

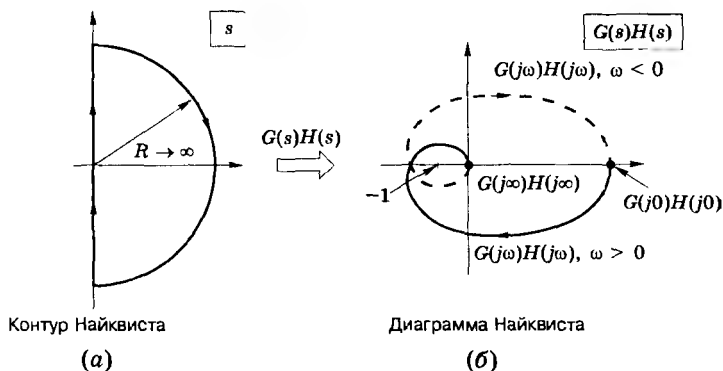
$$Z = N + P, \quad (8-36)$$

где Z — число корней характеристического уравнения замкнутой системы в правой полуплоскости, N — число охватов по часовой стрелке точки -1 , а P — число полюсов передаточной функции разомкнутой системы $G(s)H(s)$ в правой полуплоскости.

Проиллюстрируем применение критерия Найквиста на простом примере.

Рис. 8.34

Типичная диаграмма Найквиста



Пример 8.10

Рассмотрим систему, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$G(s)H(s) = \frac{5}{(s+1)^3}.$$

Тогда

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5}{(1+j\omega)^3}.$$

Результаты вычислений для некоторых значений ω , необходимые для построения диаграммы Найквиста, приведены в таблице 8.3, а сама кривая изображена на рис. 8.35. Коэффициент усиления $G(0)H(0) = 5$ (отмечено цифрой I). Сплошная кривая, отмеченная цифрой II, построена непосредственно по данным таблицы 8.3. Поскольку

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 0,$$

то дуга бесконечного радиуса на контуре Найквиста отображается в начало координат плоскости $G(s)H(s)$ (цифра III). Для отрицательных значений ω необходимо взять числа, комплексно-сопряженные данным таблицы 8.3. Соответствующий участок диаграммы Найквиста на рис. 8.35 изображен в виде пунктирной кривой (цифра IV).

Таблица 8.3 Частотная характеристика

ω	$ 1 + j\omega $	$\arg(1 + j\omega)$	$ G(j\omega) $	$\arg G(j\omega)$
0	1	0°	5	0°
0,5	1,118	$26,6^\circ$	3,58	$-79,8^\circ$
1,0	1,414	45°	1,77	-135°
1,5	1,80	$56,3^\circ$	0,85	-169°
2,0	2,24	$63,4^\circ$	0,45	$-190,3^\circ$
5,0	5,10	$78,7^\circ$	0,038	$-236,1^\circ$
20,0	20,0	$87,1^\circ$	0,0006	$-261,3^\circ$

Рис. 8.35
Диаграмма Найквиста к примеру 8.10

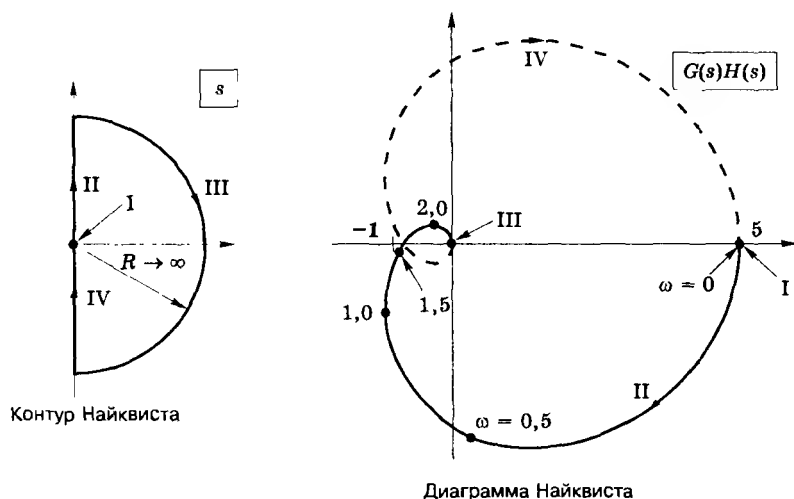


Диаграмма Найквиста

Проведем анализ выражения (8-36). В данном случае $P = 0$, т.к. функция $G(s)H(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. Подчеркнем, что P — это число не всех полюсов функции $G(s)H(s)$, а только тех, которые расположены в *правой полуплоскости*. Из диаграммы Найквиста на рис. 8.35 мы видим, что число охватов точки -1 на плоскости $G(s)H(s)$, $N = 0$. Тогда число нулей характеристической функции, находящихся в правой полуплоскости,

$$Z = N + P = 0 - 0 = 0,$$

следовательно, замкнутая система устойчива. Диаграмма Найквиста на рис. 8.35 может быть построена с помощью следующей инструкции MATLAB:

```
nyquist([0 0 0 5], [1 3 3 1])
```

Устойчивость данной системы можно проверить, воспользовавшись критерием Рауса-Гурвица. Предположим, что коэффициент усиления разомкнутой системы увеличен в K раз, т.е. характеристическое уравнение имеет вид:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{5K}{(s+1)^3} = 1 + \frac{5K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 0,$$

или

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 5K = 0.$$

Составим таблицу Рауса (см. раздел 6.1):

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+5K \\ s^1 & \frac{8-5K}{3} & \\ s^0 & 1+5K & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K < 5/8 \\ K > -0,2. \end{array}$$

Система устойчива при $-0,2 < K < 8/5$. Диаграмма Найквиста на рис. 8.35 построена при $K = 1$, следовательно исследуемая система является устойчивой.

Возникает вопрос: почему мы для анализа устойчивости используем критерий Найквиста, если критерий Рауса-Гурвица намного проще в применении, как показал последний пример? Одним из аргументов в пользу критерия Найквиста является то, что он не только отвечает на вопрос об устойчивости, но также дает полезную информацию, используемую при синтезе регуляторов. Об этом речь пойдет в следующей главе.

Второе обстоятельство, свидетельствующее о полезности критерия Найквиста, очевидно из рис. 8.35. *Участок II диаграммы Найквиста представляет собой частотную характеристику разомкнутой системы.* Фактически, полная диаграмма Найквиста может быть построена на основании частотной функции $G(j\omega)H(j\omega)$, т.к. участки I и III также входят в частотную характеристику, а участок IV соответствует ее комплексно-сопряженным значениям. Поскольку частотная характеристика может быть получена экспериментально, то диаграмму Найквиста можно построить непосредственно по этим данным, не зная передаточной функции $G(s)H(s)$.

Следует отметить еще одно обстоятельство, связанное с применением критерия Найквиста для анализа устойчивости. Предположим, что при некоторой частоте $\omega = \omega_1$ диаграмма Найквиста проходит через точку -1 . Тогда

$$G(j\omega_1)H(j\omega_1) = -1,$$

или

$$1 + G(j\omega_1)H(j\omega_1) = 0. \quad (8-37)$$

Это говорит о том, что замкнутая система имеет полюс при $s = j\omega_1$, т.е. она находится на границе устойчивости и совершает колебания на частоте ω_1 при условии, что все оста-

льные полюсы расположены в левой полуплоскости. В последнем примере было показано, что система находится на границе устойчивости при $K = 8/5$. При этом коэффициенте дополнительное уравнение, полученное из таблицы Рауса (см. раздел 6.1), имеет вид:

$$(3s^2 + 1 + 5K)|_{K=8/5} = 3s^2 + 9 = 3(s + 3)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения $s = \pm j\sqrt{3}$. Следовательно, частотная функция разомкнутой системы при данной частоте дает результат:

$$G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{5}{(1 + j\sqrt{3})^3} = \frac{5}{(2e^{j60^\circ})^3} = -\frac{5}{8}.$$

Диаграмма Найквиста пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-5/8$. Следовательно, увеличение коэффициента усиления системы в $8/5$ раз приведет к тому, что диаграмма Найквиста пройдет через точку -1 , и система будет находиться на границе устойчивости. Число, показывающее, во сколько раз должен быть увеличен коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы из устойчивой перевести ее на границу устойчивости, называется *запасом устойчивости по модулю*. Запас по модулю является показателем, используемым для оценки относительной устойчивости системы. Очень важное понятие относительной устойчивости будет рассмотрено в этой главе несколько позже.

8.5. Применение критерия Найквиста

Критерий Найквиста, рассмотренный в предыдущем разделе, является очень важным инструментом анализа, поскольку он позволяет определять устойчивость *замкнутой системы* по ее частотным характеристикам *в разомкнутом состоянии*. Если разомкнутая система устойчива, то ее частотные характеристики могут быть получены экспериментально, а затем по этим данным с помощью критерия Найквиста определяется устойчивость замкнутой системы. Кроме того, диаграмма Найквиста позволяет получить ценную информацию относительно типа коррекции, необходимой для обеспечения устойчивости конкретной системы управления.

Прежде чем рассматривать другие виды диаграммы Найквиста, подведем некоторые предварительные итоги. Сначала еще раз рассмотрим контур Найквиста на s -плоскости и типичную диаграмму Найквиста, изображенные на рис. 8.36. Контур Найквиста на рисунке разбит на четыре участка:

- I. Эта часть контура Найквиста соответствует точке $s = 0$, т.е. началу координат на s -плоскости. Передаточная функция разомкнутой системы, вычисленная в этой точке, дает коэффициент усиления, который может быть измерен экспериментально. Как бы вы осуществили это измерение, работая с реальной физической системой?
- II. Этот участок контура Найквиста представляет собой положительное направление мнимой оси, и передаточная функция разомкнутой системы, вычисляемая вдоль этой оси, дает частотную функцию $G(j\omega)H(j\omega)$. Как бы вы экспериментально получили функцию $G(j\omega)H(j\omega)$?
- III. Этот участок контура Найквиста представляет собой дугу бесконечного радиуса, что соответствует значению $s = \infty$. Так как реальная система обычно является фильтром низких частот, то передаточная функция разомкнутой системы, вычисляемая вдоль этой дуги, обращается в нуль. Следовательно, эта дуга отображается на плоскости $G(s)H(s)$ в начало координат.

IV. Этот участок контура Найквиста представляет собой отрицательное направление мнимой оси. Передаточная функция разомкнутой системы, вычисленная вдоль этой оси, дает значения, комплексно-сопряженные значениям, соответствующим участку II диаграммы Найквиста. Поэтому участок IV диаграммы Найквиста часто исключают из рассмотрения, поскольку его форма очевидна из участка II.

Данные рассуждения говорят нам о том, что диаграмму Найквиста можно построить либо аналитически по известной передаточной функции разомкнутой системы, либо по экспериментально полученным частотным характеристикам системы. В общем случае, за исключением, быть может, простейших передаточных функций, построение диаграммы Найквиста аналитическим путем связано с использованием компьютерной программы, вычисляющей значения $G(j\omega)H(j\omega)$ для $0 \leq \omega < \infty$.

Как уже отмечалось выше, диаграмма Найквиста строится путем отображения контура Найквиста на комплексную плоскость с помощью функции $G(s)H(s)$. Типичная диаграмма Найквиста изображена на рис. 8.36. Для этой диаграммы

$$Z = N + P, \tag{8-38}$$

где

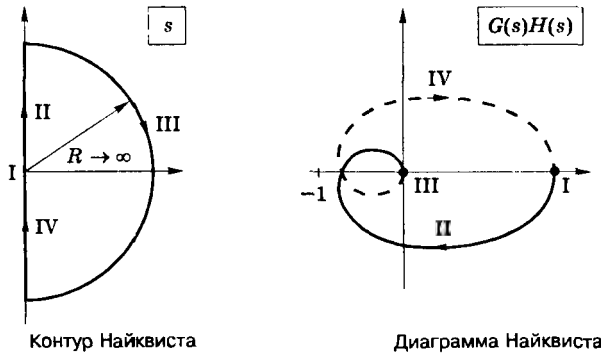
Z — число корней характеристического уравнения системы, расположенных в правой полуплоскости или, что то же самое, число полюсов передаточной функции замкнутой системы в правой полуплоскости;

N — число охватов по часовой стрелке диаграммой Найквиста точки -1 . Если охваты совершаются против часовой стрелки, то N берется со знаком минус. Таким образом, N может быть как положительным, так и отрицательным. Если диаграмма Найквиста проходит через точку -1 , то замкнутая система имеет полюсы на мнимой оси;

P — число полюсов передаточной функции разомкнутой системы в правой полуплоскости. Следовательно, P не может быть отрицательным. Заметим, что если разомкнутая система неустойчива ($P > 0$), то в случае $N = -P$ замкнутая система будет устойчива ($Z = 0$). Примером такой системы является система управления положением разгонной ступени ракеты Сатурн-V (см. задачу 8.24). В данном случае $P = 1$, и для обеспечения устойчивости замкнутой системы требуется введение надлежащей коррекции, обеспечивающей охват диаграммой Найквиста точки -1 в направлении против часовой стрелки.

Теперь рассмотрим несколько простых, но поучительных примеров. Во всех этих примерах для удобства будем полагать $H(s) = 1$, т.е. считать, что разомкнутая система имеет передаточную функцию $G(s)$.

Рис. 8.36
Диаграмма Найквиста



Пример 8.11

Рассмотрим систему, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2}.$$

Коэффициент усиления системы $G(0) = 5$, и участок I контура Найквиста на рис. 8.36 отображается в эту точку. Для участка II контура Найквиста

$$G(j\omega) = \frac{5}{(1+j\omega)(1-j\omega)}.$$

При изменении ω от 0 до ∞ модуль каждого сомножителя в знаменателе возрастает от 1 до ∞ . Следовательно, $|G(j\omega)|$ уменьшается от 5 до 0. В том же интервале ω аргумент каждого сомножителя в знаменателе изменяется от 0° до 90° . Следовательно, $\arg G(j\omega)$ уменьшается от 0° до -180° . Тогда диаграмма Найквиста приобретает вид, изображенный на рис. 8.37.

Заметим, что аргумент $G(j\omega)$ не может быть меньше, чем -180° , следовательно, диаграмма Найквиста на рис. 8.37 не может пересечь отрицательное направление действительной оси. Если в передаточную функцию добавить множитель K , то характеристическое уравнение системы примет вид:

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{5K}{(1+s)^2} = 0,$$

и никаким значением K , $K > 0$, нельзя добиться, чтобы диаграмма Найквиста охватила точку -1 . По критерию Найквиста

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0,$$

где $N = 0$, т.к. диаграмма Найквиста не охватывает точку -1 ; $P = 0$, т.к. $G(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости (оба полюса находятся в точке $s = -1$). Следовательно, система устойчива при всех положительных значениях K и обладает бесконечным запасом устойчивости по модулю.

Полученный результат легко проверить с помощью критерия Рауса-Гурвица. Приведем характеристическое уравнение к виду:

$$1 + KG(s) = s^2 + 2s + 1 + 5K = 0.$$

Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1+5K \\ s^1 & 2 & \\ s^0 & 1+5K & \end{array}.$$

Отсюда видно, что замкнутая система устойчива при всех $K > 0$.

В предыдущем примере мы рассмотрели не реальную физическую систему, а лишь ее модель. Эта модель при увеличении коэффициента усиления K никогда не может стать неустойчивой, чего нельзя сказать про реальную систему. Сказанное мы проиллюстрируем следующим примером, в котором в передаточную функцию будет добавлен еще один полюс.

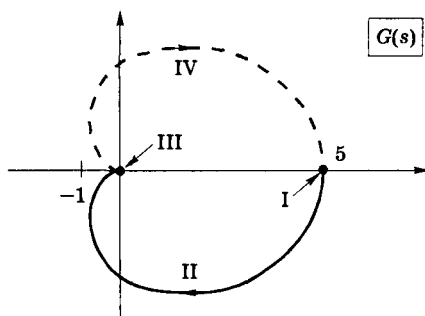


Рис. 8.37. Диаграмма Найквиста к примеру 8.11

Пример 8.12

Теперь рассмотрим систему, которая имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G(s) = \frac{50}{(s + 1)^2(s + 10)}.$$

Обратите внимание, что это выражение получено путем добавления одного полюса в передаточную функцию из примера 8.11. Участку I контура Найквиста соответствует коэффициент усиления $G(0) = 5$. Участку II контура Найквиста соответствует частотная характеристика, определяемая выражением

$$G(j\omega) = \frac{50}{(1 + j\omega)^2(10 + j\omega)}.$$

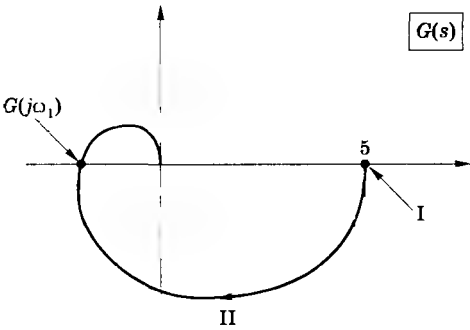


Рис. 8.38. Диаграмма Найквиста для системы третьего порядка

Поскольку каждый сомножитель в знаменателе неограниченно возрастает с ростом частоты, то $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. При тех же условиях аргумент каждого сомножителя в знаменателе увеличивается от 0° до 90° ; следовательно, $\arg G(j\omega)$ изменяется от 0° до -270° при возрастании ω от 0 до ∞ . Общий вид диаграммы Найквиста показан на рис. 8.38. Как правило, комплексно-сопряженную часть диаграммы Найквиста не приводят, чтобы не загромождать рисунок. Эта часть может быть достроена, если у читателя возникает затруднение в подсчете числа охватов диаграммой точки -1 .

Для данной системы возникает проблема с подсчетом охватов точки -1 , поскольку из диаграммы не очевидны значение $|G(j\omega)|$ и частота, соответствующие точке, в которой кривая пересекает отрицательное направление действительной оси. Значение $G(j\omega)$ в этой точке обозначено как $G(j\omega_1)$. Мы можем найти $G(j\omega_1)$, воспользовавшись критерием Рауса-Гурвица. Сначала добавим к $G(s)$ коэффициент K и запишем характеристическое уравнение:

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{50K}{(s + 1)^2(s + 10)} = 0,$$

или

$$s^3 + 12s^2 + 21s + 10 + 50K = 0.$$

Составим таблицу Рауса:

s^3	1	21	
s^2	12	$10 + 50K$	
s^1	$\frac{242 - 50K}{12}$		$\Rightarrow K < 242/50 = 4,84$
s^0	$\frac{12}{10 + 50K}$		$\Rightarrow K > -10/50 = -0,2.$

Следовательно, система устойчива при $-0,2 < K < 4,84$. При $K = 4,84$ диаграмма Найквиста проходит через точку -1 и, следовательно, $4,84G(j\omega_1) = -1$. Отсюда $G(j\omega_1) = -1/4,84 = -0,2066$. Чтобы определить частоту ω_1 , выделим при $K = 4,84$ из таблицы Рауса дополнительное уравнение:

$$(12s^2 + 10 + 50K)_{K=4,84} = 12s^2 + 252 = 12(s^2 + 21) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $s = \pm j\sqrt{21} = \pm j4,583 = \pm j\omega_1$. Чтобы проверить результат, вычислим $G(j\omega)$ при этой частоте:

$$G(j4,583) = \frac{50}{(1 + j4,583)^2(10 + j4,583)} = \frac{50}{(4,691e^{j77,7^\circ})^2(11,0e^{j24,6^\circ})} = -\frac{1}{4,84} = -0,2066,$$

что согласуется с вычислениями, сделанными ранее.

В примере 8.11 система имеет второй порядок и остается устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления. В примере 8.12 в передаточную функцию был добавлен еще один полюс, поэтому при больших коэффициентах усиления система является неустойчивой независимо от положения третьего полюса. (Читатель легко может убедиться в этом с помощью метода корневого годографа.) Приняв систему третьего порядка в качестве уточнения модели реальной физической системы, можно сделать вывод, что модель второго порядка при больших коэффициентах усиления неадекватно отражает свойства реальной системы, хотя при малых коэффициентах усиления она может быть вполне приемлемой (см. также пример 7.8).

Как было показано выше, критерий Рауса-Гурвица можно использовать для определения точки, в которой диаграмма Найквиста пересекает отрицательное направление действительной оси. Обозначим эту точку через $G(j\omega_1)$. Сначала добавим в систему коэффициент усиления K , чтобы характеристическое уравнение приняло вид:

$$1 + KG(s) = 0. \quad (8-39)$$

С помощью критерия Рауса-Гурвица найдем значение K (обозначим его через K_1), при котором система будет находиться на границе устойчивости. Тогда дополнительное уравнение даст нам значение частоты ω_1 , с которой система будет совершать незатухающие колебания, если придать коэффициенту усиления значение K_1 . Следовательно,

$$1 + K_1 G(j\omega_1) = 0, \quad (8-40)$$

откуда определяется точка пересечения диаграммой Найквиста отрицательного направления действительной оси:

$$G(j\omega_1) = -\frac{1}{K_1}. \quad (8-41)$$

Если имеется несколько таких точек пересечения, то критерий Рауса-Гурвица будет давать несколько значений K , при которых из таблицы Рауса вытекают различные дополнительные уравнения. Каждому такому уравнению соответствует своя частота ω . Тогда точки пересечения диаграммой Найквиста отрицательного направления действительной оси будут определяться как

$$G(j\omega_i) = -\frac{1}{K_i}. \quad (8-42)$$

В предыдущем параграфе был изложен метод определения точки пересечения диаграммой Найквиста отрицательного направления действительной оси путем добавления в передаточную функцию разомкнутой системы коэффициента K . Этот коэффициент не оказывает влияния на аргумент $G(j\omega)$, а изменяет только модуль этой функции. Следовательно, коэффициент K при $K > 1$, не изменяя формы диаграммы Найквиста, просто «растягивает» ее, а при $0 < K < 1$ «сжимает» ее.

8.5.1. Полюсы в начале координат

В следующем примере мы рассмотрим систему, которая не удовлетворяет условиям принципа аргумента Коши. Мы покажем, как можно модифицировать контур Найквиста, чтобы удовлетворить этим условиям и дать ответ об устойчивости системы. Напомним, что принцип аргумента Коши имеет силу только тогда, когда передаточная функция разомкнутой системы $G(s)$ не имеет полюсов или нулей на контуре Найквиста. Но нам также известно из

главы 2, что модели многих систем имеют полюсы в начале координат s -плоскости (при $s = 0$), а эта точка находится на контуре Найквиста. Модели некоторых систем могут также иметь полюсы на мнимой оси (что соответствует границе устойчивости для разомкнутой системы), но подобные случаи редко встречаются на практике. Мы прежде всего рассмотрим случай, когда полюсы разомкнутой системы находятся в начале координат, а затем применим результат к ситуации, когда разомкнутая система имеет ненулевые полюсы на мнимой оси.

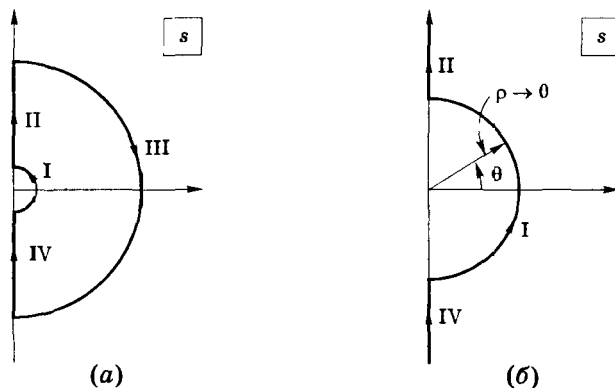
Поскольку принцип аргумента Коши не допускает наличия полюсов в начале координат, мы просто модифицируем контур Найквиста, чтобы обойти начало координат, если там находится полюс функции $G(s)$. Полученный контур показан на рис. 8.39 (а). Этот обход, обозначенный цифрой I, выбран так, чтобы в правой полуплоскости не было никаких полюсов или нулей. В увеличенном масштабе такой обход показан на рис. 8.39 (б); он совершается по дуге бесконечно малого радиуса, так что

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ. \quad (8-43)$$

Так как $G(s)$ имеет полюсы в начале координат, то модуль $G(s)$ будет бесконечно большим, когда s принадлежит дуге, по которой обходится начало координат. Но при этом мы по-прежнему будем изображать диаграмму Найквиста, правда, *не в масштабе*. Покажем это с помощью двух примеров.

Рис. 8.39

Обход полюса
в начале координат



Пример 8.13

Предположим, что некоторый объект имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}.$$

Заметим, что в данном примере мы учли в передаточной функции разомкнутой системы коэффициент K . Для данной функции контур Найквиста должен иметь вид, изображенный на рис. 8.39. Начнем обход контура с точки $s = \rho$, т.е. при $\theta = 0^\circ$, и будем увеличивать угол θ . На участке I контура Найквиста

$$G(s)|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta}(\tau \rho e^{j\theta} + 1)}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho} e^{-j\theta}.$$

Следовательно, участок I контура Найквиста на диаграмме Найквиста отображается в дугу бесконечного радиуса, как показано на рис. 8.40. Эта дуга простирается до отрицательного направления мнимой оси, поскольку полюс $s = -1/\tau$ добавляет в диаграмму Найквиста пренебрежимо малый отрицательный угол. Отметим еще раз, что диаграмма представлена не в масштабе. Для участка II контура Найквиста $s = j\omega$, и соответствующая часть диаграммы Найквиста строится на основе выражения

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\tau)}.$$

Модуль и аргумент этой функции равны:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},$$

$$\arg G(j\omega) = -90^\circ - \arctg\omega\tau$$

при $\rho \leq \omega \leq \infty$, где ρ — очень малая величина. Таким образом, модуль функции $G(j\omega)$ уменьшается от очень большого значения до нуля, а ее аргумент изменяется от значения, чуть меньшего -90° , до -180° . Результирующий участок диаграммы Найквиста обозначен цифрой II на рис. 8.40.

Еще раз отметим, что в данном примере диаграмма Найквиста не может быть построена в масштабе, т.к. для этого потребовалось бы на одном и том же рисунке изображать и дугу бесконечного радиуса и точку -1 . Форма диаграммы Найквиста в области, отмеченной пунктиром, не имеет особого значения, поскольку здесь мы имеем дело с очень большими значениями модуля $G(j\omega)$. Вид диаграммы Найквиста в этой области никак не влияет на число охватов точки -1 . Заметим, что в данном случае

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0,$$

и система является устойчивой при всех $K > 0$. Читатель может проверить этот результат с помощью критерия Рауса-Гурвица.

Пример 8.14

Рассмотрим еще одну систему, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет полюсы в начале координат:

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}.$$

Такую передаточную функцию в некоторых случаях может иметь упрощенная модель самолета, являющегося объектом управления в системе автоматической посадки. Поскольку передаточная функция имеет два полюса в начале координат, то контур Найквиста должен обходить его так, как показано на рис. 8.41 (а). На этом участке, обозначенном цифрой I,

$$G(s)|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho^2 e^{j2\theta}(1 + \rho e^{j\theta})}$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^2 e^{j2\theta}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^2} e^{-j2\theta}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

Таким образом, модуль этой функции очень велик, а ее аргумент изменяется от 0° до значения, немного превышающего -180° , как показано на рис. 8.41 (б). Этот заход диаграммой Найквиста

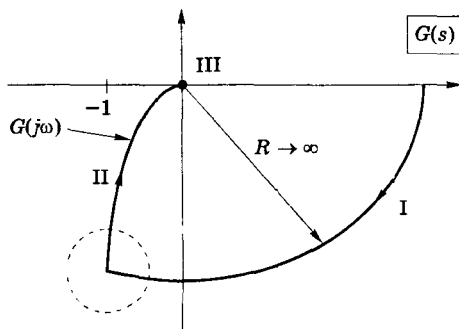


Рис. 8.40. Диаграмма Найквиста к примеру 8.13

ста за угол -180° вызван тем, что полюс в точке $s = -1$ дает очень малый отрицательный вклад в аргумент функции.

Для участка II контура Найквиста $s = j\omega$ и

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega)} = \frac{K}{-\omega^2(1+j\omega)}.$$

Таким образом,

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2}}$$

и

$$\arg G(j\omega) = -180^\circ - \arctg \omega.$$

В соответствии с этими выражениями на рис. 8.41 (б) изображен участок II диаграммы Найквиста. Как и в предыдущем примере, форма диаграммы Найквиста в области, отмеченной пунктиром, особого значения не имеет, поскольку она не влияет на число охватов точки -1 .

Рис. 8.41 (б) показывает, что диаграмма Найквиста дважды по часовой стрелке охватывает точку -1 , т.е. $N = 2$. Так как передаточная функция разомкнутой системы не имеет полюсов внутри контура Найквиста, то $P = 0$ и

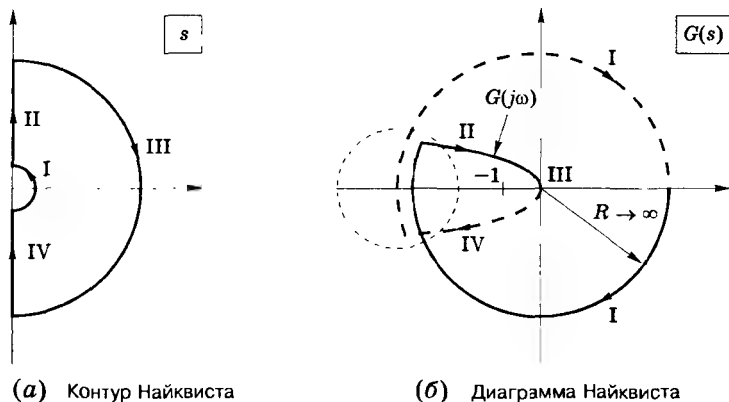
$$Z = N - P = 2 + 0 = 2.$$

Следовательно, передаточная функция замкнутой системы имеет два полюса в правой полуплоскости. Кроме того, число охватов диаграммой Найквиста точки -1 не зависит от значения коэффициента K (при условии $K > 0$). Значит, система неустойчива при всех $K > 0$. Тот же результат можно получить либо с помощью критерия Рауса-Гурвица, либо построив корневой годограф системы. Диаграмма Найквиста для данного примера может быть построена с помощью программы MATLAB:

```
nyquist([0 0 0 1], [1 1 0 0])
```

Полезно выполнить эту программу и сравнить полученный результат с рис. 8.41 (б).

Рис. 8.41
Диаграмма
Найквиста
к примеру 8.14



(а) Контур Найквиста

(б) Диаграмма Найквиста

В двух предыдущих примерах мы сначала рассмотрели случай, когда в начале координат находится один полюс, а затем — когда два полюса. В первом случае участку I контура Найквиста в первом квадранте на диаграмме Найквиста соответствует обход дугой бесконечно большого радиуса угла -90° ; двум полюсам в начале координат соответствует на диаграмме Найквиста аналогичный поворот на -180° . Точно так же можно показать, что трем полюсам в начале координат соответствует поворот на -270° , четырем полюсам — на -360° и т.д. Отметим, что добавление любого отрицательного сдвига по углу в диа-

грамму Найквиста стремится приблизить ее к точке -1 и увеличивает вероятность охвата этой точки. Любой отрицательный сдвиг по фазе неблагоприятно сказывается на устойчивости системы, поэтому каждый дополнительный полюс в начале координат является дестабилизирующим фактором. Наличие двух полюсов в начале координат — это очень редкий случай для реальных физических систем. Обеспечить устойчивость таких систем очень трудно, но не невозможно. Например, в системе автоматической посадки самолетов на авианосцы США в начале координат располагаются три полюса [4].

В таблице 8.4 приводится сравнение корневых годографов и диаграмм Найквиста для некоторых передаточных функций разомкнутых систем. Обратите внимание, как в случаях (с) и (з) сказывается расположение нуля передаточной функции относительно ее полюсов. Эффект, связанный с добавлением нуля в передаточную функцию, проиллюстрирован в случаях (д) и (е).

Таблица 8.4. Сравнение корневых годографов и диаграмм Найквиста

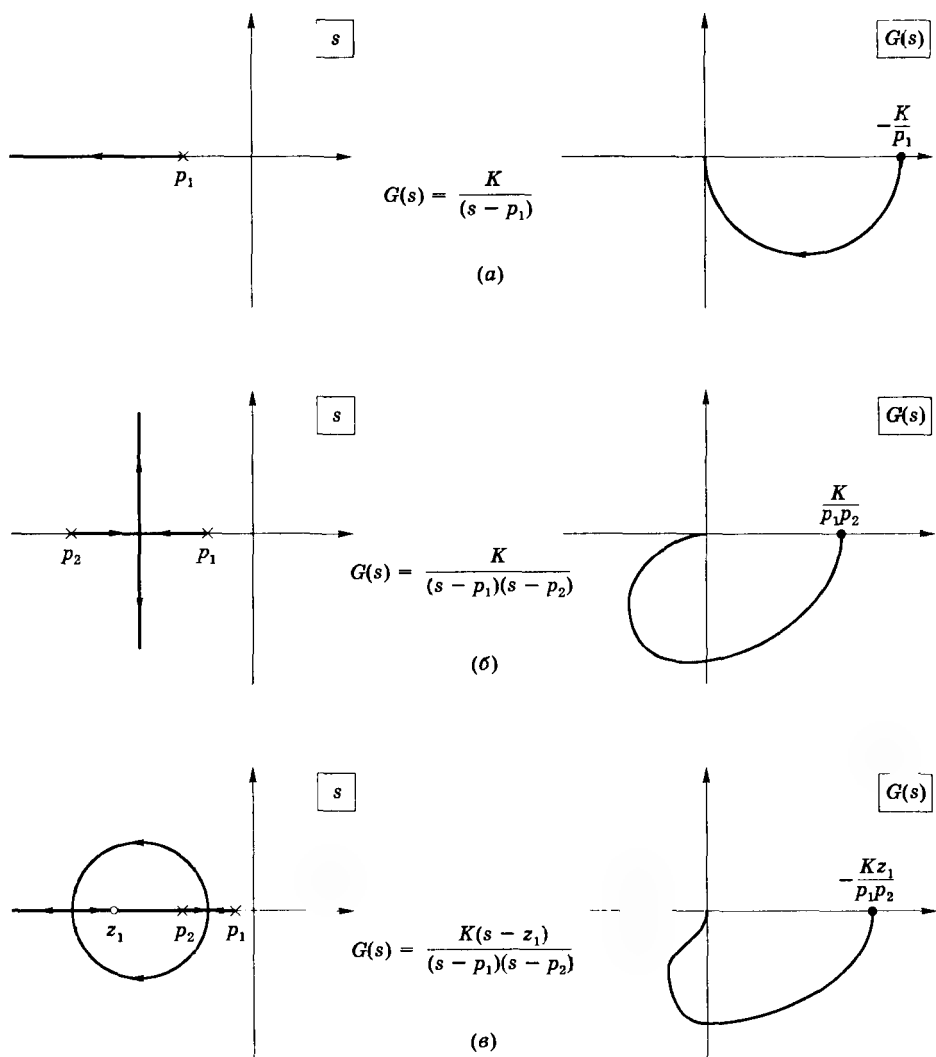
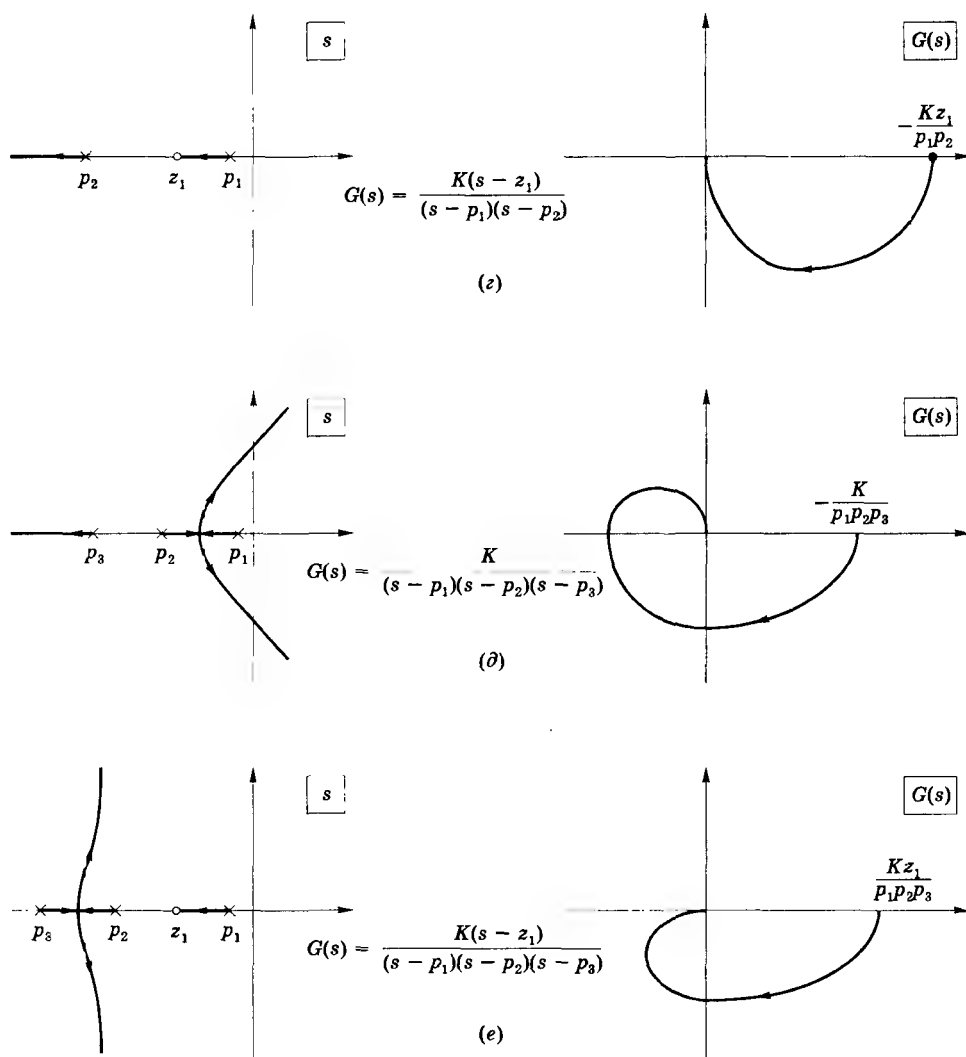


Таблица 8.4 (продолжение)



В этом разделе мы рассмотрим еще один пример. Он необычен тем, что передаточная функция является неминимально-фазовой, а это приводит к своеобразному виду диаграммы Найквиста.

Пример 8.15

Рассмотрим систему, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K}{s(s-1)}.$$

Так как $G(s)$ имеет полюс в начале координат, то контур Найквиста должен его обходить, как показано на рис. 8.42 (a). Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta}(-1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho} e^{j(-180^\circ - \theta)}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

Модуль передаточной функции на участке I контура Найквиста принимает очень большое значение, а ее аргумент изменяется от -180° до -270° . Это показано на рис. 8.42 (б) в виде дуги бесконечного радиуса. Заметим, что обычная дуга бесконечного радиуса, полученная за счет полюса в начале координат, оказалась повернутой на угол -180° благодаря знаку минус при переходе к пределу.

На участке II контура Найквиста частотная характеристика определяется выражением:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega - 1)}.$$

Модуль этой функции с ростом частоты уменьшается до нуля. Аргумент первого члена в знаменателе равен 90° , а аргумент второго члена изменяется от 180° до 90° . Следовательно, аргумент $G(j\omega)$ изменяется от -270° до -180° при уменьшении модуля от очень большого значения до нуля. Полный вид диаграммы Найквиста показан на рис. 8.42 (б). Согласно рисунку, $N = 1$, т.к. диаграмма один раз охватывает точку -1 по часовой стрелке. В данном случае $P = 1$, поскольку разомкнутая система имеет один полюс внутри контура Найквиста, $s = 1$. Таким образом,

$$Z = N + P = 1 + 1 = 2,$$

т.е. характеристическое уравнение системы имеет два корня в правой полуплоскости и система неустойчива. Если записать характеристическое уравнение,

$$1 + G(s) = 0 = s^2 - s + K,$$

то его корни

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2},$$

и совершенно очевидно, что оба они находятся в правой полуплоскости.

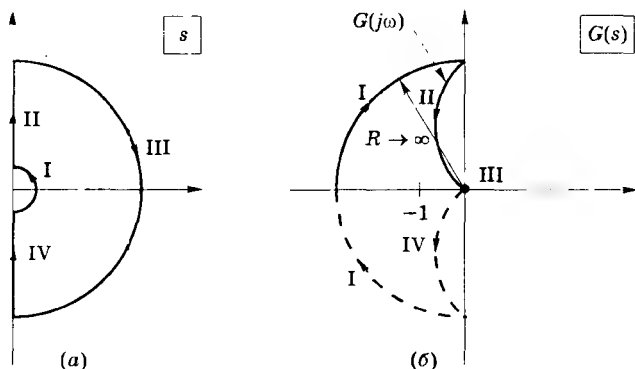
В данном примере можно воспользоваться следующей программой MATLAB:

```
nyquist([1], [1 -1 0])
```

Эту программу полезно выполнить, чтобы выявить проблему масштабирования при построении диаграмм Найквиста с помощью компьютера.

Рис. 8.42

Построение диаграммы Найквиста к примеру 8.15

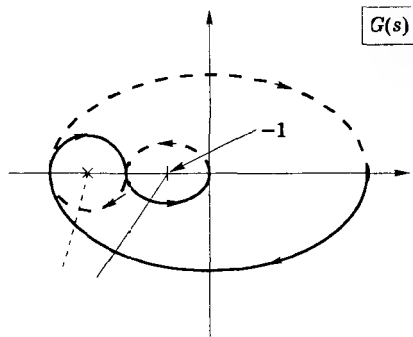


Сделаем в этом разделе одно заключительное замечание. Если диаграмма Найквиста имеет сложную форму, то могут возникнуть трудности при подсчете числа охватов точки -1 . Например, сколько раз диаграмма Найквиста, изображенная на рис. 8.43, охватывает точку -1 ? Один из способов подсчета числа охватов этой точки состоит в следующем. Сначала из точки -1 в произвольном направлении проводится луч. Один такой луч показан на рис. 8.43. Тогда число охватов точки -1 по часовой стрелке равно числу пересечений этого луча диаграммой Найквиста в направлении движения часовой стрелки минус число аналогичных пересечений луча против движения часовой стрелки. На рис. 8.43 мы

имеем по одному пересечению в каждом направлении, следовательно, число охватов точки -1 равно нулю. Если бы точка -1 занимала положение, отмеченное на рисунке крестиком, то диаграмма Найквиста имела бы два пересечения соответствующего луча по часовой стрелке и ни одного — против часовой стрелки. Следовательно, диаграмма Найквиста в этом случае имеет два охвата точки -1 по часовой стрелке.

Рис. 8.43

Подсчет охватов диаграммой Найквиста точки -1



8.6. Относительная устойчивость и диаграмма Боде

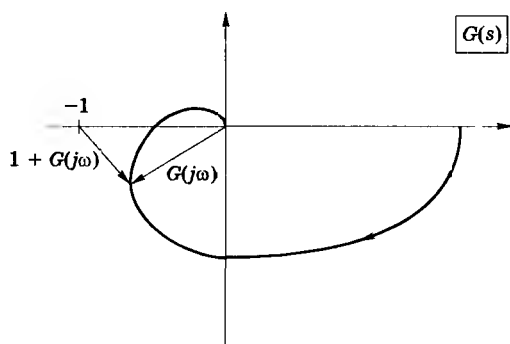
В предыдущем разделе устойчивость или неустойчивость системы определялась с помощью диаграммы Найквиста. Конечно, чтобы система была работоспособна, она должна быть устойчивой. Но просто устойчивости еще может оказаться недостаточно, и этому есть две причины. Во-первых, устойчивая система кроме всех остальных качеств должна иметь приемлемые временные характеристики. Кроме того, модель, используемая при анализе и синтезе системы управления, никогда не является точной. Следовательно, работа с моделью может показать, что система устойчива, тогда как реальная система окажется неустойчивой. Поэтому обычно требуют, чтобы система не просто была устойчивой, но и обладала некоторым запасом устойчивости.

По этим двум причинам мы вводим понятие *относительной устойчивости* системы. В данной книге мы будем характеризовать относительную устойчивость степенью близости диаграммы Найквиста к точке -1 . Это проиллюстрировано на рис. 8.44 (а). Заметим, что вектор, проведенный из точки -1 к диаграмме Найквиста, соответствует выражению $1 - G(j\omega)$, где $G(s)$ есть передаточная функция разомкнутой системы. Минимальное значение модуля этого вектора является хорошим показателем относительной устойчивости замкнутой системы; однако, как мы увидим ниже, на практике этот показатель используется достаточно редко. Вместо этого обычно используются два показателя, приведенные на рис. 8.44 (б).

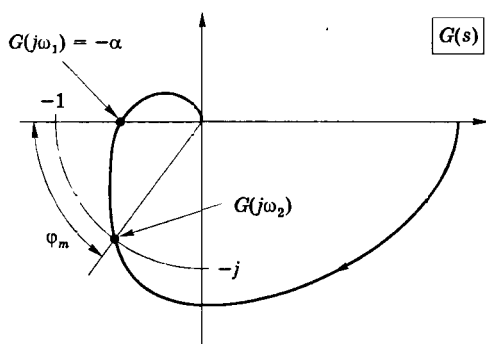
Первый из этих показателей — это *запас устойчивости по модулю*, введенный несколько ранее в данной главе. Запас по модулю определяется как число, на которое должен быть умножен коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости. На рис. 8.44 (б) координата точки пересечения диаграммой Найквиста отрицательного направления действительной оси обозначена как $-\alpha$. Если передаточную функцию разомкнутой системы умножить на коэффициент $K = 1/\alpha$, то диаграмма Найквиста пройдет через точку -1 , и замкнутая система окажется на границе устойчивости. Поэтому мы можем дать следующее определение:

Рис. 8.44

Запасы устойчивости



(a)



(б)

Запас по модулю. Если диаграмма Найквиста для разомкнутой системы пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-\alpha$ и при этом замкнутая система устойчива, то запас по модулю равен $1/\alpha$. Если диаграмма Найквиста имеет несколько пересечений отрицательного направления действительной оси, то запас по модулю определяется по той точке, которая дает наименьшее значение $1/\alpha$.

Вторым часто используемым показателем относительной устойчивости является *запас по фазе*:

Запас по фазе. Запас по фазе определяется наименьшей величиной угла, на который надо повернуть диаграмму Найквиста, чтобы она прошла через точку -1 .

На рис. 8.44 (б) запас по фазе обозначен как угол φ_m . Он определяется на той частоте, при которой модуль функции $G(j\omega)$ равен единице. На рис. 8.44 (б) это соответствует $|G(j\omega_2)| = 1$. Тогда запас по фазе

$$\varphi_m = \arg G(j\omega_2) - 180^\circ. \quad (8-44)$$

Теперь определим третий показатель относительной устойчивости. Этот показатель, используемый в современной теории управления, представляет собой знаменатель передаточной функции замкнутой системы, $[1 + G(s)]$, и называется *возвратной разностью**

* В отечественной литературе аналог данного термина отсутствует — Прим. перев.

[5]. Для многомерных систем функция $1 + G(s)$ является матрицей; однако мы будем рассматривать только системы с одним входом и одним выходом. Определение третьего показателя относительной устойчивости таково:

Минимум возвратной разности. *Минимум возвратной разности* — это наименьшее значение $|1 + G(j\omega)|$, $0 < \omega < \infty$, где $1 + G(s) = 0$ есть характеристическое уравнение системы [5].

Если возвратная разность минимальна на частоте, при которой $G(j\omega)$ имеет вещественное значение, то она непосредственно указывает на запас по модулю. Если же она минимальна на частоте, при которой $|G(j\omega)| = 1$, то это определяет запас устойчивости по фазе. Из рис. 8.44 (а) видно, что минимум возвратной разности — это минимальное расстояние от диаграммы Найквиста до точки -1 . Увеличивая это расстояние, мы повышаем устойчивость системы. При анализе и синтезе систем методами классической теории управления минимум возвратной разности используется редко.

Хотя запасы устойчивости по модулю и фазе можно найти непосредственно из диаграммы Найквиста, их чаще определяют по диаграмме Боде. Рис. 8.44 показывает, что диаграмма Найквиста представляет собой график функции $G(j\omega)$ в полярных координатах. Диаграмма Боде для разомкнутой системы — это график той же самой функции, но в

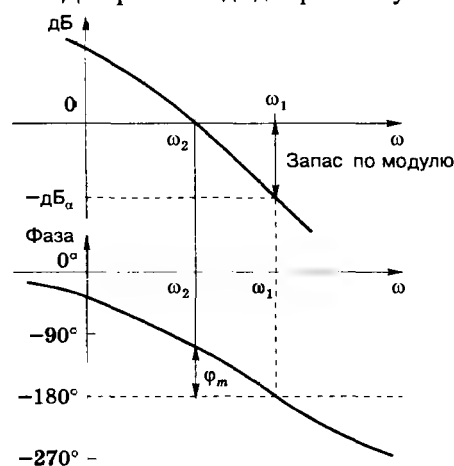


Рис. 8.45. Запасы устойчивости на диаграмме Боде

других координатах. Следовательно, мы можем определить запасы устойчивости по диаграмме Боде. Например, на рис. 8.45 изображена диаграмма Боде для системы, у которой диаграмма Найквиста имеет вид рис. 8.44. Эта диаграмма достаточно очевидна, т.к. $|G(j\omega)|$ на низких частотах больше единицы (положительные децибелы), а на высоких частотах он уменьшается до нуля (отрицательные децибелы для значений $|G(j\omega)| < 1$). По мере того, как амплитудная частотная характеристика (в децибелах) уменьшается от некоторого положительного значения до $-\infty$, фазовый сдвиг изменяется от 0° до -270° .

Обратимся еще раз к рис. 8.44(б), на котором показаны запасы устойчивости. Запас по модулю определяется на частоте, при которой $\arg G(j\omega) = -180^\circ$. Эта частота на диаграмме Боде (рис. 8.45) обозначена как ω_1 . Запас по модулю

является величиной, обратной $|G(j\omega_1)|$. Поскольку

$$\lg\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\lg\alpha,$$

то запас по модулю также можно выразить в децибелах — это значение дБ_α на рис. 8.45. Учитывая популярность диаграмм Боде, запас по модулю обычно принято выражать в децибелах.

Из рис. 8.44 (б) мы видим, что запас по фазе определяется на частоте ω_2 , при которой $|G(j\omega_2)| = 1$ (или 0 дБ). Запас по фазе φ_m есть разность между $\arg G(j\omega_2)$ и -180° , как показано на рис. 8.45. Таким образом, и запас по модулю, и запас по фазе можно определять не-

посредственно по диаграмме Бode для разомкнутой системы.

Для системы, у которой фазовая частотная характеристика имеет несколько пересечений уровня -180° , по-видимому, проще всего от диаграммы Бode перейти к диаграмме Найквиста и сначала определить устойчивость замкнутой системы, а затем все частоты, на которых имеют место запасы по модулю. После этого можно вернуться к диаграмме Бode и определить запасы устойчивости.

На практике, при проектировании систем управления кусочно-линейная аппроксимация характеристик диаграммы Бode обычно неприемлема для определения запасов устойчивости. Например, установлено, что запас по модулю в 8 дБ (что соответствует множителю 2,51) обычно является достаточным, тогда как запас в 5 дБ (множитель 1,78) недостаточен. Аналогично, запас по фазе 50° обычно оказывается приемлемым, а запас в 30° недостаточен. Приведенные значения получены эмпирически, опытным путем, и не поддаются строгому математическому обоснованию. Они использованы здесь для того, чтобы показать, что ошибки, возникающие при кусочно-линейной аппроксимации диаграммы Бode, неприемлемы при синтезе систем управления. Эти ошибки могут быть больше, чем указанные выше расхождения в 3 дБ по модулю и в 20° по фазе. Диаграммы Бode, составленные из прямолинейных отрезков, полезны лишь с точки зрения общего представления о свойствах системы. На практике при решении задач анализа и синтеза обычно пользуются данными, рассчитанными с помощью компьютера.

Ниже приводится пример, иллюстрирующий использование диаграммы Бode для определения запасов устойчивости.

Пример 8.16

Рассмотрим систему, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Соответствующая диаграмма Найквиста приведена на рис. 8.46. Читателю предоставляется возможность в порядке упражнения убедиться, что диаграмма имеет именно такой вид. В таблице 8.5 приведены частотные характеристики этой системы, а на рис. 8.47 изображена точная диаграмма Бode. На этом рисунке отмечены запасы устойчивости по модулю и по фазе, а их точные значения могут быть получены по данным табл. 8.5. Мы видим, что пересечение фазовой характеристикой уровня -180° происходит при $\omega = 1$ и что при этом $|G(j\omega)| = -6$ дБ; следовательно, запас по модулю равен 6 дБ. Далее, $|G(j\omega)| = 1$ (т.е. 0 дБ) при $\omega \approx 0,7$, а фазовый сдвиг на этой частоте приблизительно равен -160° . Следовательно, запас по фазе

$$\varphi_m \approx -160^\circ - 180^\circ = -340^\circ = 20^\circ.$$

На рис. 8.47 приведена также кусочно-линейная аппроксимация частотных характеристик, чтобы указать на возникающие при этом ошибки. Аппроксимация говорит о том, что система находится на границе устойчивости, тогда как точная диаграмма Бode свидетельствует о наличии запаса по модулю, равного 6 дБ. Данные в таблице 8.5 могут быть вычислены с помощью следующей программы MATLAB:

```
[mag, phase, w] = bode([1], [1 2 1 0]);
magdb = 20*log10(mag);
```

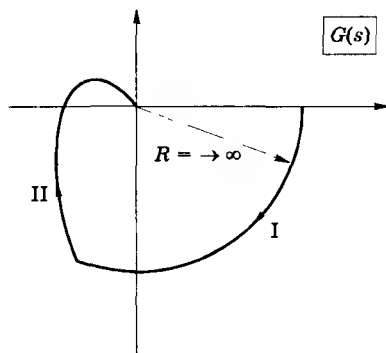


Рис. 8.46. Диаграмма Найквиста

```
[w, mag, magdb, phase], pause
[Gm, Gp, wcg, wcp] = margin(mag, phase, w)
```

Последняя инструкция дает на частоте $\omega = 0,680$ рад/с запас по модулю 2,013 и запас по фазе 21,43°.

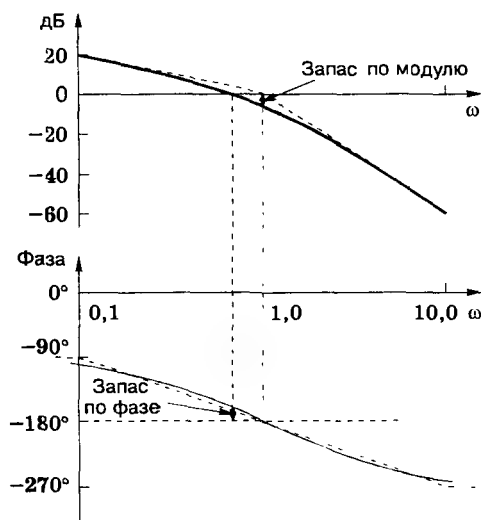
Таблица 8.5 Частотные характеристики к примеру 8.16

ω	$ G(j\omega) $	$ G(j\omega) _{дБ}$	$\arg G(j\omega)$
0,0100	99,98999	39,99913	-91,14587
0,0200	49,98000	33,97593	-92,29153
0,0300	33,30336	30,44976	-93,43671
0,0400	24,96006	27,94491	-94,58122
0,0500	19,95012	25,99891	-95,72482
0,0600	16,60688	24,40576	-96,86726
0,0700	14,21605	23,05558	-98,00835
0,0800	12,42051	21,88279	-99,14785
0,0900	11,02183	20,84508	-100,28550
0,1000	9,90099	19,91357	-101,42120
0,2000	4,80769	13,63873	-112,61990
0,3000	3,05810	9,70904	-123,39850
0,4000	2,15517	6,66964	-133,60280
0,5000	1,60000	4,08240	-143,13010
0,6000	1,22549	1,76620	-151,92750
0,7000	0,95877	-0,36569	-159,98410
0,8000	0,76219	-2,35868	-167,31960
0,9000	0,61387	-4,23842	-173,97440
1,0000	0,50000	-6,02060	-180,0000
2,0000	0,10000	-20,0000	-216,86990
3,0000	0,03333	-29,54243	-233,13010
4,0000	0,01471	-36,65018	-241,92750
5,0000	0,00769	-42,27887	-247,38010
6,0000	0,00450	-46,92706	-251,07530
7,0000	0,00286	-50,88136	-253,73980
8,0000	0,00192	-54,32007	-255,75000
9,0000	0,00136	-57,36113	-257,31960
10,0000	0,00099	-60,08643	-258,57880

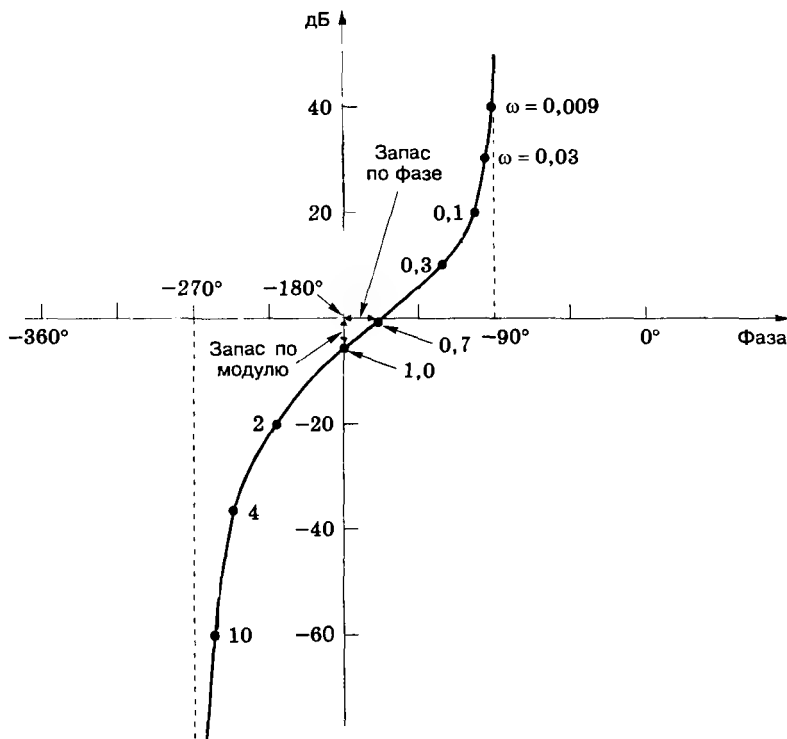
Выше были приведены два метода изображения частотных характеристик разомкнутой системы. Довольно часто используется третий метод, когда изображается зависимость модуля частотной функции $G(j\omega)$ в децибелах от фазового сдвига, причем частота на диаграмме является параметром. Подобное представление содержит ту же самую ин-

Рис. 8.47

Диаграмма Бode к примеру 8.16

**Рис. 8.48**

Амплитудно-фазовая диаграмма



формацию, что и диаграмма Бode. В качестве иллюстрации на рис. 8.48 приведены частотные характеристики системы из примера 8.16. На этом рисунке отмечены также запасы устойчивости по модулю и по фазе. Построения можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
nichols([1], [1 2 1 0])
```

Пояснение термина `nichols` будет дано в разделе 8.7.

8.6.1. Системы второго порядка

В завершение данного раздела остановимся еще на одном моменте. Типовая передаточная функция системы второго порядка имеет вид

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8-45)$$

Такую передаточную функцию имеет замкнутая система, изображенная на рис. 8.49, где

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}. \quad (8-46)$$

Большинство систем управления положением, в которых используется сервопривод, имеют именно такую передаточную функцию (см. раздел 2.7). Для такой системы мы установим связь между запасом устойчивости по фазе и коэффициентом затухания ζ .

Для разомкнутой системы, осуществив для удобства замену переменной $\omega/\omega_n = \omega_v$, можно записать:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = \frac{1}{-\omega_v^2 + j2\zeta\omega_v}. \quad (8-47)$$

Запас по фазе определяется на частоте, при которой $|G(j\omega_v)|^2 = 1$, или

$$\frac{1}{\omega_v^4 + 4\zeta^2\omega_v^2} = 1.$$

Это выражение можно привести к виду:

$$\omega_v^4 + 4\zeta^2\omega_v^2 - 1 = 0.$$

Корни данного уравнения:

$$\omega_v^2 = -2\zeta^2 \pm \sqrt{4\zeta^4 + 1}.$$

Поскольку корень, определяющий запас по фазе, должен быть вещественным, то

$$\omega_v = [\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2]^{1/2}. \quad (8-48)$$

На основании (8-47) запас по фазе определяется как

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg G(j\omega_v) = 180^\circ - 90^\circ - \arctg(\omega_v/2\zeta) = 90^\circ - \arctg(\omega_v/2\zeta) = \arctg(2\zeta/\omega_v).$$

Подставляя в последнее выражение ω_v из (8-48), получим:

$$\varphi_m = \arctg \left[\frac{2\zeta}{(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2)^{1/2}} \right]. \quad (8-49)$$

Выражение (8-49) связывает коэффициент затухания типовой системы второго порядка с запасом устойчивости по фазе. Эта связь графически представлена на рис. 8.50. Там же изображены и другие характеристики типовой системы второго порядка, полученные в главе 4 (см. рис. 4.16). На рис. 8.50 M_{p1} — максимальное значение переходной функции, $M_{p\omega}$ — максимальное значение амплитудно-частотной характеристики, а ω_r — резонанс

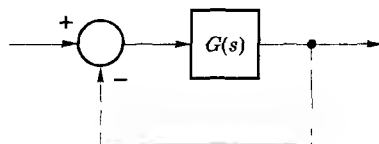
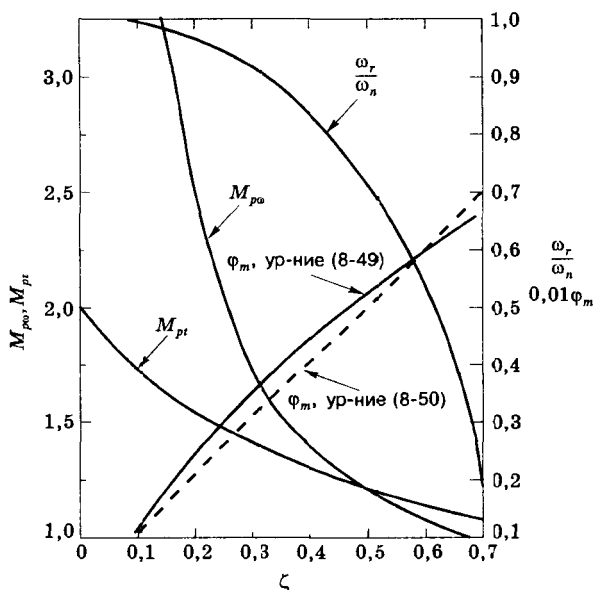


Рис. 8.49. Система для определения запаса по фазе

Рис. 8.50

Характеристики системы
второго порядка



нансная частота (все эти данные относятся к замкнутой системе вида рис. 8.49). Заметим, что за исключением ω_n , которая зависит также от собственной частоты колебаний недемпфированной системы, все остальные характеристики полностью определяются коэффициентом затухания ζ . Из рис. 8.50 становится ясно, почему инженеров по управлению интересует связь между коэффициентом затухания и комплексными полюсами передаточной функции замкнутой системы. Если реальная система точно смоделирована передаточной функцией второго порядка (8-46), то ее свойства напрямую определяются из рис. 8.50. Если модель имеет более высокий порядок, но передаточная функция замкнутой системы обладает доминирующими полюсами, то с помощью рис. 8.50 можно дать некоторую оценку тех характеристик системы, которые зависят от этих полюсов.

Иногда для выражения (8-49) используется линейная аппроксимация:

$$\varphi_m = 100\zeta. \quad (8-50)$$

Это выражение намного проще, чем (8-49), и для многих практических приложений обладает приемлемой точностью. На рис. 8.50 построен также график зависимости (8-50). Ниже рассматривается пример, иллюстрирующий применение рис. 8.50.

Пример 8.17

Рассмотрим еще раз систему из примера 8.16, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

В примере 8.16 было найдено, что запас по фазе приблизительно равен 20° . Если бы система была *типовой системой второго порядка*, то из рис. 8.50 мы определили бы, что значение ζ приблизительно равно 0,17, а максимальное значение переходной функции — около 1,6. При моделировании системы третьего порядка было получено максимальное значение переходной функции 1,55. Таким образом, мы видим, что рис. 8.50 точно предсказывает одну из характеристик системы, несмотря на то, что она имеет третий порядок. К данной системе мы еще вернемся далее в этом разделе.

Пример 8.18

Обратимся к неминимально-фазовой системе из примера 7.4, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{K}{s^3 + 4s^2 + s - 6}.$$

Корневой годограф этой системы был построен в примере 7.4 и еще раз воспроизводится на рис. 8.51 (а). Система устойчива при $6 < K < 10$. Система, которая может стать неустойчивой не только при увеличении коэффициента усиления, но и при его уменьшении, называется *условно устойчивой*. Покажем, что и диаграмма Найквиста, и корневой годограф несут одну и ту же информацию об устойчивости системы, но только в разной форме.

Рис. 8.51

Корневой годограф
и диаграмма Найквиста
к примеру 8.18

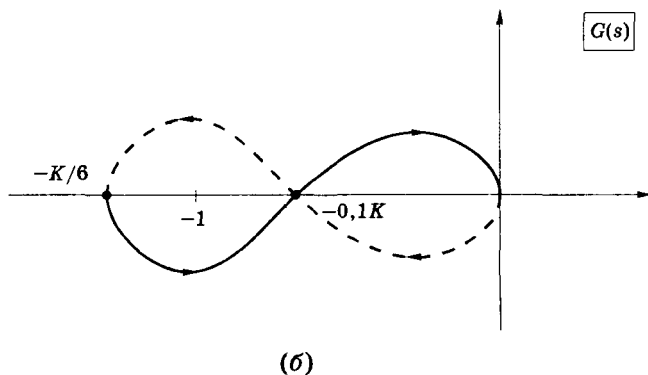
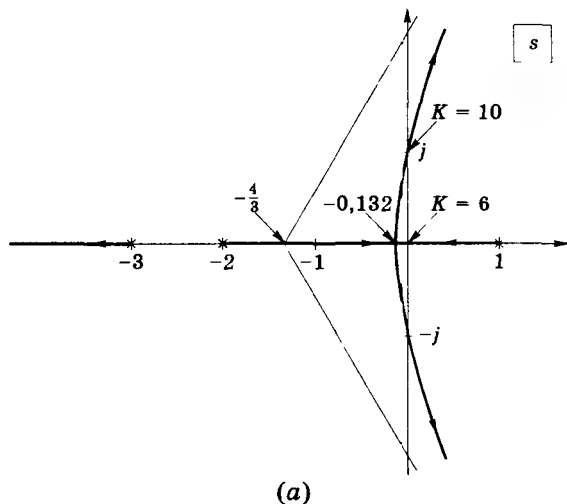


Диаграмма Найквиста для данной системы вычислена с помощью программы MATLAB
`nyquist([8], [1 4 1 -6])`

и изображена (не в масштабе) на рис. 8.51 (б). При $K = 8$ точка -1 расположена так, как показано на рисунке, и согласно критерию Найквиста, система устойчива, т.к.

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0.$$

Точка -1 охватывается против часовой стрелки ($N = 1$), а передаточная функция разомкнутой системы имеет один полюс в правой полуплоскости ($P = 1$), в точке $s = 1$.

При $K = 8$ запас по модулю в случае увеличения коэффициента усиления составляет $20 \lg(1/0,8) = 1,94$ дБ, а в случае уменьшения коэффициента усиления $20 \lg 1,33 = 2,48$ дБ. С практической точки зрения эти запасы устойчивости слишком малы. Запас по фазе, вычисленный на компьютере, составляет $2,6^\circ$, что также является слишком малым. Моделирование данной системы показывает, что переходная функция имеет перерегулирование 75%.

При $K < 6$ точка -1 оказывается вне диаграммы Найквиста и не охватывается ею; следовательно, $N = 0$ и

$$Z = N + P = 0 + 1.$$

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы имеет один полюс в правой полуплоскости. Это видно и из корневого годографа.

При $K > 10$ $N = 1$ и

$$Z = N + P = 1 + 1 = 2.$$

Передаточная функция замкнутой системы имеет два полюса в правой полуплоскости, об этом же говорит и корневой годограф.

Пример 8.19

Рассмотрим систему управления курсом корабля, которая ранее была исследована в примерах 7.6, 7.7 и 7.8. В этих примерах было показано, как на основании корневого годографа можно понизить порядок модели. В настоящем примере мы покажем, как то же самое можно сделать на основании диаграммы Боде, а именно — как модель третьего порядка свести к модели второго порядка. Модель третьего порядка показана на рис. 8.52, она имеет передаточную функцию

$$G_3(s) = \frac{0,05K_a}{s \left(1 + \frac{s}{0,1}\right) \left(1 + \frac{s}{2}\right)},$$

где K_a — коэффициент усиления усилителя мощности. При $K_a = 20$ диаграмма Боде, соответствующая этой передаточной функции, изображена на рис. 8.53. На том же рисунке приведена диаграмма Боде, если пренебречь полюсом $s = -2$; в этом случае передаточная функция принимает вид:

$$G_2(s) = \frac{0,05K_a}{s \left(1 + \frac{s}{0,1}\right)}.$$

Данная диаграмма изображена пунктирными линиями. Заметим, что при кусочно-линейной аппроксимации кривых разница между двумя диаграммами появляется только на высоких частотах, а запасы по фазе для двух передаточных функций определяются на одной и той же частоте. Вычисления на компьютере показывают, что запас по фазе для $G_2(s)$ равен 19° , а для $G_3(s)$ 9° . Различие в 10° является существенным (см. рис. 8.50); следовательно, полюсом $s = -2$ пренебрегать нельзя.

Теперь рассмотрим случай, когда $K_a = 1$. Уменьшение значения K_a эквивалентно сдвигу уровня 0 дБ вверх на величину $20 \lg 20 = 26$ дБ, как показано на рис. 8.53. Заметим, что при этом запасы по фазе для двух передаточных функций одинаковы и равны приблизительно 66° . Следовательно, при $K_a = 1$ полюс $s = -2$ практически не влияет на свойства систем, поскольку их коэффициент усиления на частотах, больших чем $\omega = 2$, является очень малым; любыми изменениями частотных характеристик при $\omega > 2$ можно пренебречь. Таким образом, при $K_a = 1$

Рис. 8.52

Система управления курсом корабля

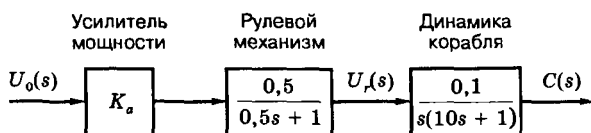
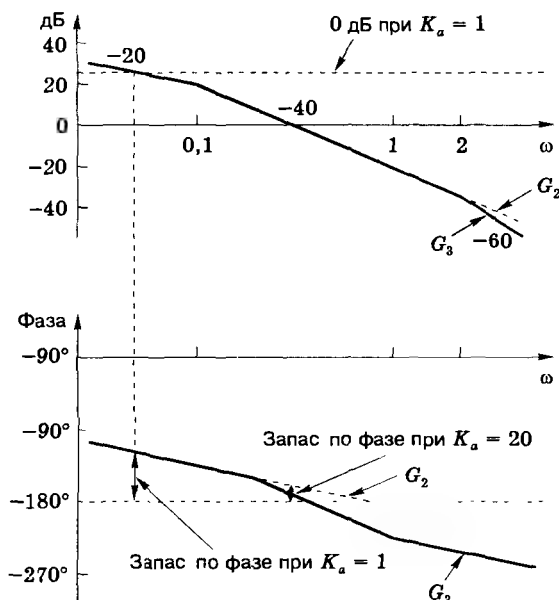


Рис. 8.53

Диаграммы Бode
к примеру 8.19



можно пренебречь полюсом $s = -2$. То же самое было проиллюстрировано в примере 7.7 с помощью корневого годографа.

Диаграммы Бode на рис. 8.53 могут быть точно построены с помощью следующей программы MATLAB:

```
bode([0.2], [1 2.1 0.22 0]), hold on
bode([0.1], [1 0.1 0]), hold off
```

Как было отмечено в разделе 7.3, при понижении порядка модели сомножитель первого порядка в передаточной функции должен быть представлен в виде $(\tau s + 1)$, а сомножитель второго порядка в виде

$$\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1.$$

Исключение сомножителей такого вида не изменяет характеристики системы в области низких частот.

Пример 8.20

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.54. Эта система содержит тот же самый объект, что и в примере 8.16, но в нее добавлено идеальное запаздывание по времени (см. раздел 8.3). Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$1 + G(s)e^{-t_0 s} = 1 + \frac{e^{-t_0 s}}{s(s+1)^2} = 0,$$

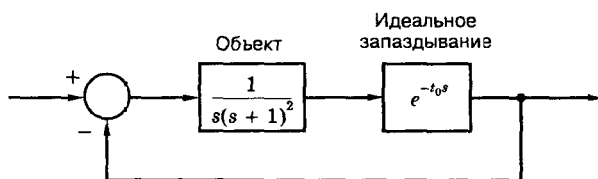
или

$$s^3 + 2s^2 + s + e^{-t_0 s} = 0.$$

Нам нужно определить, имеются ли какие-либо корни этого уравнения, расположенные в правой полуплоскости. Поскольку характеристическое уравнение не является алгебраическим полиномом, то критерий Рауса-Гурвица здесь не применим. Однако для разомкнутой системы с

Рис. 8.54

Система к примеру 8.20



передаточной функцией $G(s)e^{-t_0 s}$ можно построить диаграмму Найквиста. Разомкнутая система имеет частотную функцию $G(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ и, следовательно,

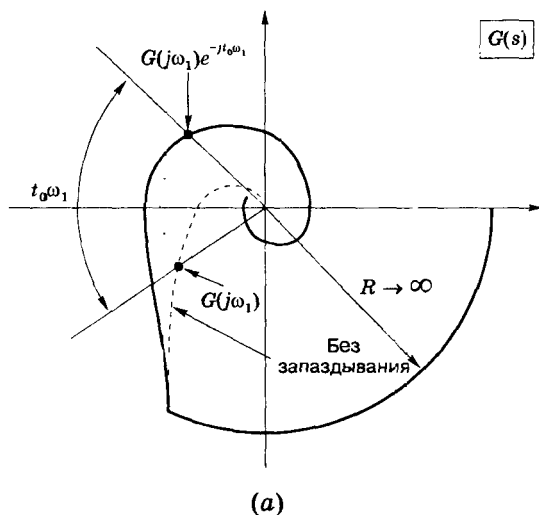
$$|G(j\omega)e^{-j\omega t_0}| = |G(j\omega)| \text{ и } \arg G(j\omega)e^{-j\omega t_0} = \arg G(j\omega) - t_0 \omega.$$

Частотные характеристики для $G(j\omega)$ приведены в таблице 8.5, а соответствующая диаграмма Найквиста изображена на рис. 8.46. Поэтому частотные характеристики для системы из нашего примера будут отличаться от приведенных в таблице 8.5 лишь тем, что к $\arg G(j\omega)$ должен быть добавлен угол $-t_0 \omega$. Этот угол измеряется в радианах и увеличивается с ростом частоты. Результирующая диаграмма Найквиста изображена на рис. 8.55 вместе с диаграммой для $G(s)$, которая показана пунктирной линией. Мы видим, что единственный эффект идеального запаздывания состоит в том, что оно добавляет в систему отставание по фазе. Разумеется, это ухудшает устойчивость системы, поскольку диаграмма Найквиста поворачивается в сторону точки -1 .

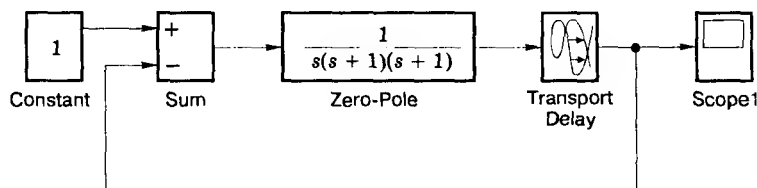
В данном примере нам необходимо определить максимально допустимую величину запаздывания t_0 , при которой замкнутая система еще остается устойчивой. Для этого достаточно найти максимальный угол, на который можно повернуть диаграмму Найквиста, чтобы при этом она не охватила точку -1 . Этот угол, очевидно, соответствует запасу устойчивости по фазе. Из таблицы 8.5 мы находим, что при частоте $\omega = 0,680$ рад/с запас по фазе равен $21,43^\circ$. Следовательно,

Рис. 8.55

(а) Диаграмма Найквиста
и
(б) моделирование в SIMULINK
к примеру 8.20



(а)



(б)

$$\omega t_0|_{\omega=0,680} = 0,680 t_0 \approx \frac{21,43}{57,3} = 0,374.$$

Значит, система будет устойчива при $t_0 \leq 0,374/0,680 = 0,550$ с. Результат этого примера можно проверить с помощью следующей программы MATLAB:

```
t0 = [0.75 0.550 0];
w = 0.3 : 0.1 : 4;
for k = 1:3
    [re, im, w] = nyquist([1], [1 2 1 0], w);
    re, im
    D1 = exp(-j*t0(k)*w);
    Gw = (re + j*im).*D1;
    Greal = real(Gw); Gimag = imag(Gw);
    plot(Greal, Gimag)
    title('Nyquist Diagram'); xlabel('ReG(jw)');
    ylabel('ImG(jw)'); grid; hold on
end
hold off
```

Данная программа осуществляет построение диаграммы Найквиста для трех различных значений t_0 . На рис. 8.55 (б) приведена схема моделирования системы в программе SIMULINK. Идеальное запаздывание обозначено как транспортная задержка. Моделирование приводит к возникновению установившихся колебаний с частотой $\omega = 0,68$ рад/с при $t_0 = 0,550$ с.

Вообще говоря, появление запаздывания в устойчивой замкнутой системе оказывает дестабилизирующее влияние, т.к. диаграмма Найквиста поворачивается в сторону точки -1 , уменьшая тем самым запас по фазе.

Примером негативного влияния запаздывания может служить управление автомобилем (комплекс водитель-автомобиль по сути представляет собой систему с обратной связью). С возрастом реакция человека становится медленнее, а это эквивалентно увеличению запаздывания. Поэтому, чем старше водитель, тем больше возникает проблем, связанных с устойчивостью системы управления автомобилем. Именно по этой причине опытным водителям рекомендуется снижать скорость движения.

В заключение мы получим связь между запасом по фазе φ_m и временем установления T_s для типовой системы второго порядка (см. раздел 4.3). Ранее, вслед за выражением (8-48), было получено:

$$\varphi_m = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\omega_v}\right) = \arctg\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_1}\right), \quad (8-51)$$

где ω_1 — частота, на которой определяется запас по фазе; иначе говоря, на частоте ω_1 $\arg G(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m$. На основании выражения (4-27), время установления $T_s = 4/\zeta\omega_n$. Следовательно, (8-51) приводится к виду

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_1} = \frac{8}{\omega_1 T_s}. \quad (8-52)$$

Это выражение связывает запас по фазе φ_m , частоту ω_1 , на которой он определяется, и время установления T_s для типовой системы второго порядка. При заданном запасе по фазе, чем больше частота ω_1 , тем меньше время установления T_s . Это соотношение окажется очень полезным в главе 9, где будут рассмотрены процедуры синтеза систем управления.

8.7. Частотные характеристики замкнутых систем

В предыдущих разделах мы имели дело с частотными характеристиками *разомкнутой системы*. По этим характеристикам мы можем определить устойчивость и запасы устойчивости *замкнутой системы*. Было замечено, что запасы устойчивости в некоторой степени позволяют судить о временных характеристиках замкнутой системы. Точный же вид временных характеристик замкнутой системы полностью определяется ее частотными характеристиками. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим способ получения этих характеристик.

Сначала мы рассмотрим графический способ перехода от частотных характеристик разомкнутой системы к соответствующим характеристикам замкнутой системы, причем ограничимся случаем единичной обратной связи (рис. 8.56 (а)). Передаточная функция такой системы в замкнутом состоянии

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)},$$

а ее частотная функция

$$T(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}. \quad (8-53)$$

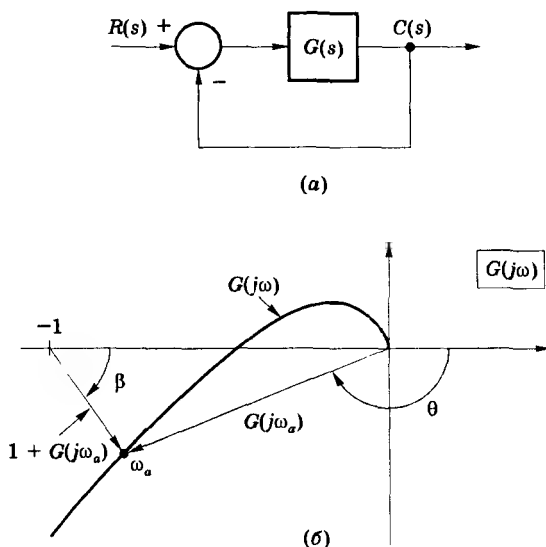
Предположим, что функция $G(j\omega)$ представлена в полярных координатах на рис. 8.56 (б). Заметим, что это лишь часть полной диаграммы Найквиста. При частоте ω_a числитель функции $T(j\omega)$ представлен на рисунке вектором $G(j\omega)$, а знаменатель — вектором $1 + G(j\omega)$. Частотная функция есть отношение этих векторов, т.е.

$$T(j\omega) = \frac{|G(j\omega)| e^{j\theta}}{|1 + G(j\omega)| e^{j\beta}} = M e^{j(\theta - \beta)} = M e^{j\varphi}. \quad (8-54)$$

В этом выражении M есть модуль частотной функции замкнутой системы, а φ — ее аргумент (фазовый сдвиг).

Рис. 8.56

К определению частотных характеристик замкнутой системы



Геометрическое место точек на плоскости $G(j\omega)$, соответствующих постоянному значению M , называется *линией постоянного модуля*, или окружностью постоянного M . Покажем, что эти линии действительно являются окружностями. Пусть

$$G(j\omega) = X + jY. \quad (8-55)$$

Тогда, из (8-54),

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2},$$

что можно переписать в виде

$$X^2(M^2 - 1) + 2M^2X + M^2 + (M^2 - 1)Y^2 = 0. \quad (8-56)$$

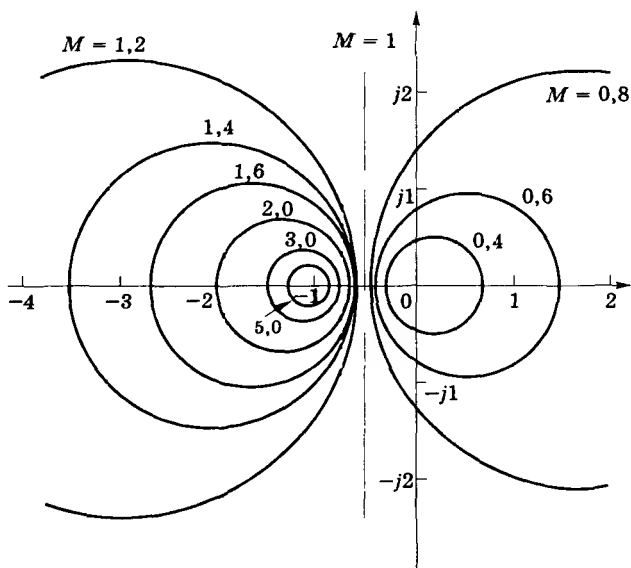
При $M \neq 1$ последнее уравнение можно выразить как

$$\left[X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right]^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}.$$

Это есть уравнение окружности с радиусом $|M/(M^2 - 1)|$ и центром в точке с координатами $X = -M^2/(M^2 - 1)$ и $Y = 0$. При $M = 1$ из (8-56) получим $X = -1/2$, т.е. уравнение прямой линии. На рис. 8.57 изображены окружности постоянных значений M .

Рис. 8.57

Окружности постоянных значений M



Геометрические места точек, соответствующих постоянной фазе, также являются окружностями. Из (8-54) и (8-55) видно, что

$$\varphi = \theta - \beta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) - \arctg\left(\frac{Y}{1 + X}\right). \quad (8-57)$$

Тогда, полагая $N = \tg\varphi$,

$$N = \tg(\theta - \beta) = \frac{\tg\theta - \tg\beta}{1 + \tg\theta \tg\beta}. \quad (8-58)$$

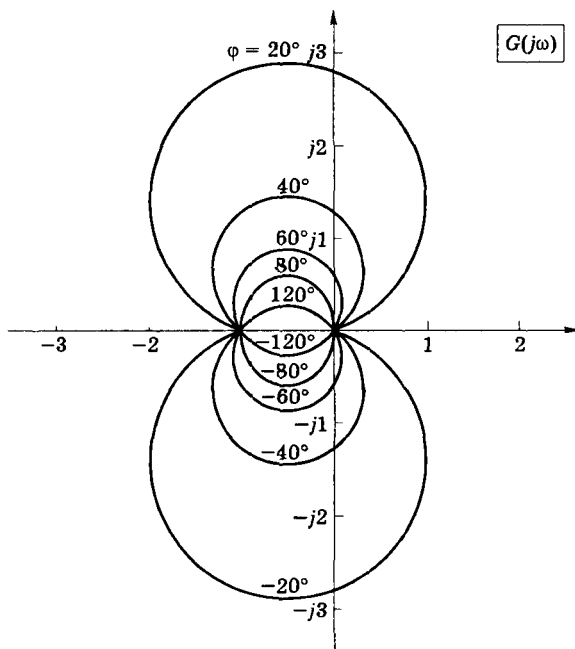
Из выражений (8-57) и (8-58) можно получить (см. задачу 8.23):

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2. \quad (8-59)$$

Это есть уравнение окружности с радиусом $\sqrt{1/4 + (1/2N)^2}$ и центром в точке с координатами $X = -1/2$ и $Y = 1/2N$. На рис. 8.58 изображены окружности постоянной фазы (постоянного N).

Рис. 8.58

Окружности постоянных значений фазы



Обычно линии постоянного модуля и постоянной фазы изображают в иных координатах. Одним из таких представлений является диаграмма Никольса. В разделе 8.6 было показано, что частотные характеристики разомкнутой системы можно изобразить на плоскости с координатами амплитуда-фаза. В этих же координатах можно представить окружности рис. 8.57 и 8.58. Если это сделать, то получится так называемая *диаграмма Никольса* [6]. Эта диаграмма, изображенная на рис. 8.59, содержит ту же информацию, что и окружности постоянных значений M и N .

Окружности постоянных значений M и N или диаграмма Никольса могут быть использованы для графического определения частотных характеристик замкнутой системы по известным частотным характеристикам разомкнутой системы. Однако чаще всего частотная функция $G(j\omega)$ вычисляется с помощью компьютера. Поэтому логично дополнить компьютерную программу несколькими инструкциями, которые одновременно позволяли бы вычислять частотные характеристики замкнутой системы. К тому же, по сравнению с графическими методами, компьютерная процедура является более точной, экономит время и не ограничивается случаем единичной обратной связи.

Ценность графических методов заключается в том, что они позволяют оценить общее влияние частотных характеристик разомкнутой системы на соответствующие характеристики замкнутой системы. Как показано на рис. 8.56 (б), знаменатель частотной функции замкнутой системы, $1 + G(j\omega)$, есть вектор, проведенный из точки -1 к диаграмме

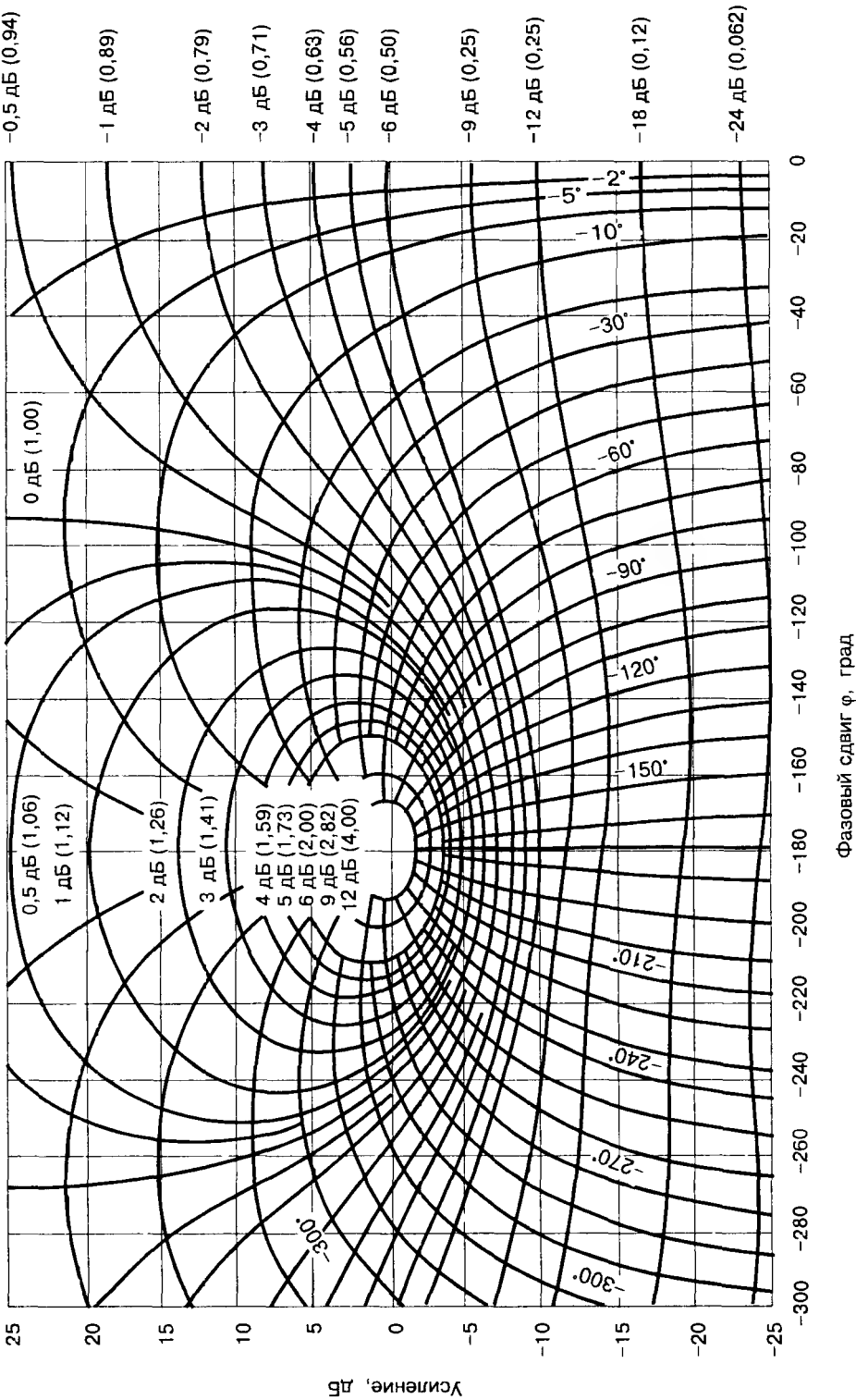


Рис. 8.59. Диаграмма Никольса

Найквиста $G(j\omega)$. Если модуль этого вектора много больше единицы, то его можно считать приблизительно совпадающим с $G(j\omega)$, и тогда частотную функцию замкнутой системы аппроксимировать как

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \approx 1, \quad |G(j\omega)| \gg 1. \quad (8-60)$$

В диапазоне частот, где выполняются эти условия, выход системы приблизительно равен входу.

Если модуль функции $G(j\omega)$ много меньше единицы, то вектор $1 + G(j\omega)$ приблизительно равен единице, и

$$T(j\omega) \approx G(j\omega), \quad |G(j\omega)| \ll 1. \quad (8-61)$$

Таким образом, замкнутая система значительно ослабляет сигналы с частотами, для которых выполняются условия (8-61).

Представляет интерес интервал частот, где $|G(j\omega)|$ близок к единице. Если при этом диаграмма Найквиста проходит близко от точки -1 , то $|1 + G(j\omega)|$ имеет малые значения, и частотная функция замкнутой системы, как следует из (8-53) и рис. 8.56 (б), 8-57 и 8.59, имеет большой модуль. Таким образом, замкнутая система обладает резонансными свойствами.

Из сказанного выше следует, что вся ось частот может быть разбита на три участка:

1. Частоты, при которых $|G(j\omega)| \gg 1$. На этих частотах коэффициент усиления замкнутой системы приблизительно равен единице, и выходной сигнал системы очень хорошо отслеживает входной.
2. Частоты, при которых $|G(j\omega)| \ll 1$. На этих частотах коэффициент усиления замкнутой системы приблизительно равен $|G(j\omega)|$, и система значительно ослабляет колебания соответствующих частот. Следовательно, действительные значения $|G(j\omega)|$ и $\arg G(j\omega)$ не представляют особого интереса.
3. Все остальные частоты, т.е. частоты, при которых $|G(j\omega)|$ близок к единице. Если $|1 + G(j\omega)|$ имеет малые значения (т.е. если диаграмма Найквиста проходит близко от точки -1 , указывая на малые запасы устойчивости), то коэффициент усиления замкнутой системы достаточно велик (см. рис. 8.57 и 8.59) и она обладает резонансными свойствами. Отметим, что замкнутая система вида рис. 8.56 (а) будет обладать резонансом только в случае малых запасов устойчивости. Считается, что запасы по модулю и по фазе являются хорошими индикаторами минимального расстояния от диаграммы Найквиста до точки -1 . Это очевидно также из рис. 8.57: M имеет большие значения только в окрестности точки -1 .

Ниже следует пример, иллюстрирующий эти положения.

Пример 8.21

Рассмотрим систему из примера 8.16, где считалось, что $K = 1$:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}.$$

В примере 8.16 было показано, что при $K = 1$ запас по фазе приблизительно равен 20° . Частотные характеристики разомкнутой системы приведены в таблице 8.5 и на рис. 8.47.

При частоте $\omega = 0,42$ $G(j0,42) \approx 2e^{-j136^\circ}$, т.е. если положить $K = 0,5$, то запас по фазе составит $180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$. Следовательно, при $K = 1$ запас по фазе равен 20° , а при $K = 0,5$ он составляет 44° .

На основании рис. 8.50, для типовой системы второго порядка при запасе по фазе 20° максимальное значение переходной функции приблизительно равно 1,6, а максимум амплитудно-частотной характеристики приблизительно равен 3,0, или 9,5 дБ. В нашем случае переходная функция системы при $K = 1$, полученная путем моделирования, приведена на рис. 8.60, откуда видно, что ее максимальное значение приблизительно равно 1,55. Амплитудно-частотная характеристика системы изображена на рис. 8.61, максимальное ее значение — около 9 дБ.

При $K = 0,5$ запас по фазе равен 44° , и для эквивалентной системы второго порядка максимальное значение переходной функции приблизительно равно 1,25, а максимум амплитудно-частотной характеристики — около 1,35, или 2,6 дБ. Для нашей системы третьего порядка переходная функция при $K = 0,5$ изображена на рис. 8.60, а ее максимальное значение равно 1,24. Максимум амплитудно-частотной характеристики, приведенной на рис. 8.61, составляет примерно 2,5 дБ. Соответствующие характеристики вычисляются с помощью программы MATLAB:

```
G = tf([1], [1 2 1 0]);
T1 = G/(1 + G); T2 = 0.5*G/(1 + 0.5*G);
bode(T1), hold on
bode(T2), hold off, pause
t = 0:0.5:20
step(T1, t), hold on
step(T2, t), hold off
```

Рис. 8.60
Переходные функции
к примеру 8.21

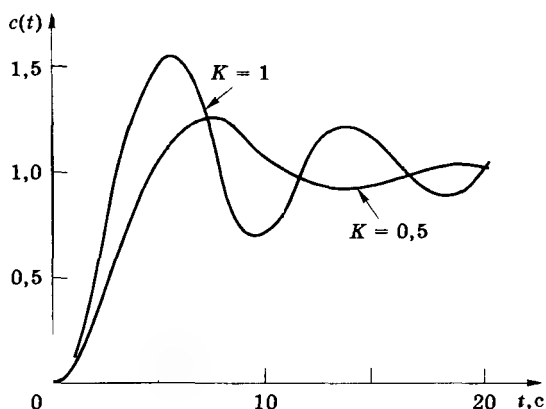
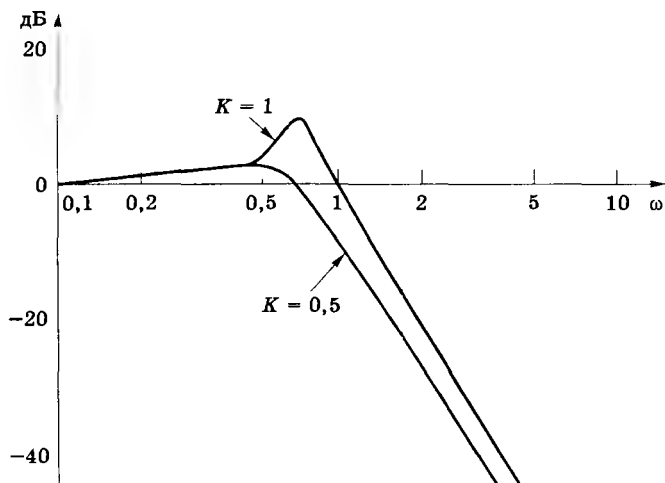


Рис. 8.61
Частотные
характеристики
к примеру 8.21



Последний пример иллюстрирует два момента. Во-первых, малые запасы устойчивости приводят к появлению резонансного пика на амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы и к перерегулированию на переходной функции. При увеличении запасов устойчивости резонансный пик и перерегулирование уменьшаются. Во-вторых, характеристики системы второго порядка, приведенные на рис. 8.50, с достаточной точностью позволяют оценить соответствующие характеристики рассмотренной системы третьего порядка.

8.8. Заключение

Хотя в предыдущих главах частично были рассмотрены частотные характеристики систем, в данной главе представлен их детальный анализ. Боде и Найквистом были разработаны два важных метода анализа частотных характеристик. С помощью кусочно-линейной аппроксимации диаграммы Боде можно составить предварительное суждение о свойствах системы в частотной области. Как будет показано в следующей главе, подобная кусочно-линейная аппроксимация особенно полезна при синтезе систем управления частотными методами.

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по ее частотным характеристикам в разомкнутом состоянии. Подобная зависимость очень важна по двум причинам. Во-первых, она позволяет нам использовать частотные характеристики разомкнутой системы для синтеза системы с обратной связью. И во-вторых, она дает нам возможность решать задачу синтеза систем, основываясь непосредственно на частотных характеристиках, полученных экспериментально.

Частотные характеристики замкнутой системы полностью определяют все ее свойства. На эти свойства очень сильное влияние оказывают полоса пропускания системы и максимум ее амплитудно-частотной характеристики. Последний показатель, называемый также резонансным пиком, может служить оценкой перерегулирования на переходной функции системы. Полоса пропускания является мерой быстродействия системы; например, чтобы в 2 раза уменьшить время нарастания переходной функции, надо приблизительно в 2 раза увеличить полосу пропускания.

Поскольку частотные характеристики дают возможность судить о временных характеристиках системы, их знание крайне необходимо при синтезе. Вообще говоря, частотные методы синтеза предполагают использование диаграммы Боде или некоторых ее модификаций. Тем не менее, все частотные методы синтеза систем базируются на критерии Найквиста. В следующей главе будут рассмотрены частотные методы синтеза замкнутых систем управления.

Литература

1. A.P.Schust, Jr. «Determination of Aircraft Response Characteristics in Approach/Landing Configuration for Microwave Landing System Program», Report FT-61R-73, Naval Air Test Center, Patuxent River, MD, 1973.
2. R.C.Jaeger. *Microelectronic Circuit Design (Introduction to Electronics)*. New York: McGraw-Hill, 1997.

3. C.R.Wylie and L.C.Barrett. *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed. New York: McGraw-Hill, 1995.
4. R.F.Wigginton. «Evaluation of OPS-II Operational Program for the Automatic Carrier Landing System». Naval Electronics Systems Test and Evaluation Facility, Saint Inigoes, MD, 1971.
5. B.Freidland. *Control System Design*. New York: McGraw-Hill, 1986.
6. H.M.James, N.B.Nichols, and R.S.Phillips. *Theory of Servomechanisms*. New York: McGraw-Hill, 1947.

Задачи

- 8.1. Рассмотрите систему третьего порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

Частотные характеристики этой системы, вычисленные с помощью компьютера, представлены в таблице 8.1 (3).

- (а) Убедитесь в справедливости данных для $\omega = 2$ и $\omega = 10$.
- (б) Полоса пропускания системы определяется как частота, при которой $|G(j\omega)| = 0,707G(0)$. Определите полосу пропускания системы.
- (в) Найдите постоянные времени системы.
- (г) На вход системы подана синусоида $r(t) = A \cos \omega t u(t)$. Система входит в установившийся режим при $t > T_s$. Определите T_s .
- (д) С помощью MATLAB постройте диаграмму Боде для системы. При $\omega = 10$ сравните данные диаграммы и таблицы 8.1 (3).

- 8.2. Рассмотрите систему из предыдущей задачи и используйте данные таблицы 8.1 (3).

- (а) На вход системы подан сигнал $r(t) = 10 \cos \omega t$. Запишите выражения для установившейся реакции системы (не производя вычислений) для каждой из следующих частот:

$$\omega = 0,2; \omega = 2; \omega = 20.$$

Обратите внимание на отличие амплитуд реакций.

- (б) Результаты п. (а) справедливы для $t > T_s$. Определите T_s .
- (в) Амплитуда сигнала из п. (а) изменилась, так что $r(t) = 100 \cos \omega t$. Повторите п. (а).
- (г) Проверьте с помощью SIMULINK результаты пп. (а) и (б) для $\omega = 2$.

- 8.3. Рассмотрите систему с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+2)}.$$

- (а) Изобразите диаграмму Боде, воспользовавшись кусочно-линейной аппроксимацией для амплитудной и фазовой частотных характеристик.
- (б) Найдите установившуюся реакцию системы при входном сигнале $r(t) = \cos 2t$. Используйте только результаты п. (а), не производя никаких вычислений.
- (в) Получите результат п. (б) путем вычислений.
- (г) С помощью MATLAB проверьте значение $G(j2)$, соответствующее результату п. (в).
- (д) Постройте диаграмму Боде с помощью MATLAB. Перенесите на нее результаты п. (а) и укажите максимальные ошибки аппроксимации.

Таблица 8.1 (3) Частотные характеристики к задаче 8.1

ω	Модуль	дБ	Фаза
0,1000	2,48436	7,90431	-9,14594
0,2000	2,43880	7,74352	-18,16629
0,3000	2,36701	7,48399	-26,94837
0,4000	2,27430	7,13694	-35,40195
0,5000	2,16660	6,71557	-43,46370
0,6000	2,04964	6,23354	-51,09664
0,7000	1,92838	5,70385	-58,28625
0,8000	1,80677	5,13807	-65,03515
0,9000	1,68774	4,54613	-71,35773
1,0000	1,57329	3,93619	-77,27565
2,0000	0,77522	-2,21153	-119,74490
3,0000	0,42003	-7,53430	-144,57420
4,0000	0,25177	-11,97997	-161,20010
5,0000	0,16287	-15,76342	-173,45370
6,0000	0,11145	-19,05861	-183,06650
7,0000	0,07957	-21,98492	-190,91650
8,0000	0,05873	-24,62326	-197,49860
9,0000	0,04452	-27,02972	-203,11820
10,0000	0,03450	-29,24445	-207,97950
20,0000	0,00556	-45,10556	-234,86200
30,0000	0,00175	-55,12954	-245,84180
40,0000	0,00076	-62,42105	-251,66930
50,0000	0,00039	-68,13782	-255,25370
60,0000	0,00023	-72,83470	-257,67370
70,0000	0,00014	-76,81866	-259,41490
80,0000	0,00010	-80,27673	-260,72670
90,0000	0,00007	-83,33112	-261,75020
100,0000	0,00005	-86,06599	-262,57070

8.4. (а) Изобразите диаграмму Бode для передаточной функции

$$G(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

- (б) Вычисленные на компьютере значения $G(j\omega)$ приведены в таблице 8.1 (3). Нанесите эти значения на диаграмму Бode, построенную в п. (а), и оцените максимальные погрешности в децибелах и градусах в случае кусочно-линейной аппроксимации частотных характеристик. Укажите также частоты, при которых имеют место максимальные погрешности.

8.5. Изобразите диаграммы Бode для следующих передаточных функций.

$$(a) \quad G(s) = \frac{20}{s(s+1)^2}.$$

$$(б) \quad G(s) = \frac{8s}{(s+1)^2}.$$

$$(в) \quad G(s) = \frac{s+2}{s^2}.$$

$$(г) \quad G(s) = \frac{2}{s^2(s+2)}.$$

(д) С помощью MATLAB проверьте все выполненные построения.

8.6. Изобразите диаграммы Боде для следующих передаточных функций.

$$(a) \quad G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}.$$

$$(б) \quad G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}.$$

$$(в) \quad G(s) = \frac{-s}{(s+1)(s-1)}.$$

$$(г) \quad G(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)}.$$

(д) Чем отличаются диаграммы Боде для $G(s)$ и $-G(s)$?

(е) С помощью MATLAB проверьте все выполненные построения.

8.7. На диаграмме Боде, изображенной на рис. 8.7 (3), представлена кусочно-линейная аппроксимация амплитудной частотной характеристики для минимально-фазовой передаточной функции $G(s)$.

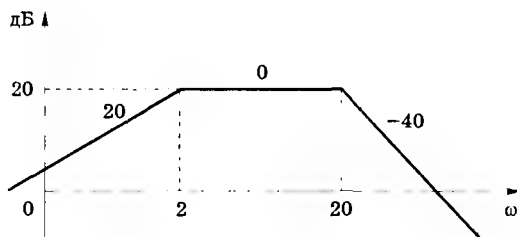


Рис. 8.7 (3)

(а) Определите $G(s)$.

(б) Предположим, что $G(s)$ не является минимально-фазовой. Приведите три возможных передаточных функции, которым соответствует одна и та же амплитудная характеристика, изображенная на рис. 8.7 (3).

(в) Предположим, что участок диаграммы Боде на рис. 8.7 (3), соответствующий $\omega < 2$, распространен на всю область частот. Запишите передаточную функцию, которая имела бы такую амплитудную характеристику.

(г) Предположим, что участок диаграммы Боде на рис. 8.7 (3), соответствующий $2 < \omega < 20$, распространен на всю область частот. Запишите передаточную функцию, которая имела бы такую амплитудную характеристику.

(д) Предположим, что участок диаграммы Боде на рис. 8.7 (3), соответствующий $\omega > 20$, распространен на всю область частот. Запишите передаточную функцию, которая имела бы такую амплитудную характеристику.

(е) С помощью MATLAB проверьте результат п. (а).

8.8. В системе, изображенной на рис. 8.8 (3),

$$G(s) = \frac{150}{s(s+4)^2}.$$

- (а) Изобразите диаграмму Боде для этой системы.
- (б) Используя только критерий Найквиста, определите число полюсов передаточной функции замкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости. Замечание: частота, при которой $\arg G(j\omega) = -180^\circ$, находится достаточно просто.

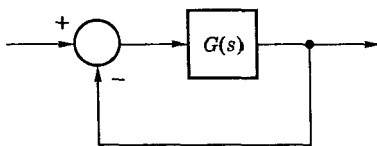


Рис. 8.8 (3)

- (в) Проверьте результат п. (б) с помощью критерия Рауса-Гурвица.
- (г) Предположим, что последовательно с $G(s)$ включен усилитель с коэффициентом K , так что на рис. 8.8 (3) разомкнутая система имеет передаточную функцию $KG(s)$. Определите значение K , при котором замкнутая система находится на границе устойчивости, и частоту возникающих в ней колебаний.
- (д) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (а), (б) и (г). Обратите внимание на трудности, возникающие при построении (и интерпретации) диаграммы Найквиста в одном масштабе.

8.9. Система из задачи 8.8 (г) имеет характеристическое уравнение

$$1 + \frac{128}{s^3 + 8s^2 + 16s} = 0,$$

а установившиеся колебания в ней имеют частоту $\omega = 4$ рад/с.

- (а) Определите период T этой гармонической составляющей реакции системы.
- (б) Без помощи компьютера или калькулятора определите время T_s , необходимое для того, чтобы система вошла в режим установившихся колебаний.
- (в) Если движение системы инициируется за счет начальных условий, то спустя какое время с начала моделирования можно будет отчетливо наблюдать по крайней мере один период установившихся колебаний?
- (г) С помощью SIMULINK проверьте результаты пп. (а) и (в).

8.10. В системе на рис. 8.8 (3) в качестве передаточной функции $G(s)$ используйте каждое из выражений, приведенных в задаче 8.5.

- (а) Для каждого случая изобразите диаграмму Найквиста. Здесь могут оказаться полезными диаграммы Боде, построенные в задаче 8.5.
- (б) Используя только критерий Найквиста, определите устойчивость каждой системы.
- (в) С помощью MATLAB проверьте каждую диаграмму Найквиста из п. (а), обратив внимание на вид диаграммы в окрестности точки -1 .
- (г) С помощью MATLAB (инструкция *pole*) проверьте результат п. (б).

8.11. В системе на рис. 8.8 (3) в качестве передаточной функции $G(s)$ используйте каждое из выражений, приведенных в задаче 8.6.

- (а) Для каждого случая изобразите диаграмму Найквиста. Здесь могут оказаться полезными диаграммы Боде, построенные в задаче 8.6.
- (б) Используя только критерий Найквиста, определите устойчивость каждой системы.
- (в) С помощью MATLAB проверьте каждую диаграмму Найквиста из п. (а), обратив особое внимание на вид диаграммы с окрестности точки -1 .
- (г) С помощью MATLAB (инструкция *pole*) проверьте результат п. (б).

8.12. В системе на рис. 8.8 (3) в качестве передаточной функции используйте каждое из выражений, приведенных в задаче 8.5.

- (а) Для каждого случая изобразите диаграмму Найквиста. Здесь могут оказаться полезными диаграммы Боде, построенные в задаче 8.5.
- (б) Для устойчивых систем отметьте запасы устойчивости по модулю и по фазе.

- (в) С помощью MATLAB проверьте каждую диаграмму Найквиста из п. (а).
 (г) С помощью MATLAB для устойчивых систем определите запасы устойчивости по модулю и по фазе.

8.13. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 8.8 (3), при

$$KG(s) = \frac{50K}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

Частотные характеристики $G(j\omega)$ при $K=1$ приведены в таблице 8.1 (3).

- (а) Пусть $K=1$. Из таблицы 8.1 (3) найдите приблизительные значения запасов устойчивости по модулю и по фазе.
 (б) Повторите п. (а) для $K=2.5$.
 (в) При $K=1$ на вход замкнутой системы подается сигнал $r(t) = 5 \cos(t + 30^\circ)$. Используя данные табл. 8.1 (3), определите установившуюся реакцию на выходе системы.
 (г) С помощью MATLAB определите запасы устойчивости по модулю и по фазе для условий пп. (а) и (б).
 (д) С помощью SIMULINK проверьте результат п. (в).

8.14. В системе на рис. 8.14 (3) передаточная функция

$$G(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+1}.$$

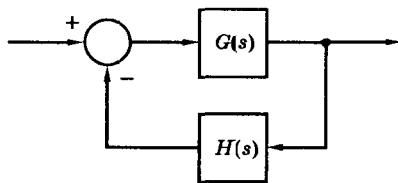


Рис. 8.14 (3)

- (а) При $H(s) = 1$ изобразите диаграмму Боде и определите запасы устойчивости по модулю и по фазе.
 (б) Как изменится диаграмма Боде из п. (а), если $H(s) = e^{-0.3s}$ (идеальное запаздывание по времени равно 0,3 с)?
 (в) Совместите на одном графике диаграммы Боде из пп. (а) и (б).

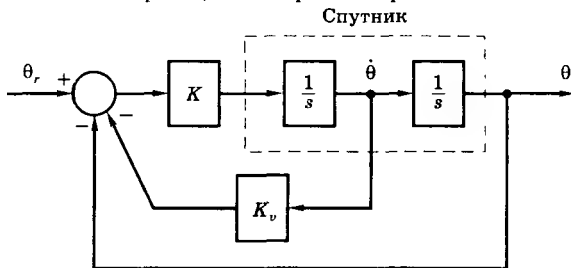
8.15. Данная задача является продолжением и развитием предыдущей. В системе на рис. 8.14 (3)

$$G(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+1}.$$

- (а) При $H(s) = 1$ изобразите диаграмму Найквиста и определите запасы устойчивости по модулю и по фазе.
 (б) Как изменится вид диаграммы Найквиста, если $H(s) = e^{-0.3s}$?
 (в) Совместите в одних осях диаграммы Найквиста из пп. (а) и (б).
 (г) Полагая $H(s) = e^{-t_0 s}$ (идеальное запаздывание на t_0 с), определите диапазон значений $t_0 > 0$, при которых система является устойчивой.
 (д) Внесите изменения в программу MATLAB из примера 8.20 так, чтобы она позволяла строить диаграмму Найквиста для значений t_0 , найденных в п. (г).

8.16. Рассмотрите систему управления жестким спутником, изображенную на рис. 8.16 (3). Эта система, в которой использована обратная связь по скорости, анализировалась ранее в задаче 4.5.

Рис. 8.16 (3)



- (а) Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$1 + G_{OL}(s) = 0,$$

где $G_{OL}(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Определите $G_{OL}(s)$.

- (б) Полагая $K = 1$ и $K_v = 0$ (обратная связь по скорости отсутствует), изобразите диаграмму Боде для разомкнутой системы.
 (в) Используйте результат п. (б) для построения диаграммы Найквиста.
 (г) По результатам пп. (б) или (в) определите запасы устойчивости по модулю и по фазе.

8.17. Эта задача является развитием предыдущей. Рассмотрите систему управления жестким спутником на рис. 8.16 (3).

- (а) Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$1 + G_{OL}(s) = 0,$$

где $G_{OL}(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Определите $G_{OL}(s)$.

- (б) Любым известным вам способом найдите диапазон значений K_v , при которых система устойчива.
 (в) Полагая $K = 1$ и $K_v = 0,5$, изобразите диаграмму Боде для разомкнутой системы.
 (г) Используя результат п. (в), изобразите диаграмму Найквиста.
 (д) Проверьте построение диаграммы Боде в п. (в) с помощью MATLAB.
 (е) По результатам п. (д) оцените запасы устойчивости по модулю и по фазе.
 (ж) С помощью MATLAB вычислите значения запасов устойчивости по модулю и по фазе.

8.18. На рис. 8.18 (3) изображена структурная схема следящей системы, осуществляющей позиционирование пера цифрового плоттера вдоль одной из координатных осей. Сигнал θ_r поступает с выхода компьютера, а θ_p есть положение вала двигателя. Данная система была рассмотрена в задаче 6.13.

- (а) Изобразите диаграмму Найквиста при $K_d = 1$ и $K_v = 0$ (обратная связь по скорости отсутствует).
 (б) Исследуйте устойчивость системы при условиях п. (а).
 (в) Повторите пп. (а) и (б) при $K_d = 0,1414$ и $K_v = 1,414$.
 (г) С помощью MATLAB проверьте диаграммы Найквиста из пп. (а) и (в).
 (д) С помощью MATLAB определите запасы устойчивости по модулю и по фазе для условий п. (в).

8.19. (а) В системе на рис. 8.18 (3) передаточная функция электродвигателя, связывающая напряжение на его входе и угловую скорость, равна

$$\frac{\Omega_p(s)}{M(s)} = \frac{21}{(s+1)(s+3)}.$$

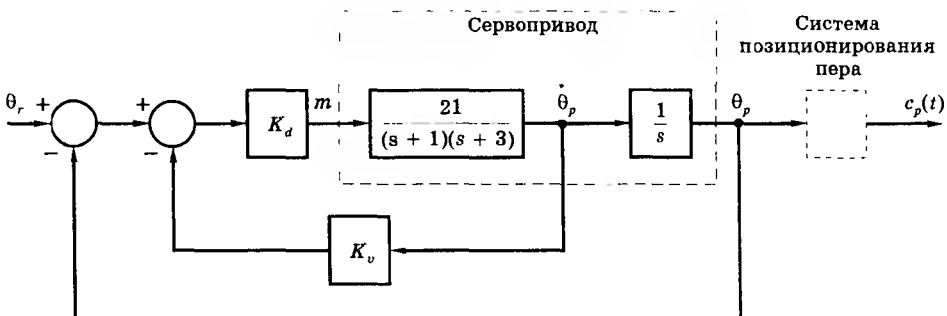


Рис. 8.18 (3)

Этой передаточной функции соответствует коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 7. Если в реальной системе имеется датчик скорости, то как бы вы экспериментально проверили значение коэффициента усиления?

- (б) В п. (а) рассматривалось измерение коэффициента усиления на нулевой частоте для реальной физической системы. Для модели, используемой в этой задаче, вычисления при $s = j2$ дают результат

$$\frac{\Omega_p(j2)}{M(j2)} = \frac{21}{(1 + j2)(3 + j2)} = 2,60e^{-j77,12^\circ}.$$

Если в реальной системе имеется датчик скорости, то как можно экспериментально проверить это комплексное число?

- (в) В пп. (а) и (б) скорость двигателя должна достичь установившегося значения. Сколько для этого потребуется времени?
 (г) С помощью SIMULINK покажите, какие ожидаются результаты в пп. (а) и (б).

8.20. Рассмотрите систему управления положением спутника, изображенную на рис. 8.16 (3).

- (а) Постройте диаграмму Найквиста для этой системы при $K_v = 0$ (обратная связь по скорости отсутствует).
 (б) По диаграмме Найквиста из п. (а) определите устойчивость системы как функцию коэффициента K .
 (в) С помощью критерия Рауса-Гурвица проверьте результат п. (б).
 (г) Проверьте результат п. (б), воспользовавшись методом корневого годографа.
 (д) Используя диаграмму Найквиста, покажите, что система является устойчивой для всех $K > 0$, $K_v > 0$.
 (е) С помощью MATLAB проверьте построение диаграммы Найквиста из п. (а).

8.21. На рис. 8.21 (3) приведена диаграмма Найквиста для системы, конфигурация которой имеет вид рис. 8.8 (3). Предположим, что $G(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. Устойчивость данной системы можно изменить либо увеличивая, либо уменьшая ее коэффициент усиления. Системы такого типа называются *условно устойчивыми*.

- (а) Определите число нулей полинома $1 + G(s)$, находящихся в правой полуплоскости, если точка A имеет координату -1 .
 (б) Повторите п. (а), если точка B имеет координату -1 .

8.22. На рис. 8.22 (3) приведена диаграмма Найквиста для системы, конфигурация которой имеет вид рис. 8.8 (3). Предположим, что $G(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. В передаточную функцию $G(s)$ добавлен коэффициент усиления K . Определите, при каких значениях K ($K > 0$) система будет устойчива.

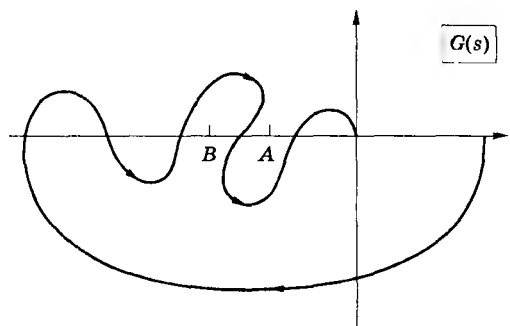


Рис. 8.21 (3)

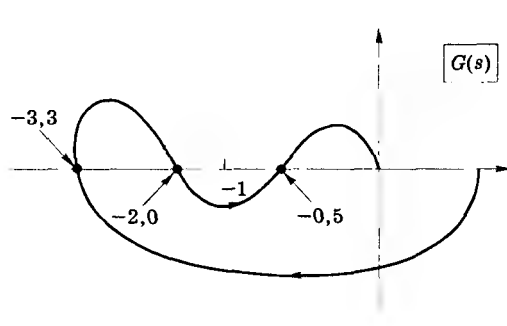
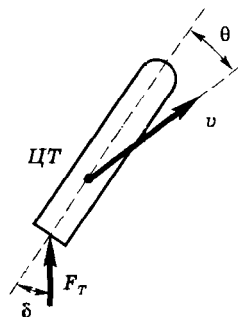
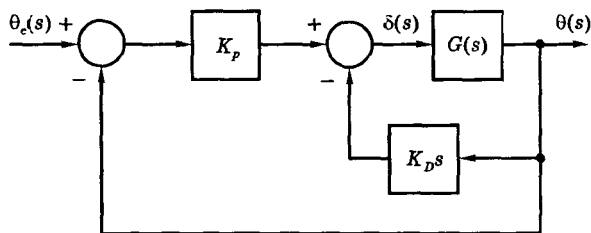


Рис. 8.22 (3)



(а)



(б)

Рис. 8.24 (3)

8.23. Получите уравнение (8-59), соответствующее окружностям постоянных значений N для замкнутой системы.

8.24 На рис. 8.24 (3) изображена система управления положением большой космической ракеты-носителя. Угловое положение θ изменяется под влиянием изменения угла δ , характеризующего направление тяги двигателя. Скорость ракеты обозначена через v . Такие системы управления в разомкнутом состоянии иногда оказываются неустойчивыми, если центр аэродинамического давления оказывается впереди центра тяжести ракеты. Будем считать, что ракета имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0,04}.$$

Это примерно соответствует передаточной функции ракеты Сатурн V, если пренебречь изгибом корпуса, выгоранием топлива и динамикой механизма, управляющего углом тяги двигателей. Если учитывать все эти факторы, то передаточная функция будет иметь 27-й порядок. В данной задаче мы будем считать, что $K_p = 1$ и $K_D = 0$ (обратная связь по скорости отсутствует).

- Изобразите диаграмму Боде, соответствующую передаточной функции разомкнутой системы $K_p G(s)$.
- На основании диаграммы Боде постройте диаграмму Найквиста.
- По диаграмме Найквиста исследуйте устойчивость системы.
- Проверьте результат п. (в) путем построения корневого годографа.
- Проверьте результат п. (в), определив положение полюсов замкнутой системы.

9. Синтез в частотной области

В главе 7 были рассмотрены процедуры анализа и синтеза систем управления с помощью корневого годографа. Что касается синтеза систем, то метод корневого годографа обладает ограниченными возможностями — он позволяет разместить в заданном месте лишь пару комплексных полюсов. Однако, поскольку порядок системы обычно выше второго, то на остальные полюсы передаточной функции влиять практически невозможно. Если эти полюсы занимают положение, неприемлемое с точки зрения динамики системы, то необходимо изменить процедуру синтеза, чтобы сдвинуть их в желаемом направлении.

В этой главе будет предложена иная методика синтеза, использующая частотные характеристики и основанная на критерии Найквиста. Как было показано в предыдущей главе, мы можем судить об устойчивости замкнутой системы по ее частотным характеристикам в разомкнутом состоянии. При построении последних контур Найквиста имеет обычную форму, если передаточная функция разомкнутой системы не имеет полюсов на мнимой оси; в противном случае контур Найквиста включает в себя дополнительные кривые, по которым совершается обход полюсов, находящихся на мнимой оси.

Если процедура синтеза, основанная на методе корневого годографа, дает нам прямую информацию о временных характеристиках замкнутой системы, то частотный метод синтеза содержит эту информацию в неявной форме. Частотные характеристики разомкнутой системы, конечно, позволяют судить о временных характеристиках замкнутой системы, но не настолько очевидно, как это показывает корневой годограф. Однако частотные характеристики дают нам информацию о поведении системы в установившемся режиме (область низких частот), о запасах устойчивости и о полосе пропускания системы. *Таким образом, и метод корневого годографа, и метод частотных характеристик взаимно дополняют друг друга при решении любой задачи проектирования системы управления.*

9.1. Требования к системе управления

В предыдущих главах мы обсуждали некоторые из характеристик, которыми должна обладать надлежащим образом спроектированная система управления. Конечно, не все эти характеристики могут быть определяющими при проектировании конкретной системы управления. Например, следящая система управления пером плоттера должна быть как можно более быстродействующей, иначе плоттер окажется несовместимым с компьютером. С другой стороны, система управления положением космической ракеты-носителя проектируется так, чтобы она обладала сравнительно малым быстродействием, иначе большие перегрузки могут просто привести к разрушению ракеты. Напомним, что когда мы перечисляем все характеристики, которые должна иметь система управления, это вовсе не означает, что *любая* система должна обладать этими характеристиками; в действительности, каждый конкретный случай требует задания вполне определенных характеристик.

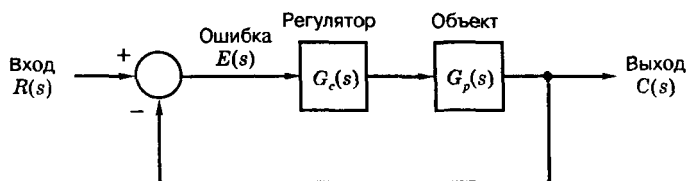
Характеристики, которыми должна обладать система, называются ограничениями, и эти ограничения следует установить до начала процедуры синтеза. Мы можем задать ограничения общего характера (например, система должна быть устойчивой, что вполне очевидно), но кроме того и ряд частных ограничений, касающихся, например, допустимой установившейся ошибки, необходимости компенсации возмущений, перерегулирования переходной функции, точности отслеживания определенных типов входных воздействий и т.д. Если соответствующие ограничения заданы, то тогда можно приступить к синтезу системы управления.

Эту главу мы начнем с обзора некоторых типовых ограничений, принятых в системах управления, и установим связь между ними и частотными характеристиками разомкнутых и замкнутых систем. Мы будем рассматривать структуру системы, представленную на рис. 9.1. Предполагается, что исходная система преобразована к эквивалентной схеме с единичной обратной связью (см. раздел 5.1), имеющей характеристическое уравнение

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 0. \quad (9-1)$$

Если задана передаточная функция объекта $G_p(s)$, то подлежит определению передаточная функция регулятора $G_c(s)$ такая, чтобы замкнутая система обладала по крайней мере некоторыми из характеристик, рассматриваемых ниже.

Рис. 9.1
Замкнутая система управления



Имея дело с системами управления, надо всегда быть очень внимательными и не путать *передаточную функцию разомкнутой системы* [$G_c(s)G_p(s)$ на рис. 9.1] с *передаточной функцией замкнутой системы*

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}.$$

При анализе и синтезе мы в конечном счете всегда рассматриваем замкнутую систему. Однако некоторые из процедур анализа и синтеза требуют определенных операций над разомкнутой системой. Поэтому всегда необходимо уточнять, с какой передаточной функцией вы имеете дело при анализе или синтезе системы.

9.1.1. Точность в установившемся режиме

Мы определили ошибку системы, как сигнал $E(s)$ на рис. 9.1. Точность системы в установившемся режиме мы обсудили в разделе 5.5, где было показано, что если система устойчива, то система типа 1 не имеет установившейся ошибки при постоянном входном воздействии, система типа 2 не имеет установившейся ошибки при постоянном или линейном входном воздействии, система типа 3 не имеет установившейся ошибки при постоянном, линейном и квадратичном входном воздействии и т.д. Тип системы определяется числом полюсов ее передаточной функции в разомкнутом состоянии в точке $s = 0$. Отсюда, казалось бы, должен последовать вывод, что для того, чтобы повысить качество системы в

установившемся режиме, в передаточную функцию регулятора надо ввести дополнительные полюсы при $s = 0$. Однако, как было показано в разделе 8.5, при этом возникает проблема с обеспечением устойчивости системы. Кроме того, поскольку введение дополнительных полюсов при $s = 0$ соответствует регулятору с отставанием по фазе, в переходной функции появляются составляющие с очень большими постоянными времени.

Частотная функция замкнутой системы, изображенной на рис. 9.1, определяется выражением

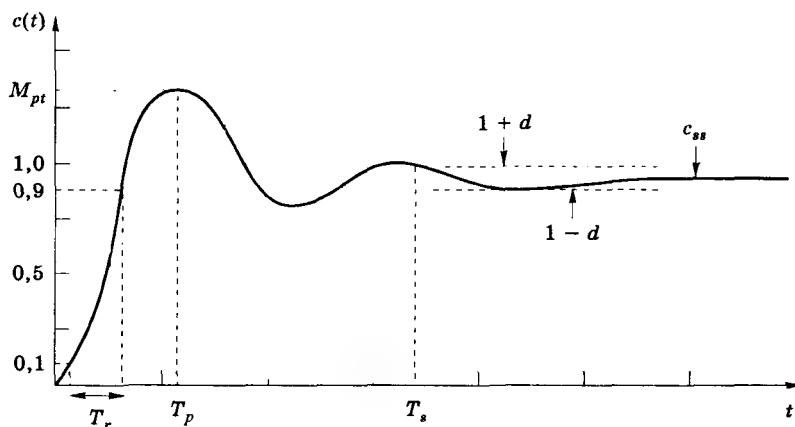
$$T(j\omega) = \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)}. \quad (9-2)$$

Если при некоторой частоте ω_1 коэффициент усиления разомкнутой системы $G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)$ достаточно велик, то коэффициент усиления замкнутой системы приблизительно равен единице. Таким образом, чтобы ошибка была малой при некоторых частотах, соответствующий коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть достаточно большим. Тогда, если мы сможем спроектировать систему, имеющую большой коэффициент усиления в широком диапазоне частот, то эта система очень хорошо будет отслеживать сигналы, спектр которых расположен в этом диапазоне.

9.1.2. Переходная функция

На рис. 9.2 показана переходная функция системы при наличии пары доминирующих полюсов. Основными параметрами, которые могут представлять интерес, являются время нарастания T_r , максимальное значение переходной функции M_{pt} (или перерегулирование в процентах), и время установления T_s . Время нарастания тесно связано с полосой пропускания замкнутой системы, как свидетельствует соотношение (4-52). В общем случае, если нам нужно уменьшить время нарастания, скажем, в 2 раза, то необходимо приблизительно в 2 раза увеличить полосу пропускания замкнутой системы. Если мы хотим уменьшить время установления, то полюсы передаточной функции замкнутой системы необходимо сдвинуть влево на s -плоскости, уменьшив таким образом постоянные времени. Сдвиг полюсов замкнутой системы влево приводит также к увеличению полосы пропускания. Следовательно, чтобы сократить длительность переходного процесса в системе, необходимо увеличить ее полосу пропускания (см. раздел 4.4).

Рис. 9.2
Типичная
переходная
функция



Как было показано в разделе 8.7, пере-регулирование в переходной функции связано с резонансом замкнутой системы, который проявляется в виде максимума ее амплитудно-частотной характеристики (см. рис. 9.3). Замкнутая система может обладать резонансными свойствами только если запасы устойчивости являются малыми (см. раздел 8.7). Следовательно, для уменьшения пере-регулирования необходимо увеличивать запасы устойчивости. Перерегулирование обычно более чувствительно к запасу устойчивости по фазе, чем к запасу по модулю, т.к. в первом случае разомкнутая система имеет больший коэффициент усиления. Требования к ограничению влияния резонансных свойств могут быть заданы в виде процентного пере-регулирования переходной функции, в виде максимально допустимого значения амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, отмеченного как $M_{p\omega}$ на рис. 9.3, или в виде запаса устойчивости по фазе.

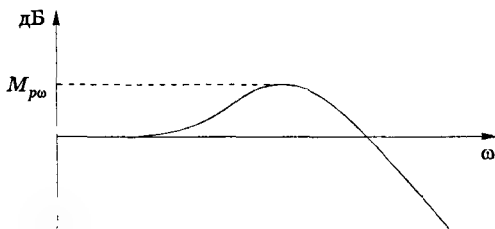


Рис. 9.3. Частотная характеристика замкнутой системы

9.1.3. Относительная устойчивость

В предыдущем параграфе описаны некоторые эффекты, связанные с малыми запасами устойчивости. Для получения приемлемого вида переходной функции необходимо иметь достаточные запасы устойчивости по фазе и по модулю. Второй мотив стремления к большим запасам устойчивости связан с неточностью моделирования. Поскольку модели, на основе которых решается задача синтеза, в известной степени являются неточными, то запасы устойчивости можно рассматривать также как гарантию безопасной работы системы. В общем случае трудно указать численные значения запасов устойчивости, но обычно считается приемлемым, если запас по фазе равен 45° или более, а запас по модулю 8 дБ или выше. Эти значения не являются абсолютными, а лишь приблизительными. Однако из выражения (9-2) следует, что если запасы устойчивости увеличивать за счет уменьшения $|G_c(j\omega)G_p(j\omega)|$ в некотором диапазоне частот, то это приведет к уменьшению полосы пропускания системы.

9.1.4. Чувствительность

Обычно параметры объекта управления изменяются в зависимости от температуры, влажности, срока службы и т.д. Введенная в разделе 5.3 чувствительность оценивает изменение характеристик системы, вызванное малыми изменениями этих параметров. Например, в системе на рис. 9.1 чувствительность передаточной функции замкнутой системы к изменению передаточной функции объекта, представленная в зависимости от частоты, имеет выражение

$$S_{G_p}^T = \frac{\partial T}{\partial G_p} \frac{G_p}{T} \bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \quad (9-3)$$

[См. выражение (5-19).] Отсюда видно, что для того, чтобы эта чувствительность была малой в заданном диапазоне частот, модуль частотной функции разомкнутой системы в этом диапазоне должен быть достаточно большим. Обычно это стремятся сделать путем увели-

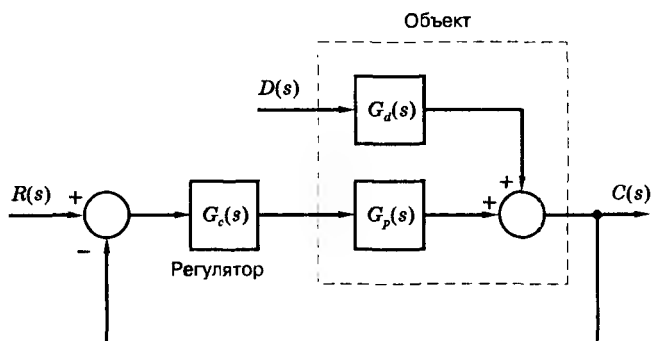
чения коэффициента усиления в контуре. Но это, в свою очередь, уменьшает запасы устойчивости, поэтому, как правило, приходится искать компромисс между низкой чувствительностью и достаточными запасами устойчивости.

9.1.5. Компенсация возмущений

Модель замкнутой системы при наличии возмущения представлена на рис. 9.4 (см. раздел 5.4). На этом рисунке $D(s)$ есть возмущение (нежелательный входной сигнал), например, восходящий поток воздуха, действующий на пассажирский авиалайнер. Система, изображенная на рис. 9.4, может представлять собой систему управления высотой полета такого лайнера, а $G_c(s)$ в этом случае играет роль вертикального автопилота. Все, кто летал на таких самолетах, хорошо знакомы с влиянием возмущений, действующих на лайнер, и с проблемами, возникающими при проектировании системы управления, компенсирующей воздействие возмущающих потоков воздуха. Если бы эта задача не была такой трудной, она давно была бы решена.

Рис. 9.4

Система при наличии возмущения



Согласно принципу суперпозиции, выходной сигнал системы на рис. 9.4 может быть записан в виде

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} D(s). \quad (9-4)$$

Для того, чтобы уменьшить влияние возмущения на выход, мы должны сделать коэффициент усиления разомкнутой системы $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ достаточно большим в диапазоне частот, занимаемом возмущением $d(t)$. Если это невозможно, то коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть сделан как можно большим в как можно большем диапазоне частот. Предлагаемый метод компенсации возмущений заключается в том, чтобы сделать коэффициент усиления разомкнутой системы большим в возможно большем диапазоне частот, не увеличивая при этом коэффициент передачи между точкой приложения возмущения и выходом системы. Напомним, однако, что такое решение приводит к уменьшению запасов устойчивости и здесь опять-таки приходится искать компромисс.

9.1.6. Заключение

Из предыдущих рассуждений видно, что для получения хорошего быстродействия, высокой точности отслеживания входного сигнала, малой чувствительности к изменению пара-

метров и эффективной компенсации возмущений необходимо иметь большой коэффициент усиления разомкнутой системы в широком диапазоне частот. Однако попытки увеличить коэффициент усиления приводят к уменьшению запасов устойчивости и ухудшению качества переходной функции. Это может вызвать также появление резонанса в системе и даже привести к потере устойчивости как из-за неточности модели реальной системы, так и из-за того, что в линейной модели не учтены нелинейности, присутствующие в этой системе. Следовательно, должен быть найден компромисс между этими противоречивыми требованиями, что составляет основную проблему при синтезе систем. Синтез системы управления является итеративным процессом, когда после проектирования регулятора его работа проверяется в составе реальной физической системы. При этом выявляются все несоответствия требованиям, и регулятор модифицируется с целью их устранения. На каждой итерации проектировщик лучше вникает в поведение системы, и значение этой новой информации трудно переоценить.

9.2. Коррекция

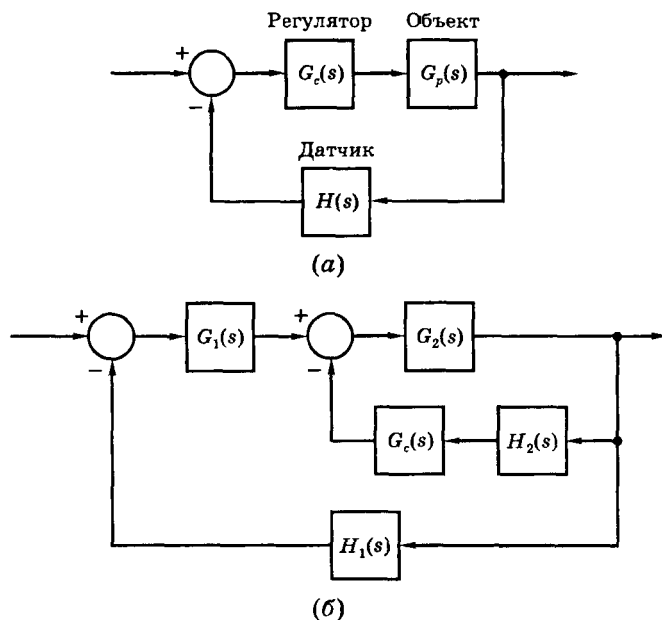
В этой главе мы, в основном, рассмотрим коррекцию систем с одним входом и одним выходом, имеющих структуру, изображенную на рис. 9.5 (а). Эта система имеет характеристическое уравнение

$$1 + G_c(s) G_p(s) H(s) = 0. \quad (9-5)$$

Необходимо синтезировать $G_c(s)$ таким образом, чтобы система обладала определенными заданными характеристиками. Коррекция, соответствующая схеме на рис. 9.5 (а), называется последовательной. О ее влиянии на характеристики системы во многих случаях можно судить по расположению корней характеристического уравнения (9-5).

Иногда более выгодно регулятор (корректирующее устройство) помещать во внутренний контур системы, как показано на рис. 9.5 (б). Характеристическое уравнение та-

Рис. 9.5
Замкнутая система
управления



кой системы, полученное на основании формулы Мейсона, имеет вид:

$$\Delta(s) = 1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_c(s) G_2(s) H_2(s) = 0. \quad (9-6)$$

Из этого уравнения трудно увидеть, как влияет регулятор $G_c(s)$ на характеристики системы. Ни один из приведенных выше выводов не может быть применен непосредственно к уравнению (9-6). Однако, если (9-6) разделить на первые два члена этого уравнения, то оно примет вид:

$$1 + \frac{G_c(s) G_2(s) H_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s)} = 0. \quad (9-7)$$

Далее, его можно представить иначе:

$$1 + G_c(s) G_e(s) = 0, \quad (9-8)$$

где

$$G_e(s) = \frac{G_2(s) H_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s)}. \quad (9-9)$$

Уравнение (9-8) имеет тот же вид, что и (9-5), поэтому многие из ранее приведенных результатов можно использовать при синтезе системы со структурой рис. 9.5 (б). Однако такие проблемы как компенсация возмущений, точность в установившемся режиме и т.д. должны решаться заново применительно к данной конфигурации системы.

Характеристическое уравнение многоконтурной системы вида (9-8) может быть получено непосредственно следующим образом. Сначала отбрасывается вход системы, и система размыкается на входе регулятора, как показано на рис. 9.6. Сигнал, поступающий на вход регулятора, обозначается через $E_i(s)$, а сигнал, входящий в точку разрыва — через $E_0(s)$. Затем $E_0(s)$ выражается в зависимости от $E_i(s)$. Согласно рис. 9.6,

$$E_0(s) = \frac{-G_c(s) G_2(s) H_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H_1(s)} E_i(s) = G_{0i}(s) E_i(s), \quad (9-10)$$

где $G_{0i}(s)$ есть передаточная функция от точки разрыва к ней же. В замкнутой системе $E_i(s) = E_0(s)$, и выражение (9-10) можно представить в виде:

$$[1 - G_{0i}(s)] E_0(s) = 0.$$

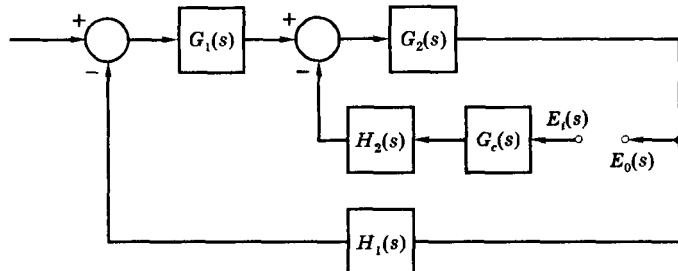
Даже если вход замкнутой системы считается нулевым, $E_0(s)$ не обязательно равняется нулю, т.к. в системе могут быть заданы начальные условия. Следовательно, если реакция системы вызвана начальными условиями, должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т.е.

$$1 - G_{0i}(s) = 0. \quad (9-11)$$

Это и есть не что иное, как характеристическое уравнение системы.

Рис. 9.6

Система
с разомкнутым
внутренним контуром



Данная процедура является общим методом получения характеристического уравнения системы. Если внутренний контур размыкается перед регулятором, как на рис. 9.6, то характеристическое уравнение будет записано в форме (9-8), удобной для синтеза. В этом случае эквивалентная передаточная функция $G_e(s)$ будет с обратным знаком равна передаточной функции между выходом регулятора и его входом. Заметим однако, что передаточная функция от точки разрыва внутреннего контура к ней же — это совсем не та передаточная функция, которая используется при построении корневого годографа, частотных характеристик, применении критерия Найквиста и т.д. В характеристическом уравнении

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

произведение $G(s)H(s)$ есть передаточная функция разомкнутой системы (от ее входа к выходу), и она используется во многих методах анализа. Однако, если в системе с таким характеристическим уравнением разорвать обратную связь и определить передаточную функцию от точки разрыва к ней же, то она будет равна $-G(s)H(s)$, т.е. будет совпадать с передаточной функцией разомкнутой системы с точностью до знака. Этот результат имеет общий характер.

9.3. Коррекция путем изменения коэффициента усиления

Сначала мы рассмотрим способ коррекции путем изменения коэффициента усиления K . На рис. 9.7 (а) изображена замкнутая система, в которой регулятор $G_c(s)$ представлен просто коэффициентом K . Это соответствует пропорциональному, или П-регулятору, рассмотренному в разделе 7.10, и очень немногие требования к системе можно удовлетворить с помощью такого вида коррекции.

Предположим, например, что нескорректированная система имеет диаграмму Найквиста, изображенную на рис. 9.7 (б). Изменение коэффициента K может только пропорционально расширить или сжать диаграмму, но никак не повлияет на ее форму. Следовательно, в данном примере мы можем обеспечить требуемый запас устойчивости по фазе, но вынуждены будем согласиться как с частотой, на которой он будет иметь место, так и с результирующим запасом по модулю.

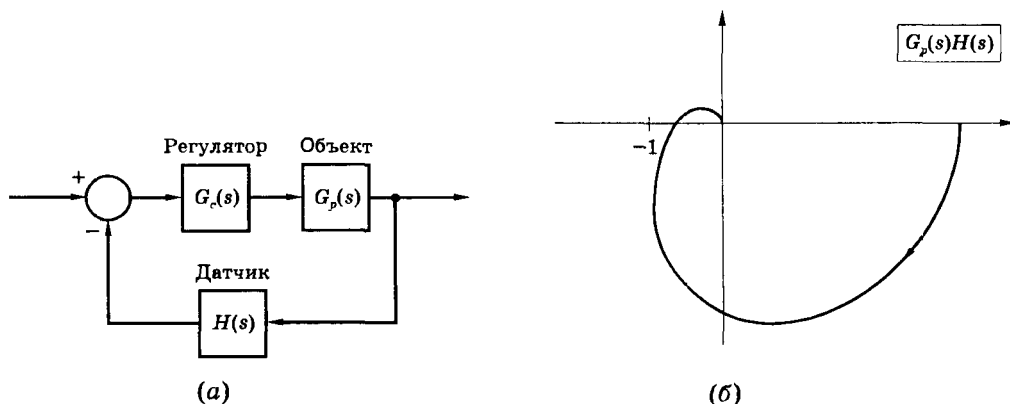
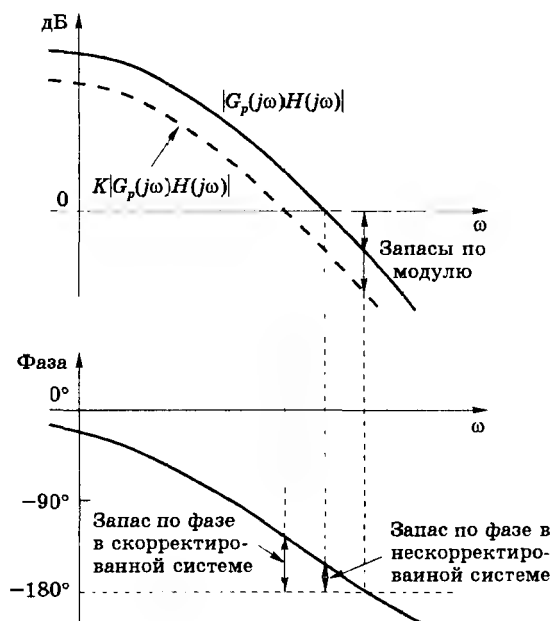


Рис. 9.7. Система с коррекцией и типичная диаграмма Найквиста

Тот же эффект можно пронаблюдать на диаграмме Боде для этой системы, которая приведена на рис. 9.8. На рисунке показан запас по фазе нескорректированной системы. Показано также, что произойдет, если в систему ввести регулятор с коэффициентом усиления, меньшим единицы: амплитудная характеристика сместится вниз, не изменив своей формы, а фазовая характеристика останется неизменной. Таким образом, запас по фазе увеличится. Но, поскольку частота, на которой будет иметь место новый запас по фазе, станет меньше, то соответственно уменьшится и полоса пропускания системы. Это приведет к увеличению времени нарастания переходной функции, но поскольку запас по фазе увеличится, то перерегулирование у переходной функции должно уменьшиться.

Рис. 9.8

Коррекция путем изменения коэффициента усиления



Пример 9.1

Синтезируем П-регулятор для системы радиолокационного сопровождения (см. раздел 2.7), изображенной на рис. 9.9. Будем считать, что индуктивностью обмотки сервопривода пренебрегать нельзя, и тогда передаточная функция нескорректированной системы имеет вид:

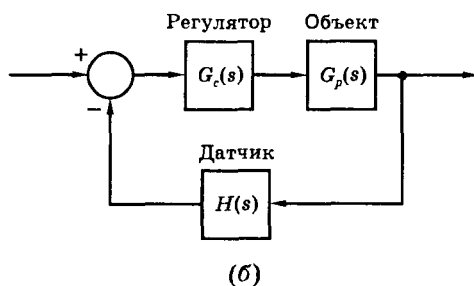
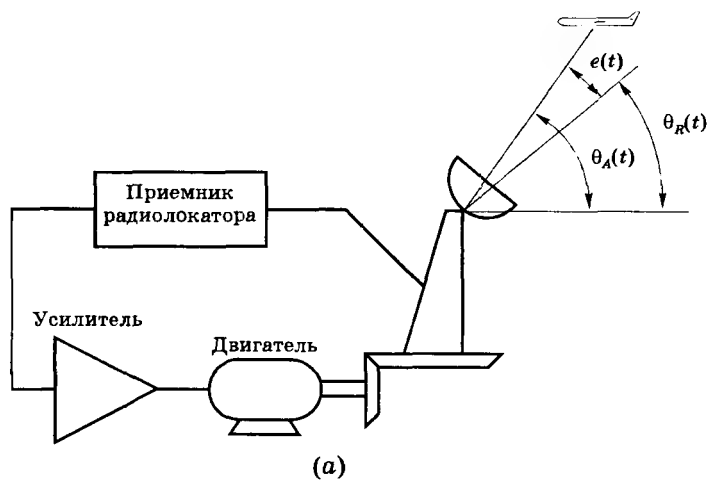
$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)},$$

причем $H(s) = 1$. Частотные характеристики разомкнутой системы, $G_p(j\omega)H(j\omega)$, приведены в таблице 9.1. Обратим внимание, что для нескорректированной системы запас по фазе приблизительно равен 12° , а запас по модулю — около 3,5 дБ; эти значения являются слишком малыми для того, чтобы можно было ожидать хороший вид переходной характеристики.

Предположим, что запас по фазе должен быть равен 50° . Это означает, что при некоторой частоте ω , на которой $\arg G(j\omega)H(j\omega) = -130^\circ$, должно выполняться условие $|G_p(j\omega)H(j\omega)| = 1$. Поскольку коррекция путем изменения коэффициента усиления не влияет на фазовую характеристику разомкнутой системы, то из табл. 9.1 мы находим, что требуемый запас по фазе должен иметь место на частоте $\omega \approx 0,5 \text{ с}^{-1}$. Так как модуль частотной функции разомкнутой системы на этой частоте приблизительно равен 3,5, то K необходимо выбрать равным $1/3,5$, или 0,286. На этом заканчивается синтез системы управления.

Рис. 9.9

Система
радиолокационного
сопровождения

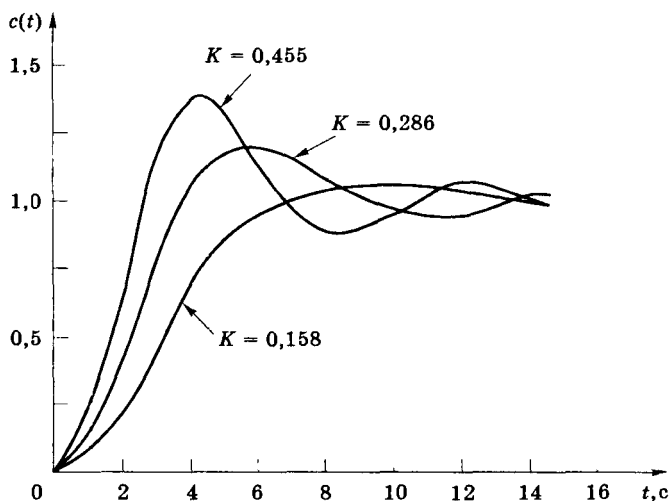


Чтобы определить некоторые характеристики скорректированной системы, путем моделирования была получена переходная функция, которая приведена на рис. 9.10. Перерегулирование составляет около 19%.

Чтобы детальнее исследовать влияние изменения коэффициента усиления на характеристики системы, для приведенного выше примера были заданы запасы устойчивости 35° и 65° . Этим значениям, согласно табл. 9.1, соответствуют коэффициенты $1/2,2 = 0,455$

Рис. 9.10

Переходные функции
к примеру 9.1



и $1/6,31 = 0,158$. Переходные функции системы с этими коэффициентами также приведены на рис. 9.10, а на рис. 9.11 изображены частотные характеристики скорректированной системы при разных значениях коэффициента усиления. Переходные функции вычислены с помощью программы MATLAB:

```
K = [0.455 0.286 0.158]; t = 0 : 0.2 : 16
for k = 1 : 3
    G = tf([4], [1 3 2 0]);
    T = K(k)*G/(1 + K(k)*G);
    step(T, t);
    hold on
end, hold off, pause, margin(K(1)*G)
```

В данной программе также вычисляются запасы по модулю и по фазе при $K = 0,455$.

Из двух последних рисунков видно, что увеличение запаса по фазе за счет уменьшения коэффициента усиления приводит к (1) уменьшению перерегулирования в переходной функции, (2) к уменьшению полосы пропускания системы и (3) к увеличению времени нарастания. Сравнительная оценка трех систем приведена в таблице 9.2. В таблицу также включено произведение времени нарастания на полосу пропускания, что лишний раз подтверждает соотношение (4-52), согласно которому это произведение приблизительно постоянно.

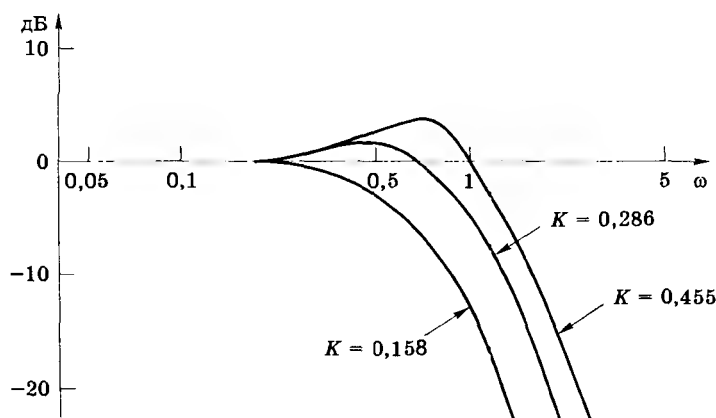
Таблица 9.1. Частотные характеристики к примеру 9.1

ω	Модуль	дБ	Фаза
0,1000	19,87591	25,96654	-98,57300
0,2000	9,75714	19,78645	-107,02050
0,3000	6,31486	16,00728	-115,23000
0,4000	4,55223	13,16449	-123,11130
0,5000	3,47089	10,80881	-130,60130
0,6000	2,73776	8,74792	-137,66300
0,7000	2,20925	6,88491	-144,28210
0,8000	1,81255	5,16578	-150,46120
0,9000	1,50628	3,55811	-156,21500
1,0000	1,26491	2,04120	-161,56500
1,1432	1,00001	0,00005	-168,57490
1,4142	0,66667	-3,52182	-180,00000
2,0000	0,31623	-10,00000	-198,43500
3,0000	0,11694	-18,64066	-217,87500
4,0000	0,05423	-25,31479	-229,39870
5,0000	0,02913	-30,71192	-236,88870
6,0000	0,01733	-35,22445	-242,10270
7,0000	0,01110	-39,09322	-245,92450
8,0000	0,00752	-42,47483	-248,83870
9,0000	0,00532	-45,47598	-251,13100
10,0000	0,00390	-48,17235	-252,97950

Таблица 9.2. Результаты к примеру 9.1

K	Запас по фазе (град)	Перерегулирование (%)	Время нарастания (с)	Полоса пропускания (с ⁻¹)	$T_r \times BW$
0,158	65	3,7	4,5	0,5	2,25
0,286	50	18	2,4	0,9	2,16
0,455	35	35	1,7	1,2	2,04

Рис. 9.11
Частотные характеристики к примеру 9.1



9.4. Коррекция с отставанием по фазе

В данном разделе мы будем считать, что регулятор имеет передаточную функцию первого порядка:

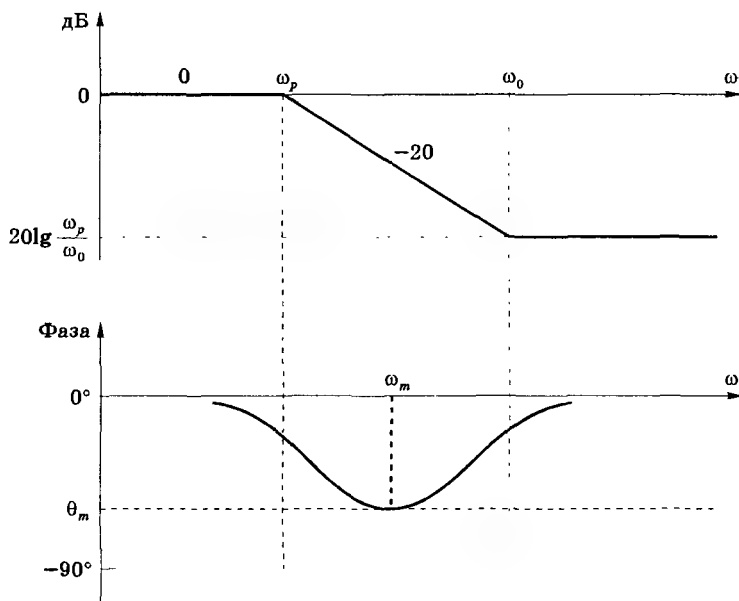
$$G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_0}{1 + s/\omega_p}. \quad (9-12)$$

Коэффициент усиления регулятора равен единице; случай неединичного коэффициента усиления будет рассмотрен позже. Задачей синтеза является определение нуля передаточной функции регулятора $-\omega_0$ и ее полюса $-\omega_p$ так, чтобы замкнутая система обладала требуемыми характеристиками.

Как и в методе корневого годографа, мы рассмотрим два случая. Если $\omega_0 > \omega_p$, то регулятор будет обладать отставанием по фазе, а при $\omega_0 < \omega_p$ он будет обеспечивать опережение по фазе (в обоих случаях мы считаем, что регулятор является минимально-фазовым). В общем случае, тот и другой тип регулятора применяются для удовлетворения совершенно разных требований к системе. В данном разделе мы рассмотрим синтез регулятора с отставанием по фазе, основанный на использовании частотных характеристик (в частности, диаграммы Боде).

Диаграмма Боде для регулятора вида (9-12) при единичном коэффициенте усиления и $\omega_0 > \omega_p$ изображена на рис. 9.12. Амплитудно-частотная характеристика представлена кусочно-линейной аппроксимацией. Фазо-частотная характеристика всегда отрицательна, а максимальный сдвиг по фазе, θ_m , меньше 90° . Можно показать, что θ_m имеет место на частоте ω_m , являющейся средним геометрическим ω_0 и ω_p , т.е. $\omega_m = \sqrt{\omega_p \omega_0}$.

Рис. 9.12
 Диаграмма Бode
 для регулятора
 с отставанием
 по фазе



Заметим, что регулятор с отставанием по фазе применяется с целью уменьшения коэффициента усиления на высоких частотах и введения отрицательного сдвига по фазе. Усиление на высоких частотах уменьшается соответственно выражению

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_c(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 + j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / \omega_p} = \frac{\omega_p}{\omega_0}. \quad (9-13)$$

Заметим, что регулятор с отставанием по фазе по сути является фильтром низких частот, т.е. высокие частоты ослабляются им по сравнению с низкими. Из предыдущей главы нам известно, что уменьшение коэффициента усиления системы улучшает ее устойчивость, а появление дополнительного отрицательного фазового сдвига стремится ухудшить устойчивость. Поэтому при синтезе регулятора с отставанием по фазе надо соблюдать осторожность с тем, чтобы его введение в систему не слишком сильно повлияло на устойчивость.

Вернемся к синтезу замкнутой системы, представленной на рис. 9.7, которая имеет характеристическое уравнение

$$1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0. \quad (9-14)$$

Диаграмма Найквиста для этой системы, например, может иметь вид, изображенный на рис. 9.13. На этом рисунке диаграмма Найквиста разделена на три участка, обозначенных *A*, *B* и *C*. Рассмотрим размещение полюса и нуля регулятора с отставанием по фазе в каждом из этих трех участков.

Коэффициент усиления системы в области *C* достаточно мал; размещение полюса и нуля регулятора в этой области частот еще более уменьшает коэффициент усиления и, следовательно, оказывает очень малое влияние на свойства замкнутой системы. Следовательно, нет никаких аргументированных причин для размещения полюса и нуля регулятора в высокочастотной области.

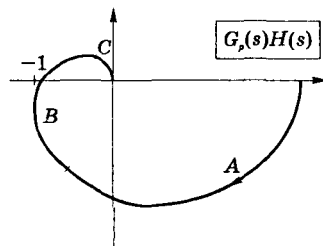


Рис. 9.13. Типичная
 диаграмма Найквиста

В области B на рис. 9.13 диаграмма Найквиста проходит в непосредственной близости от точки -1 . Следовательно, размещение полюса и нуля регулятора в этом диапазоне частот будет чревато уменьшением устойчивости системы из-за введения дополнительного отрицательного сдвига по фазе. В этом интервале частот никоим образом нельзя размещать полюс и нуль регулятора.

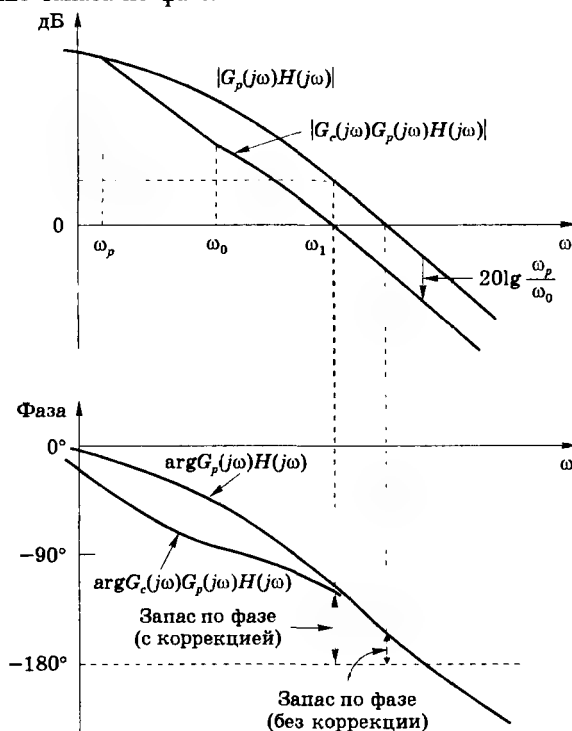
Рассмотрим случай, когда полюс и нуль регулятора размещаются в области A . Дополнительный отрицательный сдвиг по фазе незначительно влияет на устойчивость системы, поскольку диаграмма Найквиста далека от точки -1 . Как видно из диаграммы Боде для регулятора на рис. 9.12, фазовый сдвиг стремится к нулю при возрастании частоты. Но при этом уменьшается и коэффициент усиления регулятора на высоких частотах, что приводит к увеличению запасов устойчивости системы. Следовательно, полюс и нуль регулятора необходимо размещать в этом диапазоне частот (область A).

Из всего сказанного выше мы можем сделать вывод, что регулятор с отставанием по фазе влияет на характеристики системы в высокочастотной области аналогично коррекции путем уменьшения коэффициента усиления. Однако в области низких частот влияние регулятора сказывается не так сильно. Поэтому характеристики системы, обусловленные низкими частотами, практически не изменяются, тогда как запасы устойчивости значительно улучшаются.

Влияние регулятора с отставанием по фазе можно проиллюстрировать с помощью диаграммы Боде на рис. 9.14. Значения нуля и полюса регулятора, ω_0 и ω_p , выбраны достаточно малыми в сравнении с частотой, при которой $|G_p(j\omega)H(j\omega)| = 1$. Благодаря этому отставание по фазе, вносимое регулятором, окажет малое влияние на вид диаграммы Найквиста в окрестности точки -1 . Усиление системы в области высоких частот уменьшится в ω_0/ω_p раз, что приведет к увеличению запаса по фазе.

Рис. 9.14

Синтез регулятора
с отставанием по фазе



До сих пор мы предполагали, что регулятор имеет единичный коэффициент усиления. Однако чаще всего коэффициент усиления разомкнутой системы, $G_p(0)H(0)$, не отвечает требованиям, предъявляемым к качеству; следовательно, возникает необходимость синтеза регулятора с неединичным коэффициентом усиления. Эта задача решается в несколько этапов:

1. Определяется значение коэффициента усиления разомкнутой системы, удовлетворяющее требованиям, предъявляемым к системе, например, к величине установившейся ошибки, к компенсации медленно меняющихся возмущений и т.д.
2. Коэффициенту усиления системы с передаточной функцией $G_p(s)H(s)$ придается значение, найденное на предыдущем этапе.
3. Известным способом синтезируется регулятор с единичным коэффициентом усиления.
4. Коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте устанавливается таким, чтобы аналогичный коэффициент для системы с передаточной функцией $G_c(s)G_p(s)H(s)$ удовлетворял выдвинутым требованиям.

Теперь рассмотрим, как можно определить значения ω_p и ω_c , чтобы получить желаемый запас устойчивости по фазе. Будем считать, что передаточная функция $G_p(s)H(s)$ дополнена коэффициентом K_c , чтобы удовлетворить требованиям к системе в области низких частот. На рис. 9.14 через ω_1 обозначена частота, на которой $\arg K_c G_p(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ + \varphi_m + 5^\circ$, где φ_m — требуемый запас по фазе. Наличие слагаемого 5° вскоре станет ясным. Запас по фазе мы обеспечиваем на частоте ω_1 , где коэффициент передачи разомкнутой скорректированной системы равен единице. Полагая, что ω_0 и ω_p малы в сравнении с частотой ω_1 , коэффициент передачи регулятора на этой частоте будет равен

$$G_c(j\omega_1) = \frac{1 + j\omega_1/\omega_0}{1 + j\omega_1/\omega_p} \approx \frac{\omega_p}{\omega_0}. \quad (9-15)$$

Поскольку

$$|K_c G_c(j\omega_1) G_p(j\omega_1) H(j\omega_1)| = 1, \quad (9-16)$$

то

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{|K_c G_p(j\omega_1) H(j\omega_1)|}. \quad (9-17)$$

Таким образом, мы получили одно уравнение с двумя неизвестными, ω_0 и ω_p . Для того, чтобы регулятор вносил очень малый фазовый сдвиг на частоте ω_1 , выберем

$$\omega_0 = 0,1\omega_1. \quad (9-18)$$

В действительности при таком соотношении регулятор будет создавать сдвиг по фазе, приблизительно равный -5° ; этим и объясняется введенное ранее дополнительное слагаемое в фазовый сдвиг скорректированной системы. Решение уравнений (9-17) и (9-18) даст нам искомые значения полюса и нуля регулятора.

Вся процедура синтеза регулятора с отставанием по фазе сводится к следующим шагам:

1. Дополнить передаточную функцию $G_p(s)H(s)$ коэффициентом K_c , удовлетворяющим требованиям к системе в области низких частот.

2. Определить частоту, на которой $\arg K_c G_p(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ + \varphi_m + 5^\circ$, где φ_m — требуемый запас по фазе.
3. Задать значение нуля регулятора

$$\omega_0 = 0,1\omega_1 \text{ [уравнение (9-18)]}.$$

4. Отношение полюса регулятора к его нулю на основании (9-15) и (9-16) определяется выражением

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{|K_c G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|},$$

тогда

$$\omega_p = \frac{0,1\omega_1}{K_c G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)}. \quad (9-19)$$

5. В результате передаточная функция регулятора принимает вид

$$G_c(s) = \frac{K_c(1 + s/\omega_0)}{1 + s/\omega_p}.$$

Пример 9.2

Рассмотрим систему радиолокационного сопровождения из примера 9.1, где разомкнутый контур имеет передаточную функцию

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Предположим, что усиление в области низких частот удовлетворяет требованиям, предъявляемым к системе, поэтому положим $K_c = 1$. Как и в примере 9.1, будем считать, что необходимо иметь запас по фазе 50° . Следовательно, частота ω_1 определяется из уравнения:

$$\arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = -180^\circ + 50^\circ + 5^\circ = -125^\circ.$$

По таблице 9.1, где приведены частотные характеристики $G_p(j\omega)H(j\omega)$, находим $\omega_1 \approx 0,4$. Модуль частотной функции разомкнутой системы на этой частоте равен 4,55. На основании (9-18), $\omega_0 = 0,1\omega_1 = 0,04$ и из (9-19) имеем:

$$\omega_p = \frac{0,1\omega_1}{|K_c G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|} = \frac{0,04}{4,55} = 0,0088.$$

Тогда передаточная функция регулятора принимает вид:

$$G_c(s) = \frac{1 + s/0,04}{1 + s/0,0088} = \frac{1 + 25s}{1 + 113,6s} = \frac{0,22s + 0,00880}{s + 0,00880}.$$

Заметим, что коэффициент усиления регулятора на низких частотах равен единице, а на высоких $1/4,55 = 0,220$, как и требовалось.

С помощью следующей программы MATLAB

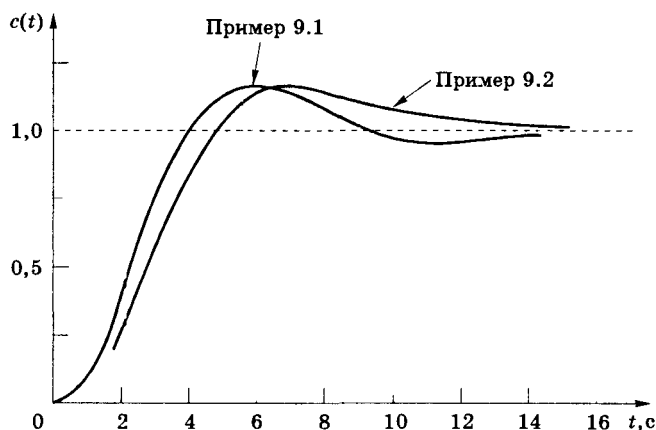
```
Gp = tf([4], [1 3 2 0]); Gc = tf([25 1], [113.6 1]);
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(Gp*Gc)
```

были вычислены запас по фазе $52,3^\circ$ и запас по модулю 6,5.

Переходная функция скорректированной системы изображена на рис. 9.15. Там же приведена переходная функция системы из примера 9.1, где запас по фазе составлял 50° . Отметим, что реакция системы с регулятором с отставанием по фазе протекает несколько медленнее, чем в случае коррекции путем уменьшения коэффициента усиления. Однако, что касается установившейся ошибки, компенсации возмущений и т.д., то регулятор с отставанием по фазе обес-

печивает лучшее качество системы за счет того, что ее характеристики в области низких частот остаются неизменными. К свойствам этих двух систем мы вернемся ниже, после того как будет рассмотрен синтез регулятора с опережением по фазе.

Рис. 9.15
Переходные функции



9.5. Коррекция с опережением по фазе

При синтезе регулятора с опережением по фазе мы, как и в предыдущем случае, будем считать, что он обладает единичным коэффициентом усиления и имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_0}{1 + s/\omega_p}. \quad (9-20)$$

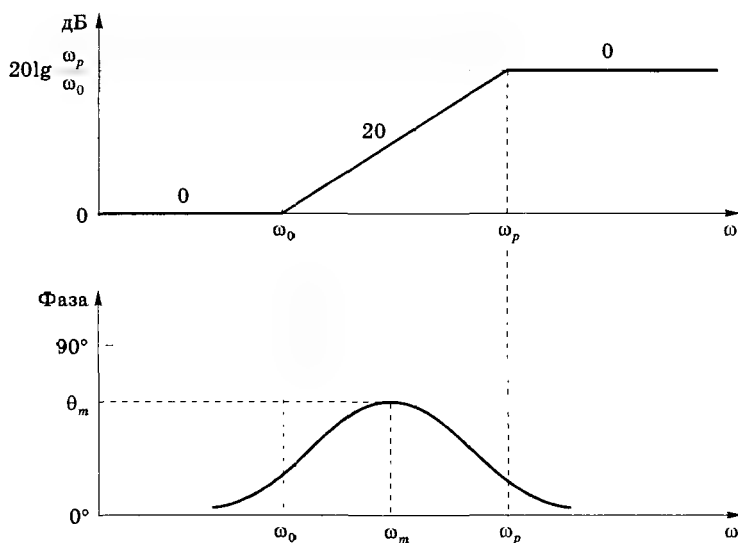
Для регулятора с опережением по фазе $\omega_0 < \omega_p$. Требуется определить значения ω_0 и ω_p , удовлетворяющие заданным требованиям к замкнутой системе на рис. 9.7, имеющей характеристическое уравнение

$$1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0. \quad (9-21)$$

Общий вид диаграммы Бode для регулятора с опережением по фазе представлен на рис. 9.16. Из диаграммы видно, что такой регулятор по сути является фильтром высоких частот, т.к. для них коэффициент передачи значительно больше, чем для низких частот. Увеличение усиления на высоких частотах, вообще говоря, ухудшает устойчивость системы. Однако положительный сдвиг по фазе, создаваемый регулятором, стремится повернуть диаграмму Найквиста от точки -1 и, таким образом, улучшает устойчивость. Поэтому надо очень внимательно подходить к выбору полюса и нуля регулятора так, чтобы из двух эффектов, влияющих на устойчивость, преобладающим был второй (положительный фазовый сдвиг).

Заметим, что диаграмма Бode для регулятора с опережением по фазе является зеркальным отображением относительно оси ω соответствующей диаграммы для регулятора с отставанием по фазе (рис. 9.12). Значение максимального фазового сдвига θ_m для регулятора с отставанием по фазе в общем случае не имеет существенного значения, и мы его не вычисляли. Однако в случае регулятора с опережением по фазе значение θ_m очень важно знать, поскольку положительный фазовый сдвиг, создаваемый регулятором, улучшает устойчивость системы. Поэтому мы установим связь между значением θ_m и полюсом и нулем регулятора.

Рис. 9.16
 Диаграмма Бode
 для регулятора
 с опережением
 по фазе



Передаточная функция регулятора имеет выражение:

$$G_c(j\omega) = |G_c(j\omega)| e^{j\theta} = \frac{1 + j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_p)}. \quad (9-22)$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_0} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_p} \right) = \operatorname{tg} (\alpha - \beta).$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\omega/\omega_0 - \omega/\omega_p}{1 + \omega^2/\omega_0 \omega_p}. \quad (9-23)$$

Как было отмечено в предыдущем разделе, максимальный фазовый сдвиг имеет место на частоте

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0 \omega_p}. \quad (9-24)$$

На основании выражений (9-23) и (9-24) значение θ_m вычисляется с помощью соотношения

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_p}} \right). \quad (9-25)$$

Таким образом, максимальное значение фазового сдвига θ_m зависит только от отношения ω_p/ω_0 . Эта зависимость, вычисленная с помощью (9-25), изображена на рис. 9.17. На основании выражений (9-22) и (9-24) можно определить коэффициент усиления регулятора на частоте ω_m :

$$|G_c(j\omega_m)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega_m/\omega_0)^2}{1 + (\omega_m/\omega_p)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega_p/\omega_0)}{1 + (\omega_0/\omega_p)}} = \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_0}}. \quad (9-26)$$

Рассмотрим теперь действие коррекции с опережением по фазе применительно к типичной диаграмме Найквиста, изображенной на рис. 9.18. Как и в случае с регулятором с отставанием по фазе, диаграмму Найквиста разделим на три области частот. Сначала рассмотрим область C , где коэффициент передачи разомкнутой системы очень мал. По упомянутой причине введение полюса и нуля регулятора в этой области частот окажет очень малое влияние на свойства системы.

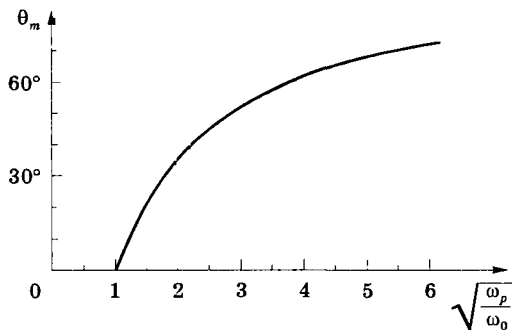


Рис. 9.17. Максимальный фазовый сдвиг фазопережающего фильтра

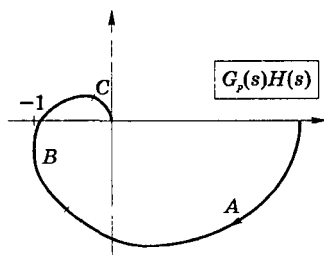


Рис. 9.18. Типичная диаграмма Найквиста

В области A диаграмма Найквиста далека от точки -1 , поэтому опережение по фазе, вносимое регулятором, не увеличит запасы устойчивости замкнутой системы. Однако эти запасы устойчивости уменьшаются на высоких частотах за счет увеличения коэффициента усиления, обусловленного регулятором. Поэтому в области низких частот тоже не следует размещать нуль и полюс регулятора с опережением по фазе.

Для получения наибольшего эффекта от регулятора с опережением по фазе его нуль и полюс следует размещать в области частот B , т.е. там, где диаграмма Найквиста близка к точке -1 . Напротив, нуль и полюс регулятора с отставанием по фазе должны размещаться в области A , чтобы повысить устойчивость системы.

На рис. 9.19 проиллюстрирован синтез регулятора с опережением по фазе. Нуль и полюс регулятора размещаются в окрестности 0 дБ, или единичного коэффициента усиления разомкнутой системы. Очень важно, что на запасы устойчивости замкнутой системы оказывают влияние как увеличение усиления, так и положительный сдвиг по фазе, вносимые регулятором. Поэтому к выбору нуля и полюса регулятора следует относиться более осторожно, нежели в случае коррекции с отставанием по фазе.

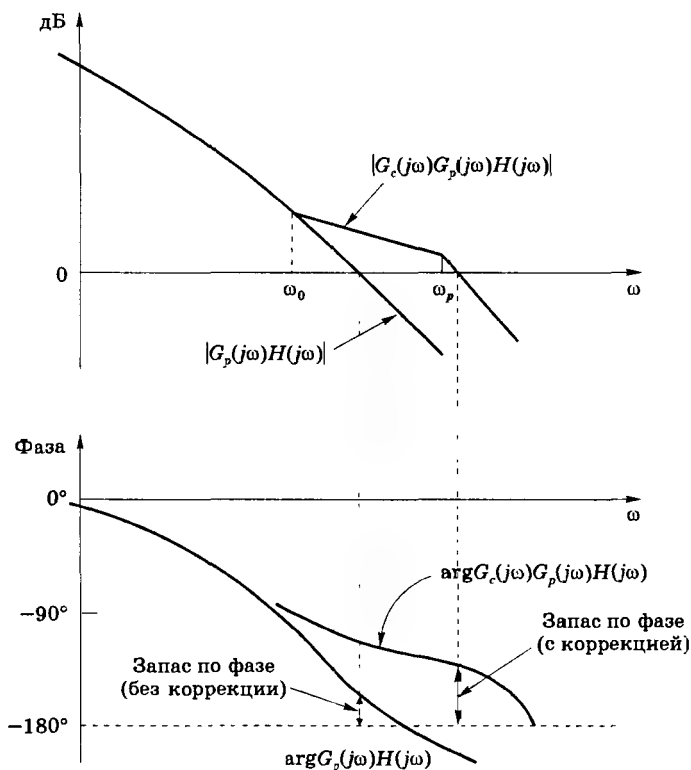
Поскольку на запас по фазе на рис. 9.19 влияют как амплитудная, так и фазовая частотные характеристики регулятора, то его синтез представляет собой метод проб и ошибок. Одна из возможных процедур состоит в следующем:

1. Выбрать нуль регулятора, расположенный вблизи от точки пересечения амплитудно-частотной характеристикой функции $G_p(j\omega)H(j\omega)$ уровня 0 дБ, как показано на рис. 9.19.
2. Отметить запас по фазе в нескорректированной системе. Затем по графику на рис. 9.17 выбрать отношение полюса к нулю таким, чтобы ему соответствовал угол θ_m , превышающий дополнительный положительный фазовый сдвиг, необходимый для получения требуемого запаса по фазе. Это связано с тем, что регулятор также увеличивает коэффициент передачи разомкнутой системы.

3. По данным пп. 1 и 2 вычислить значение полюса ω_p . Затем построить диаграмму Бode для скорректированной системы и проверить, соответствует ли запас по фазе требуемому значению. Если нет, то сдвинуть полюс в нужном направлении, чтобы привести запас по фазе к требуемому значению. Если смещение полюса не приводит к желаемому результату, то попытаться изменить нуль регулятора.

Существует много модификаций этой процедуры, но большинство, если не все из них, являются неудовлетворительными. В следующем разделе будет предложена аналитическая процедура синтеза.

Рис. 9.19
Синтез регулятора
с опережением по фазе



9.6. Аналитический метод синтеза регулятора

В предыдущем разделе была изложена процедура синтеза регулятора с опережением по фазе методом проб и ошибок. Хотя почти все процедуры синтеза реальных систем основаны на методе проб и ошибок (иногда называемом «подгонкой»), можно также попытаться предложить аналитическую процедуру синтеза [1, 2]. Она позволяет задать запас по фазе и определить требуемый коэффициент усиления регулятора, если его передаточная функция имеет первый порядок.

Рассмотрим систему (см. рис. 9.7), имеющую характеристическое уравнение

$$1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0, \quad (9-27)$$

в которой используется регулятор с передаточной функцией

$$G_c(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}. \quad (9-28)$$

Заметим, что эта передаточная функция имеет вид, отличный от выражения, с которым мы имели дело в предыдущих разделах, т.к. мы не обязательно должны требовать, чтобы у регулятора был единичный коэффициент усиления. Для регулятора вида (9-28) коэффициент усиления имеет значение a_0 .

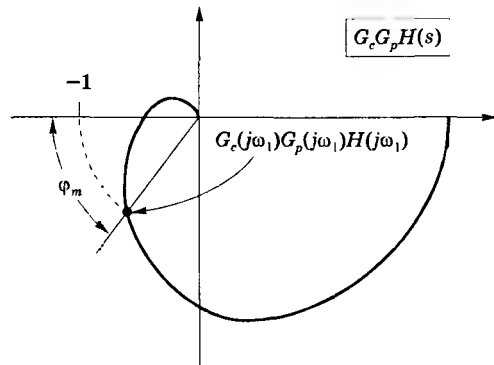
При получении необходимых уравнений предполагается, что диаграмма Найквиста скорректированной системы имеет вид, представленный на рис. 9.20. На этом рисунке требуемый запас по фазе реализован на частоте ω_1 . Соответственно,

$$G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}. \quad (9-29)$$

Если задан коэффициент усиления регулятора a_0 , то необходимо найти такие значения a_1 и b_1 , при которых удовлетворялось бы уравнение (9-29).

Рис. 9.20

Диаграмма Найквиста скорректированной системы



На основании (9-28) и (9-29) можно записать:

$$G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = \frac{a_0 + j\omega_1 a_1}{1 + j\omega_1 b_1} G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}. \quad (9-30)$$

Поскольку все сомножители в этом уравнении являются комплексными, то его можно представить в виде двух уравнений, приравняв, соответственно, вещественные и мнимые части слева и справа от знака равенства. В уравнении (9-30) мы имеем четыре неизвестных: коэффициенты передаточной функции регулятора a_0 , a_1 и b_1 и частоту ω_1 , на которой обеспечивается запас по фазе φ_m . Из уравнения (9-30) мы выразим a_1 и b_1 через a_0 и ω_1 . При этом удобно воспользоваться выражением для аргумента функции $G_c(j\omega_1)$:

$$\theta = \arg G_c(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1). \quad (9-31)$$

Решение уравнения (9-30) приведено в [3], здесь мы сразу запишем конечный результат:

$$a_1 = \frac{1 - a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| \cos \theta}{\omega_1 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| \sin \theta}; \quad b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}{\omega_1 \sin \theta}. \quad (9-32)$$

В данной процедуре синтеза для определения требуемого коэффициента усиления регулятора a_0 можно использовать ограничение на величину установившейся ошибки (см. табли-

цу 5.1). Кроме того, если задано время установления T_s , то воспользовавшись выражением (8-52), можно записать:

$$\omega_1 = \frac{8}{T_s \operatorname{tg} \varphi_m}. \quad (9-33)$$

Напомним, что это соотношение является точным только для типовой системы второго порядка. Для систем более высокого порядка оно может служить лишь приближением, причем иногда даже очень грубым.

В итоге можно сформулировать следующие основные этапы процедуры синтеза:

1. В качестве исходных данных для синтеза задать запас по фазе φ_m , коэффициент усиления регулятора a_0 и время установления переходной функции T_s .
2. По значениям T_s и φ_m , используя (9-33), вычислить частоту ω_1 , на которой имеет место запас по фазе.
3. С помощью (9-31) вычислить θ , т.е. фазовый сдвиг регулятора на частоте ω_1 .
4. Поскольку теперь все параметры в правой части уравнений (9-32) известны, вычислить коэффициенты a_1 и b_1 .

В результате синтеза определяются такие коэффициенты регулятора, при которых диаграмма Найквиста проходит через точку, обозначенную на рис. 9.20 как $G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)$. Если при этом система устойчива, то она будет обладать заданной точностью в установившемся режиме, заданным запасом по фазе и приблизительно заданным временем установления. Но пока ничто не может гарантировать, что система устойчива, т.к. при синтезе мы удовлетворили только уравнению (9-29). Поэтому после того как вычислены коэффициенты регулятора, необходимо построить диаграмму Боде (или диаграмму Найквиста), чтобы убедиться, что замкнутая система устойчива. Другой способ исследования устойчивости заключается в вычислении полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Мы предполагали, что требования, предъявляемые к конкретной системе управления при ее синтезе, могут быть преобразованы в единственное значение запаса по фазе φ_m , в единственный показатель точности в установившемся режиме (на основании которого вычисляется коэффициент a_0) и в единственное значение времени установления T_s . Если это предположение справедливо, то, тем не менее, процедура синтеза может дать неустойчивую систему. Тогда необходимо найти некоторый компромисс между значениями a_0 , φ_m и T_s , который обеспечил бы приемлемые показатели качества замкнутой системы.

Если требования к качеству системы не могут быть преобразованы в единственные значения параметров a_0 , φ_m и T_s , то обычно синтез регулятора не дает однозначного решения. В этом случае целесообразно получить несколько вариантов регулятора, удовлетворяющих требуемым ограничениям. После этого необходимо провести испытания системы с каждым из полученных регуляторов либо путем имитационного моделирования, либо с помощью натурного эксперимента. В результате можно будет выбрать регулятор, дающий наилучшие результаты. Но даже если и известны значения a_0 , φ_m и T_s , все равно имеется веская причина, по которой желательно рассмотреть несколько вариантов регулятора — суть ее в том, что синтез всегда проводится на основе модели системы, не точно отражающей ее реальные характеристики. В данном случае задача решается путем целенаправленного перебора значений a_0 , φ_m и T_s .

9.6.1. Необходимые условия опережения по фазе

Полученные выше уравнения (9-32) для определения параметров регулятора применимы как в случае коррекции с опережением по фазе, так и при коррекции с отставанием по фазе. Однако в каждом случае существуют свои собственные ограничения, которые приводятся ниже.

Для регулятора с опережением по фазе создаваемый им фазовый сдвиг должен быть положительным. Следовательно, из (9-31),

$$\theta = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) > 0^\circ,$$

или

$$\arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) < -180^\circ + \varphi_m. \quad (9-34)$$

Кроме того, поскольку коэффициент передачи такого регулятора на любой частоте $\omega > 0$ всегда превышает его коэффициент усиления на нулевой частоте, то $|G_c(j\omega)| > a_0$ и из (9-30) мы имеем:

$$|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| < \frac{1}{a_0}. \quad (9-35)$$

Дополнительное ограничение заключается в том, что регулятор должен быть устойчивым. Если при синтезе будет получен неустойчивый регулятор, то в условии Найквиста (см. раздел 8.4)

$$Z = N + P \quad (9-36)$$

число полюсов передаточной функции разомкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости, т.е. P , увеличится на единицу. Система теперь не будет устойчивой, т.к. $Z \neq 0$. Кроме того, если бы даже замкнутая система была устойчивой, неустойчивый регулятор является нежелательным, потому что может произойти некоторый отказ, в результате чего система окажется разомкнутой и на вход объекта будет поступать очень большой сигнал с выхода неустойчивого регулятора. Последнее чревато выходом системы из строя и травмами обслуживающего персонала. Поэтому коэффициент b_1 в передаточной функции регулятора должен быть положительным. Тогда, на основании (9-32),

$$\cos\theta > a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|. \quad (9-37)$$

В итоге для регулятора с опережением по фазе выбор частоты ω_1 , на которой обеспечивается запас по фазе, должен удовлетворять ограничениям (9-34), (9-35) и (9-37). Напомним, однако, что даже в этом случае замкнутая система может оказаться неустойчивой. Далее мы рассмотрим пример, иллюстрирующий процедуру синтеза, после чего сформулируем ограничения для регулятора с отставанием по фазе.

Пример 9.3

Требуется синтезировать регулятор с опережением по фазе для системы радиолокационного сопровождения из примеров 9.1 и 9.2. Регулятор должен обладать единичным коэффициентом усиления. Напомним, что

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Запас по фазе по-прежнему должен быть равен 50° ; дополнительное ограничение накладывается на время установления, которое не должно превышать 4 с. Заметим, что в примерах 9.1 и 9.2 время установления было более 10 с (см. рис. 9.15). Частотные характеристики разомкну-

той системы приведены в таблице 9.1. Согласно ограничению (9-34) имеем:

$$\arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) < -180^\circ + \varphi_m = -130^\circ.$$

Из таблицы 9.1 следует, что ω_1 должно быть больше, чем $0,5 \text{ с}^{-1}$. Из ограничения (9-35) вытекает условие $|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| < 1$ и, следовательно, ω_1 должно быть больше, чем приблизительно 1,15. Согласно ограничению (9-33) имеем:

$$\omega_1 > \frac{8}{T_s \operatorname{tg} \varphi_m} = \frac{8}{4 \operatorname{tg} 50^\circ} = 1,68 \text{ с}^{-1}.$$

Выберем $\omega_1 = 1,7 \text{ с}^{-1}$. Тогда

$$G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|_{\omega_1=1,7} = \frac{4}{j1,7(1+j1,7)(2+j1,7)} = \frac{4}{(1,7e^{j90^\circ})(1,972e^{j59,5^\circ})(2,625e^{j40,4^\circ})} = 0,454e^{-j189,9^\circ}.$$

Эти вычисления выполнены с помощью программы MATLAB:

```
Gp = tf([4], [1 3 2 0]);
Gpjw1 = evalfr(Gp, j*1.7);
mag = abs(Gpjw1), phase = angle(Gpjw1)*180/pi
```

Единичный коэффициент усиления регулятора задан для того, чтобы можно было сравнить результат с данными примера 9.2. Согласно (9-31),

$$\theta = \arg G_c(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = 59,9^\circ,$$

а из (9-32) имеем:

$$a_1 = \frac{1 - a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| \cos \theta}{\omega_1 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| \sin \theta} = \frac{1 - (1)(0,454)(0,502)}{(1,7)(0,454)(0,865)} = 1,155;$$

$$b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}{\omega_1 \sin \theta} = \frac{(0,502) - (1)(0,454)}{(1,7)(0,865)} = 0,0320.$$

Тогда передаточная функция регулятора принимает вид:

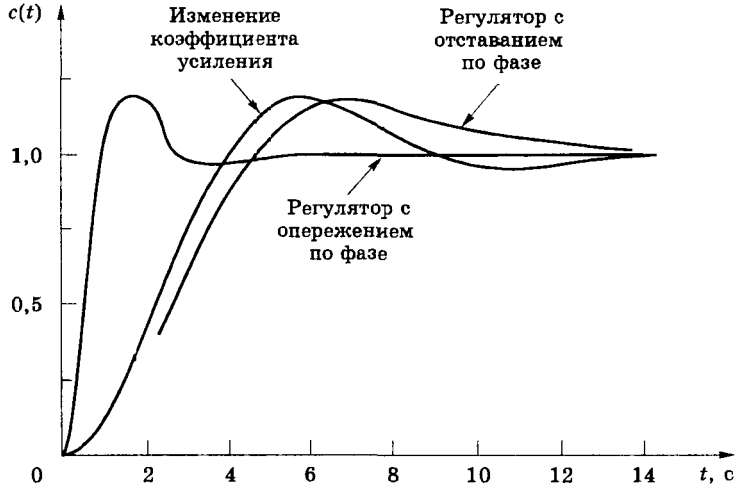
$$G_c(s) = \frac{1,155s + 1}{0,0320s + 1} = \frac{36,1s + 31,2}{s + 31,2}.$$

После вычисления частотных характеристик разомкнутой скорректированной системы было обнаружено, что запас по модулю равен 24 дБ. Переходная функция системы, полученная путем моделирования, изображена на рис. 9.21. Там же для сравнения приведены переходные функции систем из примера 9.1 (коррекция путем изменения коэффициента усиления) и из примера 9.2 (коррекция с отставанием по фазе). Обратите внимание на повышение быстродействия системы, в которой использован регулятор с опережением по фазе; это стало возможным за счет увеличения усиления на высоких частотах. Все вычисления, сопровождающие процедуру синтеза в данном примере, выполнены с помощью следующей программы MATLAB:

```
phim = 50; w1 = 1.7; a0 = 1; Gp = tf([4], [1 3 2 0]);
Gpjw1 = evalfr(Gp, j*w1);
Gpjw1mag = abs(Gpjw1);
theta = -pi + phim/57.296 - angle(Gpjw1);
a1 = (1 - a0*Gpjw1mag*cos(theta))/...
(w1*Gpjw1mag*sin(theta))
b1 = (cos(theta) - a0*Gpjw1mag)/(w1*sin(theta))
Gc = tf([a1/b1 a0/b1], [1 1/b1]);
T = minreal(Gc*Gp/(1 + Gc*Gp));
pole(T), pause, margin(Gc*Gp)
```

Данная программа позволяет также вычислить полюсы передаточной функции замкнутой системы.

Рис. 9.21
Переходные функции для рассмотренных примеров



Чтобы продолжить сравнение трех рассмотренных выше методов синтеза, на рис. 9.22 приведены частотные характеристики замкнутой системы для примеров 9.1, 9.2 и 9.3. Еще раз заметим, что в каждом из этих случаев запас по фазе составляет приблизительно 50° . Отметим также более широкую полосу пропускания системы, в которой использована коррекция с опережением по фазе, и связь между временными и частотными характеристиками трех систем. Эти характеристики приведены в таблице 9.3. Из таблицы еще раз видно, что произведение времени нарастания и полосы пропускания остается приблизительно постоянным. Для дальнейшего сравнения в таблице 9.4 приведены полюсы передаточной функции замкнутой системы (они же — нули характеристического уравнения). Обратите внимание на наличие у системы с коррекцией с отставанием по фазе очень малого полюса, что приводит к самому большому времени установления; это характерно для систем данного типа (влияние малого полюса обсуждается также в разделе 7.9).

Причина, приводящая к увеличению быстродействия системы из примера 9.3, очевидна из рис. 9.23, где изображен вид сигнала на входе объекта (на выходе регулятора). Хотя на вход системы подано единичное воздействие, вход объекта при $t = 0$ равен 36,1. Это значение легко проверить, представив передаточную функцию регулятора в виде

Рис. 9.22
Частотные характеристики замкнутой системы для рассмотренных примеров

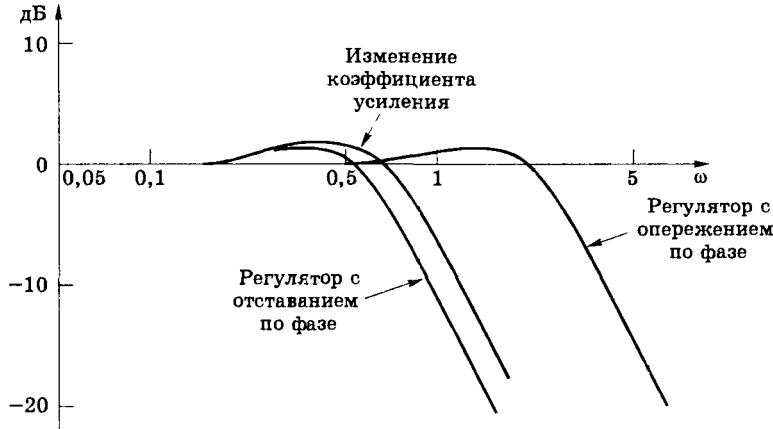
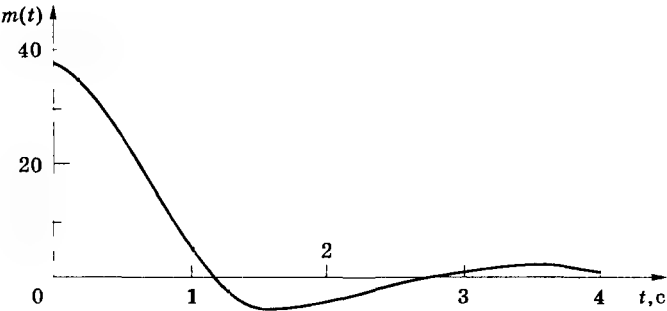


Рис. 9.23
Входной сигнал объекта
к примеру 9.3



$$G_c(s) = \frac{1,155s + 1}{0,0320s + 1} = 36,1 - \frac{35,1}{0,0320s + 1},$$

т.е. мы можем рассматривать регулятор как параллельное соединение усилителя с коэффициентом усиления 36,1 и инерционного звена первого порядка. Поскольку инерционное звено не может мгновенно реагировать на скачок, то единичное ступенчатое воздействие на входе регулятора вызовет на его выходе при $t = 0$ скачок величиной 36,1. Такой большой сигнал на входе объекта и обуславливает его быструю реакцию.

Таблица 9.3. Результаты примеров

Способ коррекции	Перерегулирование (%)	Время нарастания (с)	Полоса пропускания (с ⁻¹)	$T_r \times BW$	$T_s (c)$
Изменение коэффициента усиления	18	2,4	0,9	2,16	12,5
Отставание по фазе	19	2,8	0,7	1,96	36,0
Опережение по фазе	17	0,75	2,7	2,03	3,9

Таблица 9.4. Полюсы для примеров

Способ коррекции	Полюсы
Изменение коэффициента усиления	$-0,32 \pm j0,62; -2,358$
Отставание по фазе	$-0,34 \pm j0,49; -2,293; -0,0432$
Опережение по фазе	$-1,01 \pm j1,94; -0,830; -31,4$

В реальной системе объект может не выдержать столь большого входного воздействия, либо, что также вероятно, какой-либо элемент системы войдет в насыщение. Поэтому следует очень серьезно относиться к проблеме синтеза из-за указанных обстоятельств. Может потребоваться повторное решение задачи, чтобы ограничить соотношение нуля и полюса регулятора и тем самым установить предел его усилению на высоких частотах. По тем же практическим соображениям в нашем примере требуемый запас устойчивости по фазе в 50° может не быть достигнут без уменьшения коэффициента усиления регулятора. К тому же, если в системе существует возможность появления высокочастотного шума, то синтез регулятора становится еще более затруднительным. Все эти обстоятельства иллюстрируются следующим примером.

Пример 9.4

В примере 9.3 был обеспечен требуемый запас по фазе в 50° , но с помощью регулятора, обладающего очень большим усилением на высоких частотах. Если в уравнениях, сопровождающих синтез, попытаться проварьировать значение частоты ω_1 , то это не приведет к существенному улучшению. Поэтому, если нежелательно, чтобы регулятор имел большое усиление на высоких частотах, можно предложить три способа, как этого избежать:

1. Коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте можно сделать меньше единицы, но это ухудшит свойства системы в низкочастотной области (в частотности, снизит ее точность в установившемся режиме).
2. Можно задать меньшее значение запаса по фазе, но это приведет к увеличению перерегулирования в переходной функции.
3. Можно синтезировать регулятор более высокого порядка. Этот способ будет рассмотрен в следующем разделе.

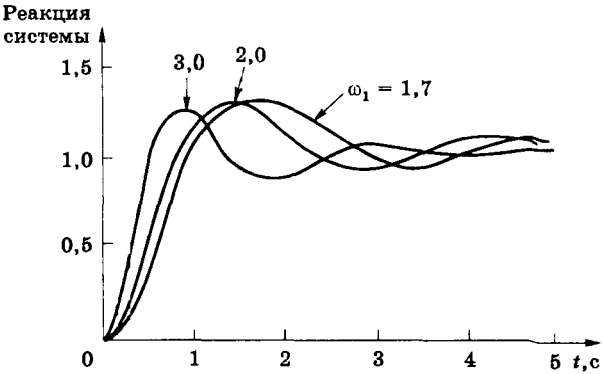
В данном примере мы воспользуемся вторым из упомянутых выше способов. Уменьшим требуемое значение запаса по фазе до 40° . При этом, разумеется, увеличивается время установления [см. соотношение (9-33)]. Выберем также три разных значения частоты, на которой будет обеспечен данный запас по фазе: $1,7\text{ с}^{-1}$, $2,0\text{ с}^{-1}$ и $3,0\text{ с}^{-1}$. Частоты $1,0\text{ с}^{-1}$ и $4,0\text{ с}^{-1}$ будут соответствовать неустойчивой системе. В таблице 9.5 приведены соответствующие передаточные функции регулятора, а также значения перерегулирования в переходной функции. Сами переходные функции изображены на рис. 9.24.

Таблица 9.5. Результаты к примеру 9.4

ω_1	Регулятор	Перерегулирование (%)	T_s (с)
1,7	$\frac{8,206s + 6,857}{s + 6,857}$	28	5,4
2,0	$\frac{12,73s + 8,223}{s + 8,223}$	27	5,8
3,0	$\frac{89,59s + 31,50}{s + 31,50}$	23	6,5

Заметим, что при $\omega_1 = 3,0\text{ с}^{-1}$ перерегулирование составляет 23%, но регулятор на высоких частотах имеет коэффициент усиления 89,59. При $\omega_1 = 1,7\text{ с}^{-1}$ перерегулирование равно 28%, а коэффициент усиления регулятора на высоких частотах имеет значение 8,206. Для реальной системы это вполне приемлемая цифра, но расплатой за это является более высокое перерегули-

Рис. 9.24
Переходные функции к примеру 9.4



рование и увеличение времени установления. Напомним, что в системе из примера 9.3 перерегулирование составляло 17% (см. табл. 9.3). Параметры регулятора и полюсы замкнутой системы в данном примере вычисляются с помощью программы MATLAB:

```
phim = 40; w1 = [1.7 2 3]; a0 = 1; Gp = tf([4], [1 3 2 0]);
for k = 1 : 3
    Gpjw1 = evalfr(Gp, j*w1(k));
    Gpjw1mag = abs(Gpjw1);
    theta = -pi + phim/57.296 - angle(Gpjw1);
    a1 = (1 - a0*Gpjw1mag*cos(theta))/...
        (w1(k)*Gpjw1mag*sin(theta))
    b1 = (cos(theta) - a0*Gpjw1mag)/(w1(k)*sin(theta))
    Gc = tf([a1/b1 a0/b1], [1 1/b1]), pause
    T = minreal(Gc*Gp)/(1 + Gc*Gp);
    pole(T), pause, [Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(Gc*Gp), pause
end
```

В примере 9.3 было показано, что при ступенчатом воздействии на входе регулятора этот скачок при $t = 0$ усиливается в 36,1 раза. Можно убедиться также, что это число равно произведению коэффициента усиления регулятора на отношение полюс/нуль его передаточной функции (см. задачу 9.23). Точно так же определяется усиление скачка и для регулятора с отставанием по фазе; однако поскольку для регулятора данного типа отношение полюса к нулю меньше единицы, то это особых проблем не вызывает.

9.6.2. Необходимые условия отставания по фазе

В данном разделе критериями синтеза регулятора с опережением по фазе служили уравнения (9-34), (9-35) и (9-37). Аналогичная процедура может быть использована для синтеза регулятора с отставанием по фазе. Регулятор данного типа создает отрицательный фазовый сдвиг θ ; поэтому критерий (9-34) приобретает вид:

$$\arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) > -180^\circ + \varphi_m \quad (9-38)$$

Кроме того, при всех $\omega > 0$ коэффициент усиления такого регулятора всегда меньше, чем соответствующее значение на нулевой частоте. Тогда из (9-30) имеем:

$$|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| > \frac{1}{a_0}. \quad (9-39)$$

Рассмотрим также выражение для коэффициента в знаменателе передаточной функции регулятора (9-32):

$$b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}{\omega_1 \sin \theta}.$$

Поскольку этот коэффициент должен быть положительным, а $\sin \theta < 0$, то

$$\cos \theta < a_0 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|. \quad (9-40)$$

Таким образом, (9-38), (9-39) и (9-40) представляют собой три ограничения, которые необходимо удовлетворить выбором частоты ω_1 .

9.6.3. Выводы

Подведем итоги всему сказанному выше. Регулятор с отставанием по фазе имеет следующие преимущества:

1. Характеристики системы в области низких частот лучше, чем в случае коррекции за счет уменьшения коэффициента усиления.
2. Запасы устойчивости сохраняются или даже улучшаются.
3. Полоса пропускания системы уменьшается, что является положительным фактором при наличии высокочастотного шума.

К недостаткам регулятора с отставанием по фазе относятся следующие:

1. Уменьшение полосы пропускания для некоторых систем является нежелательным.
2. Переходная функция системы имеет одну очень медленную составляющую.

Регулятор с опережением по фазе имеет следующие преимущества:

1. Улучшаются запасы устойчивости.
2. Улучшаются свойства системы в области высоких частот, в частности, сокращается время переходного процесса.
3. В некоторых системах применяется для обеспечения их устойчивости.

Недостатки регулятора с опережением по фазе таковы:

1. При наличии высокочастотного шума могут возникнуть определенные проблемы.
2. На выходе регулятора могут появляться большие сигналы, способные вывести систему из строя либо заставить ее работать в нелинейном режиме. Поскольку при синтезе все элементы предполагаются линейными, то влияние нелинейностей оценить невозможно.

Подчеркнем, что все процедуры синтеза, рассматриваемые в данной книге, являются чисто теоретическими. Мы предполагаем, что все передаточные функции определены точно и что требования, предъявляемые к системе при ее синтезе, заданы однозначно. На практике передаточная функция объекта может оказаться отличной от расчетной модели. Кроме того, иногда невозможно интерпретировать требования к системе заданными параметрами. В таких случаях могут потребоваться несколько итераций, предполагающих синтез регулятора и последующие натурные испытания реальной системы. Каждая итерация обычно позволяет более точно сформулировать ограничения, используемые на этапе синтеза. К тому же каждая итерация позволяет инженеру-проектировщику получить больше информации о характеристиках системы.

9.7. Коррекция с отставанием и опережением по фазе

В примере 9.3 был синтезирован регулятор с опережением по фазе и с единичным коэффициентом усиления, обеспечивающий в системе запас по фазе, равный 50° . Однако это привело к тому, что отношение полюс/нуль регулятора получилось равным 36,1. Как отмечалось ранее, усиление скачка на входе регулятора всегда равно произведению его коэффициента усиления на отношение полюса к нулю. При реализации регулятора такое большое усиление почти наверняка приведет к нелинейному режиму работы системы из-за больших

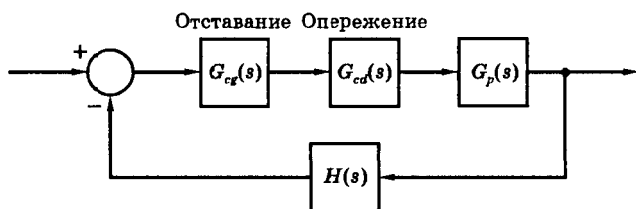
амплитуд сигнала, не считая проблем, связанных с наличием высокочастотного шума. Поскольку синтез проводится на основе линейной модели реальной системы, то истинное поведение системы не может быть установлено без дополнительного учета нелинейностей и натурных испытаний.

По причине такого большого коэффициента усиления на высоких частотах результат синтеза, по-видимому, следует признать неудовлетворительным. Предположим, однако, что от системы требуется высокое быстродействие. Тогда коррекция путем уменьшения коэффициента усиления (пример 9.1) и регулятор с отставанием по фазе (пример 9.2) также будут неприемлемыми.

Если с помощью процедуры, описанной в предыдущем разделе, попытаться получить несколько вариантов регулятора с опережением по фазе, то можно обнаружить, что желая сохранить запас по фазе в 50° , нельзя ощутимо снизить коэффициент усиления регулятора на высоких частотах (см. пример 9.4). В подобных случаях необходим некий компромисс. Коэффициент усиления на высоких частотах можно уменьшить либо снижая запас по фазе, либо уменьшая коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте. Если такие решения не приемлемы, то можно применить коррекцию в виде последовательного соединения устройств, одно из которых обладает отставанием по фазе, а другое — опережением по фазе, как показано на рис. 9.25. Такой регулятор мы будем называть *регулятором с отставанием и опережением по фазе*.

Рис. 9.25

Система с регулятором, обладающим отставанием и опережением по фазе



Передаточная функция такого регулятора имеет вид

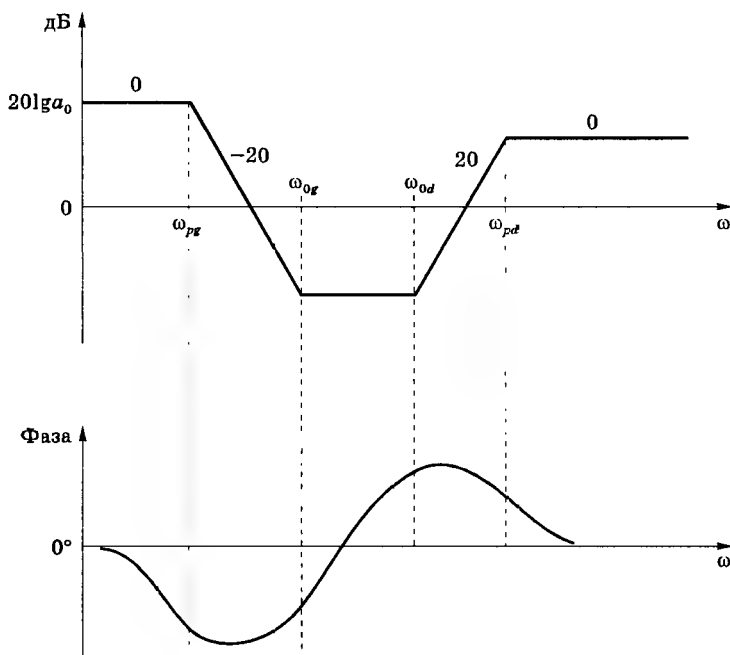
$$G_c(s) = G_{cg}(s)G_{cd}(s) = \frac{1 + s/\omega_{0g}}{1 + s/\omega_{pg}} \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}, \quad (9-41)$$

где $G_{cg}(s)$ соответствует регулятору с отставанием по фазе, а $G_{cd}(s)$ — регулятору с опережением по фазе, причем эти передаточные функции представлены в том виде, для которого были разработаны соответствующие методы синтеза. На рис. 9.26 изображена диаграмма Боде для типичного регулятора с отставанием и опережением по фазе. На этом рисунке показано, что коэффициент усиления регулятора на низких частотах больше соответствующего коэффициента на высоких частотах, хотя в каждом конкретном случае любой из этих коэффициентов может быть больше другого.

Процедура синтеза регуляторов данного типа состоит в следующем. Часть регулятора, отвечающая за отставание по фазе, синтезируется чтобы сохранить усиление в области низких частот и обеспечить требуемый запас по модулю. Тогда оставшаяся часть регулятора, отвечающая за опережение по фазе, синтезируется с целью обеспечить требуемый запас по фазе и полосу пропускания системы, гарантирующую желаемое быстродействие. Эта процедура иллюстрируется следующим примером.

Рис. 9.26

Диаграмма Бode
для регулятора
с отставанием
и опережением
по фазе

**Пример 9.5**

Еще раз обратимся к системе радиолокационного сопровождения из предыдущих примеров. Напомним, что разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Соответствующие частотные характеристики приведены в таблице 9.1. Сначала займемся синтезом части регулятора, обеспечивающей отставание по фазе. Значение запаса по фазе, которое будет обеспечено в результате решения этой задачи, зададим достаточно произвольно. Пусть это будет 20° . Тогда, в соответствии с шагом 2 процедуры синтеза, описанной в разделе 9.4, можно определить частоту, при которой фазовый сдвиг, соответствующий функции $G_p(j\omega)H(j\omega)$, будет равен $-180^\circ + 20^\circ + 5^\circ = -155^\circ$. По таблице 9.1 находим $\omega_1 = 0,9 \text{ с}^{-1}$, после чего определяем $\omega_{og} = 0,1\omega_1 = 0,09 \text{ с}^{-1}$. Разомкнутая система при частоте $\omega = 0,9$ обладает коэффициентом передачи 1,51. Тогда в соответствии с шагом 4 упомянутой процедуры,

$$\omega_{pg} = \frac{1}{1,51} \omega_{og} = 0,0596.$$

Таким образом получаем передаточную функцию регулятора:

$$G_{cg}(s) = \frac{1 + s/0,09}{1 + s/0,0596} = \frac{0,662s + 0,0596}{s + 0,0596}.$$

Теперь, чтобы синтезировать регулятор с опережением по фазе, нам придется использовать частотные характеристики разомкнутой системы с передаточной функцией

$$G_{ole}(s) = G_{cg}(s)G_p(s)H(s) = \frac{4(0,662s + 0,0596)}{s(s + 0,0596)(s + 1)(s + 2)}.$$

Заметим, что мы рассматриваем это выражение как эквивалентную передаточную функцию нескорректированной разомкнутой системы, на основании которой должен быть синтезирован регулятор с опережением по фазе, обеспечивающий запас по фазе в 50° .

Частоту, на которой определяется запас по фазе, обозначенную в (9-31) через ω_1 , выберем такой же, как и в примере 9.3, т.е. $\omega_1 = 1,7 \text{ с}^{-1}$. При этом значение частотной функции эквивалентной разомкнутой системы равно $G_{ole}(j1,7) = 0,3011e^{-j190,9^\circ}$. Тогда, в соответствии с (9-31), требуемый фазовый сдвиг, создаваемый регулятором, должен быть равен

$$\theta = -180^\circ + 50^\circ - (-190,9^\circ) = 60,9^\circ.$$

С помощью выражений (9-32) определяем:

$$a_1 = \frac{1 - a_0 |G_{ole}(j\omega_1)| \cos \theta}{\omega_1 |G_{ole}(j\omega_1)| \sin \theta} = \frac{1 - (1)(0,3011)(0,4863)}{(1,7)(0,3011)(0,8738)} = 1,908;$$

$$b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G_{ole}(j\omega_1)|}{\omega_1 \sin \theta} = \frac{0,4863 - (1)(0,3011)}{(1,7)(0,8738)} = 0,1247.$$

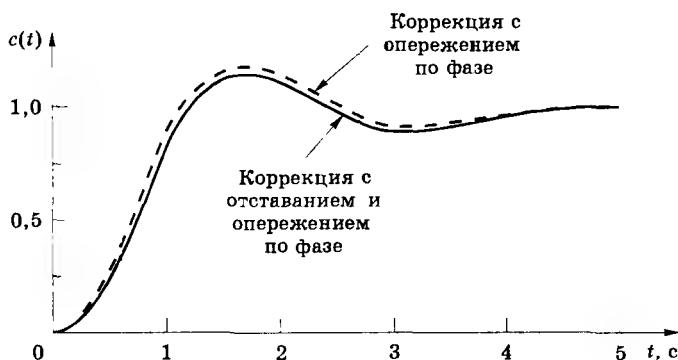
Тогда передаточная функция регулятора принимает вид:

$$G_{cd}(s) = \frac{1,908s + 1}{0,1247s + 1} = \frac{15,3s + 8,02}{s + 8,02}.$$

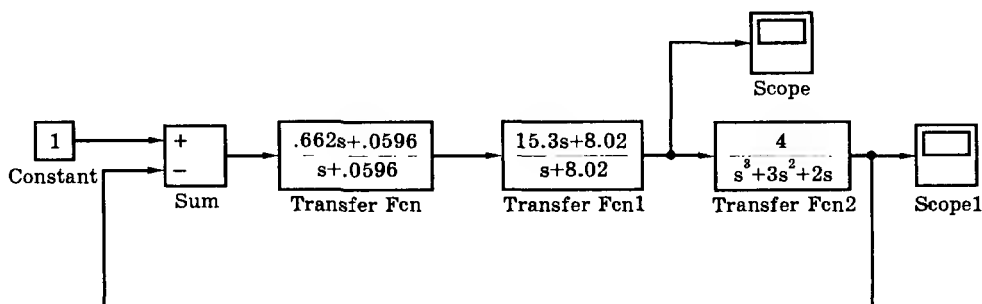
Результирующая передаточная функция регулятора с отставанием и опережением по фазе:

$$G_{cg}(s)G_{cd}(s) = \frac{0,662s + 0,0596}{s + 0,0596} \cdot \frac{15,3s + 8,02}{s + 8,02}.$$

Переходная функция системы с таким регулятором изображена на рис. 9.27 (а); там же для сравнения приведена переходная функция системы, в которой использован регулятор с опере-



(а)



(б)

Рис. 9.27. Переходные функции и схема моделирования в SIMULINK для системы из примера 9.5

жением по фазе (см. пример 9.3). Заметим, что мы очень мало проиграли в быстродействии системы. Однако теперь единичное ступенчатое воздействие на входе вызывает на выходе регулятора скачок величиной $(0.662)(15.3) = 10.1$, что гораздо меньше значения 36,1, полученного в случае регулятора с опережением по фазе. Но при этом входной сигнал объекта сохраняет большое значение в течение более длительного промежутка времени. Этим и объясняется практически одинаковое быстродействие систем с двумя разными типами регуляторов. Переходные функции для системы из этого примера были вычислены с помощью программы SIMULINK на основании схемы рис. 9.27 (б).

9.8. Синтез ПИД-регулятора

В предыдущем разделе был рассмотрен метод синтеза регулятора с отставанием и опережением по фазе. Этот регулятор имеет второй порядок и может быть представлен как последовательное соединение двух регуляторов, один из которых создает отставание по фазе, а другой — опережение по фазе. Как мы видели, регулятор с отставанием и опережением по фазе обладает большей гибкостью по сравнению с каждым из двух образующих его регуляторов, рассматриваемых по отдельности. В данном разделе мы также рассмотрим регулятор с отставанием и опережением по фазе, но представленный в несколько ином виде. Этот вид соответствует большинству промышленных ПИД-регуляторов, наиболее часто применяемых в замкнутых системах управления.

Для предлагаемого ПИД-регулятора еще раз воспроизведем его структурную схему (рис. 9.28). Уравнение для регулятора имеет следующий вид:

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (9-42)$$

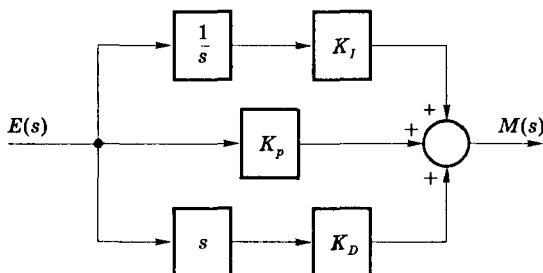
а его передаточная функция

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (9-43)$$

В процессе синтеза подлежат определению три параметра регулятора: коэффициент пропорциональности K_p , коэффициент интегральной составляющей K_I и коэффициент при производной K_D . Как было отмечено в главе 7, в частном случае какой-либо из этих коэффициентов может быть нулевым.

ПИД-регулятор, описываемый уравнениями (9-42) или (9-43), имеет второй порядок. Процедуру синтеза такого регулятора проще всего описать, рассматривая отдельные ветви его структурной схемы, полагая остальные каналы отсутствующими. Начнем с рассмотрения регулятора пропорционального действия.

Рис. 9.28
ПИД-регулятор



9.8.1. Регулятор пропорционального действия

Для данного регулятора отличен от нуля только коэффициент K_p . Поэтому передаточная функция регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p,$$

т.е. регулятор представлен обычным коэффициентом усиления. Этот случай был рассмотрен в разделе 9.3 и не нуждается в дальнейших комментариях.

9.8.2. ПИ-регулятор

Передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}. \quad (9-44)$$

Регулятор имеет полюс в начале координат и нуль на отрицательном направлении действительной оси. Если записать передаточную функцию в виде

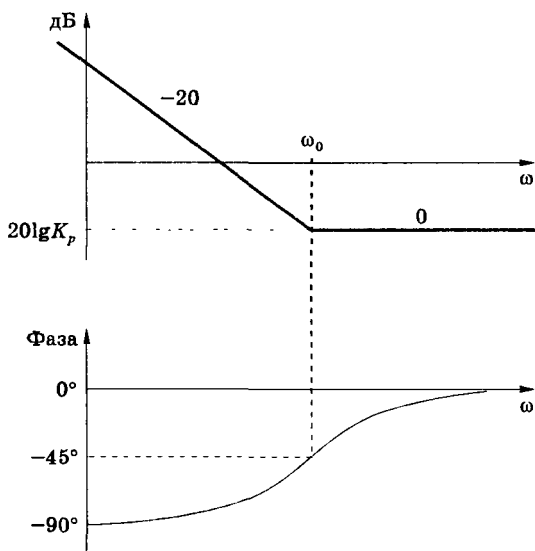
$$G_c(s) = \frac{K_I (1 + s/\omega_0)}{s}, \quad (9-45)$$

то очевидно, что ее нуль будет находиться в точке $s = -\omega_0 = -K_I/K_p$. Диаграмма Боде для такого ПИ-регулятора изображена на рис. 9.29, откуда следует, что он является регулятором с отставанием по фазе (см. раздел 9.4 и рис. 9.12). Характеристики, изображенные на рис. 9.29, мы получим, если на рис. 9.12 сохранить коэффициент усиления на высоких частотах и нуль регулятора неизменными и только полюс регулятора переместить в начало координат. Заметим, что на высоких частотах коэффициент усиления ПИ-регулятора равен K_p , или $20 \lg K_p$ (в децибелах). Обратите также внимание, что полюс регулятора в начале координат увеличивает тип системы на единицу (см. раздел 5.5).

Процедура синтеза, описанная в разделе 9.4, с небольшими модификациями может быть применена в отношении ПИ-регулятора. Это связано с тем, что коэффициент усиления

Рис. 9.29

Диаграмма Боде для ПИ-регулятора



ния ПИ-регулятора в области высоких частот определяется уравнением иного вида. В отношении ПИ-регулятора эта процедура сводится к следующему:

1. Коэффициент усиления системы с передаточной функцией $G_p(s)H(s)$ изменить в K_c раз, чтобы удовлетворить требованиям к системе в области низких частот.
2. Найти частоту ω_1 , при которой $\arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m + 5^\circ$.
3. Определить коэффициент K_p из выражения

$$K_p = \frac{1}{|K_c G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}. \quad (9-46)$$

4. Определить абсолютное значение нуля передаточной функции

$$\omega_0 = \frac{K_I}{K_p} = 0,1\omega_1 \quad (9-47)$$

и затем

$$K_I = 0,1\omega_1 K_p = \omega_0 K_p.$$

5. Передаточная функция регулятора тогда принимает вид:

$$G_c(s) = K_c(K_p + K_I s). \quad (9-48)$$

После этого реализации подлежит коэффициент пропорциональности $K_c K_p$ и коэффициент интегральной составляющей $K_c K_I$.

Данная процедура синтеза иллюстрируется следующим примером.

Пример 9.6

Во всех примерах данной главы фигурирует одна и та же система радиолокационного сопровождения. Для этой системы

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Частотные характеристики разомкнутой системы приведены в таблице 9.1. Как и в предыдущих примерах, зададимся запасом по фазе в 50° . Следовательно, в соответствии с шагом 2 процедуры синтеза, частота ω_1 — это та частота, при которой фазовый сдвиг разомкнутой системы приблизительно равен $-180^\circ + 50^\circ + 5^\circ = -125^\circ$. По таблице 9.1 находим $\omega_1 = 0,4$, следовательно, $|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 4,55$. Согласно шагу 3 процедуры синтеза, $K_p = 1/4,55 = 0,220$.

В соответствии с шагом 4, $\omega_0 = 0,1\omega_1 = 0,04$ и

$$K_I = K_p \omega_0 = (0,220)(0,04) = 0,0088.$$

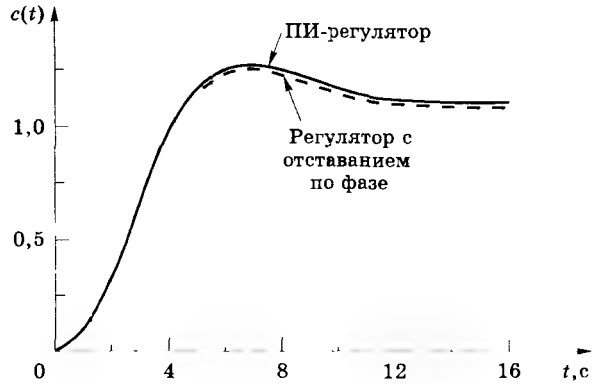
Тогда передаточная функция регулятора приобретает вид:

$$G_c(s) = 0,220 + \frac{0,0088}{s}.$$

Переходная функция системы с ПИ-регулятором изображена на рис. 9.30. На этом же рисунке приведена переходная функция системы, в которой использован регулятор с отставанием по фазе (см. пример 9.2). Заметим, что реакции системы очень близки; полюс ПИ-регулятора в начале координат добавляет небольшое запаздывание реакции. Время установления увеличивается с 36 с в случае использования регулятора с отставанием по фазе до 41 с, если применить ПИ-регулятор. Однако система с ПИ-регулятором относится к типу 2 и поэтому обладает лучшими характеристиками в области низких частот.

Рис. 9.30

Переходные функции
к примеру 9.6



9.8.3. ПД-регулятор

Передаточная функция ПД-регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p + K_D s, \quad (9-49)$$

что можно записать иначе:

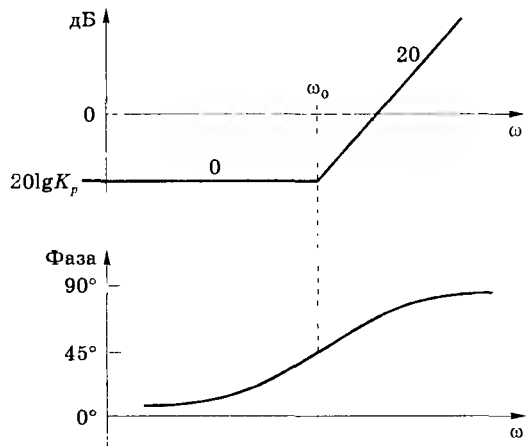
$$G_c(s) = K_F \left(1 + \frac{s}{\omega_0} \right), \quad (9-50)$$

где $\omega_0 = K_p/K_D$. Отсюда следует, что $G_c(s)$ имеет нуль $s = -\omega_0$ и полюс в бесконечности. На рис. 9.31 изображена диаграмма Бode для ПД-регулятора; заметим, что регулятор данного типа обладает опережением по фазе. В области низких частот коэффициент усиления регулятора равен K_p , а в области высоких частот он неограниченно возрастает. ПД-регулятор можно получить из регулятора с опережением по фазе на рис. 9.16, если сохранить неизменными коэффициент усиления в области низких частот и значение ω_0 , а полюс ω_p устремить к бесконечности.

Поскольку ПД-регулятор обладает опережением по фазе, то к его синтезу может быть применена процедура, описанная в разделе 9.5. Что же касается аналитического метода синтеза, то он будет рассмотрен в следующем разделе.

Рис. 9.31

Диаграмма Бode для ПД-регулятора



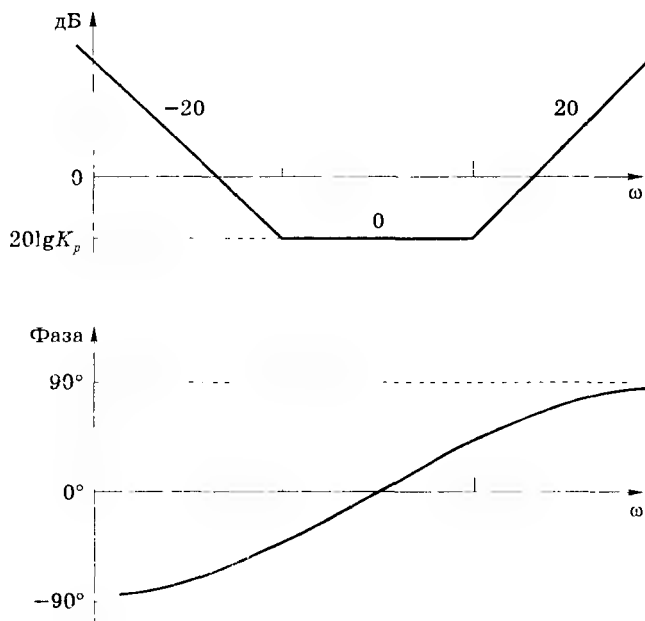
9.8.4. ПИД-регулятор

Передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (9-51)$$

Как было замечено ранее, интегральная составляющая соответствует отставанию по фазе, а дифференциальная составляющая — опережению по фазе. Следовательно, интегральная составляющая играет роль в области низких частот, а дифференциальная составляющая — в области высоких частот. Диаграмма Бode для ПИД-регулятора является комбинацией рис. 9.29 и рис. 9.31 и изображена на рис. 9.32.

Рис. 9.32
Диаграмма Бode
для ПИД-регулятора



Отметим некоторое сходство диаграммы Бode на рис. 9.32 и соответствующей диаграммы для регулятора с отставанием и опережением по фазе на рис. 9.26. Отсюда видно, что ПИД-регулятор является частным случаем регулятора с отставанием и опережением по фазе. Однако в случае ПИД-регулятора подлежат определению только три параметра. Неограниченно возрастающий коэффициент усиления дифференциатора может создать определенные проблемы, на что указывалось выше, поэтому обычно в канал производной добавляется полюс, чтобы ограничить усиление на высоких частотах. В этом случае передаточная функция регулятора принимает вид:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + s/\omega_{pd}}, \quad (9-52)$$

что приводит к необходимости в процессе синтеза определять четыре параметра.

ПИД-регулятор может быть синтезирован с помощью той же самой процедуры, которая была приведена в разделе 9.7 в отношении регулятора с отставанием и опережением по фазе. При этом в первую очередь рассчитывается пропорционально-интегральный канал, отвечающий за обеспечение требуемого запаса по модулю. В этом случае подлежат

определению коэффициенты K_p и K_I . После этого определяется параметр K_D , с помощью которого обеспечивается требуемый запас по фазе. В следующем разделе будет рассмотрена аналитическая процедура синтеза, с помощью которой можно обеспечить требуемый запас по фазе при любых модификациях ПИД-регулятора. Ниже приводятся примеры синтеза таких регуляторов.

9.9. Аналитический метод синтеза ПИД-регулятора

В разделе 9.6 был рассмотрен аналитический метод синтеза регуляторов с опережением по фазе и с отставанием по фазе. Тем же самым способом можно получить уравнения для синтеза ПИД-регулятора. Сначала предположим, что этот регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (9-53)$$

Как на рис. 9.20, будем считать, что диаграмма Найквиста для скорректированной системы при частоте ω_1 проходит через точку $e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}$, где φ_m — запас по фазе. Иначе говоря,

$$G_c(j\omega_1)G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}. \quad (9-54)$$

Если аргумент функции $G_c(j\omega_1)$ обозначить через θ , то согласно (9-54):

$$\theta = \arg G_c(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1). \quad (9-55)$$

Из (9-53) и (9-54) имеем:

$$K_p + j\left(K_D\omega_1 - \frac{K_I}{\omega_1}\right) = |G_c(j\omega_1)|(\cos\theta + j\sin\theta), \quad (9-56)$$

где

$$|G_c(j\omega_1)| = \frac{1}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}. \quad (9-57)$$

Полагая, что частота ω_1 известна (на самом же деле это не так), по выражениям (9-55) и (9-57) можно найти θ и $|G_c(j\omega_1)|$. Тогда в уравнении (9-56) приравняв действительные и мнимые части слева и справа от знака равенства, мы получим два уравнения с тремя неизвестными. Тогда можно задаться каким-либо одним из коэффициентов и решить уравнения относительно двух других. В действительности, поскольку частота ω_1 неизвестна, (9-56) распадается на два уравнения с четырьмя неизвестными. Но частоту ω_1 можно рассчитать по формуле (9-33), считая заданным время установления T_s . Кроме того, можно выбрать такой коэффициент K_I , который удовлетворял бы требованиям к системе в области низких частот, т.к. именно в этой области преобладают интегрирующие свойства ПИД-регулятора.

Приравняв в (9-56) действительные части, получим:

$$K_p = \frac{\cos\theta}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}, \quad (9-58)$$

а приравняв мнимые части:

$$K_D \omega_1 - \frac{K_I}{\omega_1} = \frac{\sin \theta}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}. \quad (9-59)$$

При известном ω_1 на основании (9-58) вычисляется коэффициент K_p . Затем, задав, к примеру, коэффициент K_I (исходя из требований к качеству системы в установившемся режиме), можно решить (9-59) относительно K_D .

Из рис. 9.32 видно, что фазовый сдвиг, создаваемый регулятором на частоте ω_1 , может быть как положительным, так и отрицательным, а модуль частотной функции, $|G_c(j\omega)|$, может быть как больше, так и меньше единицы. Поэтому единственным ограничением на выбор частоты ω_1 является то, что абсолютное значение угла θ в (9-55) должно быть меньше, чем 90° .

Уравнения (9-58) и (9-59) имеют общий характер и применимы к синтезу любых модификаций ПИД-регулятора. Например, при синтезе ПД-регулятора просто надо в (9-59) положить $K_I = 0$, в результате получим:

$$K_D = \frac{\sin \theta}{\omega_1 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}. \quad (9-60)$$

Ниже приводятся два примера на синтез ПИД-регулятора.

Пример 9.7

Здесь мы еще раз рассмотрим систему радиолокационного сопровождения, с которой имели дело в предыдущих примерах этой главы. В разомкнутом состоянии система имеет передаточную функцию

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Частотные характеристики системы приведены в таблице 9.1. Сначала синтезируем ПД-регулятор, который обеспечивал бы запас по фазе в 50° . Частоту ω_1 выберем равной $1,7 \text{ с}^{-1}$, т.к. именно это значение использовалось при синтезе регулятора с опережением по фазе в примере 9.3. Из этого примера позаимствуем данные $G_p(j1,7)H(j1,7) = 0,454e^{-j189,9^\circ}$. Согласно (9-55),

$$\theta = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = -180^\circ + 50^\circ + 189,9^\circ = 59,9^\circ.$$

С помощью (9-58) находим:

$$K_p = \frac{\cos \theta}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|} = \frac{\cos 59,9^\circ}{0,454} = 1,10.$$

Заметим, что K_p — это коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте, и этот коэффициент несколько больше единицы, что было принято в примере 9.3. При другом значении частоты ω_1 коэффициент K_p для ПД-регулятора также примет иное значение.

Коэффициент K_D вычислим с помощью (9-59) или (9-60):

$$K_D = \frac{\sin \theta}{\omega_1 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|} = \frac{\sin 59,9^\circ}{(1,7)(0,454)} = 1,12.$$

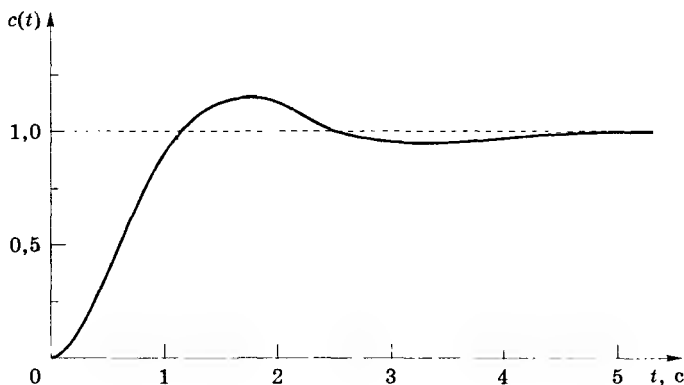
Итак, регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = 1,10 + 1,12s.$$

На рис. 9.33 изображена переходная функция скорректированной системы. Для сравнения на этом рисунке можно было бы привести переходную функцию системы, в которой использован регулятор с опережением по фазе (пример 9.3). Но эти две кривые настолько близки, что практически сливаются в одну. Для каждой системы время установления равно 3,9 с.

Рис. 9.33

Переходная функция
к примеру 9.7



Две системы с регуляторами разных типов (см. примеры 9.7 и 9.3) имеют практически одинаковые характеристики, определяющие связь между входом и выходом. Однако система с ПД-регулятором более чувствительна к высокочастотному шуму из-за неограниченного возрастания с частотой коэффициента усиления дифференциатора. Эта проблема более детально будет рассмотрена в следующем разделе.

Пример 9.8

Теперь мы для системы из примера 9.7 синтезируем ПИД-регулятор. Поскольку он относится к типу регуляторов с отставанием и опережением по фазе, то результаты мы будем сравнивать с данными примера 9.5. В примере 9.5 частота, на которой обеспечивается запас по фазе, была выбрана равной $1,7 \text{ с}^{-1}$; это же значение мы будем использовать и в данном случае. Из примера 9.7 известно, что

$$G_p(j1,7)H(j1,7) = 0,454e^{j189,9^\circ},$$

а из (9-55):

$$\theta = \arg G_c(j\omega_1) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G_p(j\omega_1)H(j\omega_1) = -180^\circ + 50^\circ + 189,9^\circ = 59,9^\circ.$$

Тогда согласно (9-58):

$$K_p = \frac{\cos \theta}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|} = \frac{\cos 59,9^\circ}{0,454} = 1,10.$$

Заметим, что этот коэффициент имеет то же значение, что и в случае ПД-регулятора из примера 9.7.

Далее воспользуемся уравнением (9-59):

$$K_D \omega_1 - \frac{K_I}{\omega_1} = \frac{\sin \theta}{|G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|}.$$

Правая часть этого уравнения определяется выбором φ_m и ω_1 . Стабилизирующее действие регулятора можно рассматривать распределенным между компонентами, отвечающими за интегрирование и за дифференцирование. Если увеличить K_I , то и K_D должно быть больше. Этому будет дано объяснение несколько позже.

Выберем K_I равным 0,005. Тогда из (9-59):

$$K_D = \frac{\sin \theta}{\omega_1 |G_p(j\omega_1)H(j\omega_1)|} + \frac{K_I}{\omega_1^2} = \frac{\sin 59,9^\circ}{(1,7)(0,454)} + \frac{0,005}{(1,7)^2} = 1,123.$$

Вычисление переходной функции показало, что она по сути совпадает с переходными функциями систем из примеров 9.7 (ПД-регулятор) и 9.5 (регулятор с отставанием и опережением по фазе). Время установления остается равным 3,9 с. Заметим также, что коэффициенты K_p и K_D ПИД-регулятора являются почти теми же, что и для ПД-регулятора из примера 9.7. В рассмот-

ренном примере задачу синтеза для трех различных значений K_I можно выполнить с помощью следующей программы MATLAB:

```
KI = [0.005 0.05 0.5]; phim = 50; w1 = 1.7;
Gp = tf([0 0 0 4], [1 3 2 0]);
for k = 1 : 3
    Gpjw1 = evalfr(Gp, j*w1);
    Gpjw1mag = abs(Gpjw1);
    theta = -pi + phim/57.296 - angle(Gpjw1);
    KP = cos(theta)/Gpjw1mag;
    KD = sin(theta)/(w1*Gpjw1mag) + KI(k)/w1^2;
    [KP, KI(k), KD]
    Gc = tf([0 KD KP KI(k)], [0 0 1 0]);
    T = minreal(Gc*Gp/(1 + Gc*Gp));
    pole(T), pause, [Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin...
    (Gc*Gp), pause
end
end
```

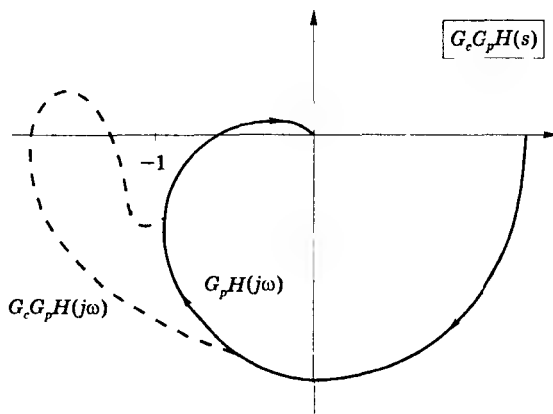
Эта программа в каждом из трех случаев вычисляет также полюсы замкнутой системы. Три системы могут быть смоделированы путем добавления инструкций из программы MATLAB примера 7.20.

Выше мы заметили, что коэффициенты K_D и K_I являются взаимозависимыми. Если увеличить K_I , то и K_D также надо будет увеличить. Увеличение K_I может иметь два последствия. Во-первых, в систему вносится большее отставание по фазе, поэтому переходная функция будет иметь большее перерегулирование и более длительное время установления. Во-вторых, система может стать условно устойчивой, как это показано на диаграмме Найквиста на рис. 9.34. На этом рисунке дополнительный отрицательный сдвиг по фазе на низких частотах может привести к тому, что диаграмма Найквиста дважды пересечет отрицательное направление действительной оси в точках, где модуль частотной функции скорректированной разомкнутой системы больше единицы. Заметим, однако, что система остается устойчивой, но она может потерять устойчивость как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента усиления. Системы такого типа называются *условно устойчивыми*.

Некоторые часто встречающиеся нелинейности эффективно уменьшают коэффициент усиления при больших входных сигналах. Одной из наиболее распространенных нелинейностей является нелинейность типа «ограничение», изображенная на рис. 9.35. При

Рис. 9.34

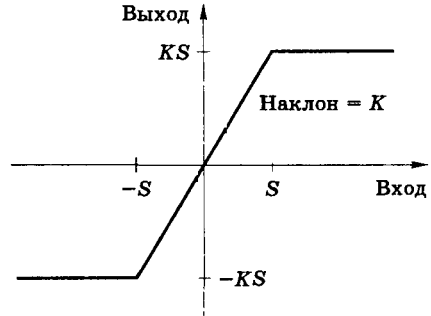
Диаграмма Найквиста
для условно устойчивой системы



малых входных сигналах такой элемент работает в линейном режиме и имеет коэффициент усиления K . Однако при больших входных сигналах элемент насыщается и его эквивалентный коэффициент усиления падает. Если такой элемент входит в состав условно устойчивой системы, то при больших сигналах система может стать неустойчивой. Эта проблема подробно будет рассмотрена в главе 14.

Рис. 9.35

Нелинейность типа «ограничение»



9.10. Реализация ПИД-регулятора

В этом разделе мы обсудим некоторые проблемы, возникающие при реализации ПИД-регуляторов. Мы предполагали, что ПИД-регулятор имеет структуру, изображенную на рис. 9.36. Однако в таком виде этот регулятор реализуется очень редко. Вместо этого используются отличные, но математически эквивалентные способы реализации. Рассмотрим некоторые из возможных структурных решений.

Характеристическое уравнение системы управления на рис. 9.36 имеет вид:

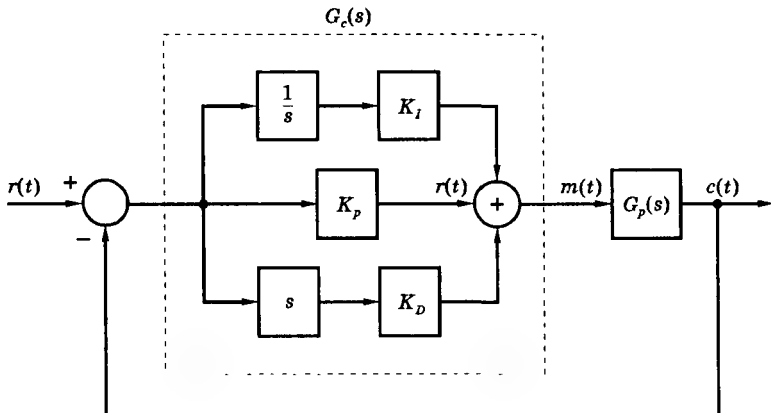
$$1 + G_c(s)G_p(s) = 0. \quad (9-61)$$

По этому уравнению можно определить устойчивость системы и характер протекания переходного процесса. Кроме того, на использовании этого уравнения были основаны все рассмотренные выше методы синтеза. Поэтому если мы реализуем ПИД-регулятор в виде иной структуры, характеристическое уравнение должно остаться неизменным.

Одна из проблем связана с реализацией канала производной. Коэффициент усиления этого канала увеличивается с ростом частоты. Реальный сигнал не может измениться скачком, но скорость изменения сигнала, который аппроксимирует ступенчатое воздействие, может быть очень большой. Производная математической ступенчатой функции рав-

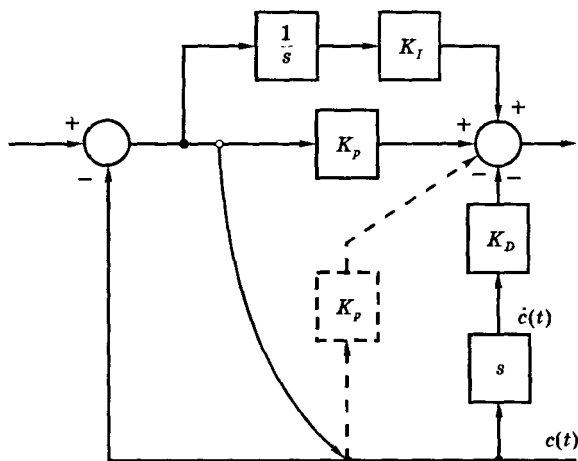
Рис. 9.36

Система с ПИД-регулятором



на бесконечности; производная же реальной ступенчатой функции может иметь очень большое значение. По этой причине для реализации ПИД-регулятора часто используется структура, изображенная на рис. 9.37. В этой структуре дифференцируется только сигнал обратной связи. Поскольку этот сигнал обычно изменяется медленно, то на вход объекта будет поступать не такое большое воздействие, как в системе на рис. 9.36. Заметим, однако, что характеристическое уравнение для обеих систем будет одним и тем же.

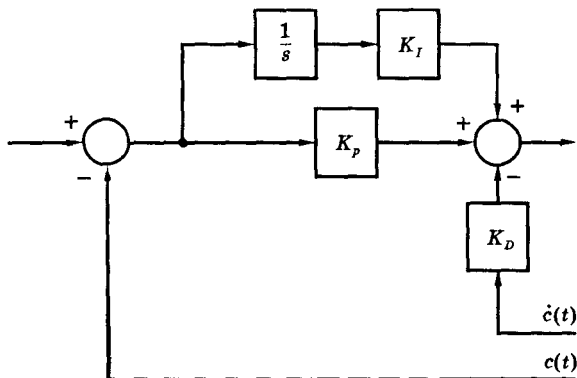
Рис. 9.37
ПИД-регулятор
с дифференцированием
выхода системы



Иногда применяется еще одна модификация структуры регулятора, изображенная на рис. 9.37 пунктиром. В этой структуре входной сигнал передается только по каналу интегрирования; поэтому на входе объекта исключена возможность появления сигналов с большими амплитудами. Объект не будет подвергнут «удару» ступенчатым изменением сигнала на входе системы.

Если кроме измерения выходного сигнала системы можно измерить и скорость его изменения, то регулятор лучше всего реализовать с помощью схемы на рис. 9.38. При данном способе реализации дифференцирование вообще отсутствует, хотя характеристическое уравнение системы остается тем же. Использование обратной связи по скорости аналогично действию ПД-регулятора, однако при этом не происходит дифференцирования сигнала и, следовательно, не возникают проблемы, связанные с наличием высокочастотного шума. Измерение выходного сигнала системы и его скорости сопровождается возникновением шума относительно низкого уровня, тогда как при дифференцировании

Рис. 9.38
ПИД-регулятор с обратной связью
по скорости



выходного сигнала (рис. 9.37) высокочастотный шум, присутствующий в нем, значительно усиливается. Следовательно, информация о скорости изменения выходного сигнала, полученная путем его *дифференцирования*, будет более «зашумленной», нежели та же информация, полученная путем *измерения*.

Если без дифференцирования выходного сигнала обойтись невозможно, то в канал производной часто включают низкочастотный фильтр. Как отмечалось в разделе 9.8, в этом случае передаточная функция регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + s/\omega_{pd}}. \quad (9-62)$$

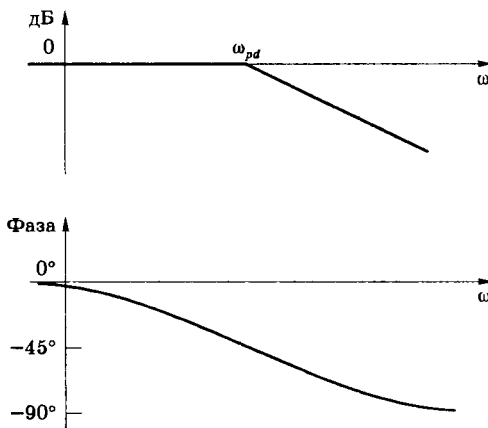
Фильтр, добавляемый в канал производной, имеет передаточную функцию

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_{pd}}. \quad (9-63)$$

Этот фильтр имеет диаграмму Боде, изображенную на рис. 9.39, и ослабляет высокочастотные сигналы, поступающие на его вход. Любой шум с частотой выше частоты излома амплитудной характеристики фильтра, ω_{pd} , будет эффективно ослабляться. Но частоту ω_{pd} нельзя выбирать достаточно низкой, т.к. уменьшение ω_{pd} приводит к снижению влияния канала производной на устойчивость системы и ухудшает ее быстродействие.

Рис. 9.39

Диаграмма Боде
для фильтра низких частот



Если в выражении (9-62) объединить члены, отвечающие за пропорциональную и дифференциальную составляющие, то передаточная функция примет вид:

$$G_c(s) = \frac{K_I}{s} + \frac{K_p + K_D s + K_p s/\omega_{pd}}{1 + s/\omega_{pd}} = \frac{K_I}{s} + \frac{K_p(1 + s/\omega_{0d})}{1 + s/\omega_{pd}}, \quad (9-64)$$

где

$$\omega_{0d} = \frac{K_p \omega_{pd}}{K_p + K_D \omega_{pd}}.$$

Отсюда видно, что во втором слагаемом нуль меньше полюса, поэтому ПД-часть регулятора обладает опережением по фазе. Следовательно, добавление в ПД-регулятор фильтра низких частот превращает его в регулятор с опережением по фазе, рассмотренный в разделе 9.5. Разумеется, верно и обратное: регулятор с опережением по фазе можно рассматривать как ПД-регулятор, дополненный фильтром низких частот.

9.11. Программные средства синтеза в частотной области

Синтез регуляторов для замкнутых систем управления может быть осуществлен с помощью коммерческих программных средств. Эти средства подразумевают использование различных критериев синтеза; в руководстве для пользователя, сопровождающем конкретный пакет прикладных программ, обязательно приводятся алгоритмы синтеза, применяемые в этом пакете. В данной книге описаны процедуры синтеза, основанные на использовании среды MATLAB.

При имитационном моделировании возникает проблема проверки достоверности полученных результатов; иными словами — как узнать, правильная ли модель системы введена в компьютер? В главе 7 был предложен метод увеличения коэффициента усиления системы, при котором запас по модулю сводится к нулю. В этом случае, если численное интегрирование является точным (по этому поводу см. раздел 6.3), то в системе должны возникнуть незатухающие колебания с известной частотой. Таким способом можно проверить одну точку на частотной характеристике системы. Конечно, чтобы проверить адекватность модели, подобный эксперимент можно проделать с реальной системой. Однако здесь следует быть чрезвычайно осторожным, т.к. если реальная система станет неустойчивой, это может привести к неприятным последствиям для обслуживающего персонала или для оборудования.

Поскольку программа позволяет вычислять частотные характеристики, то становится доступной полная информация о модели. Например, предположим, что при частоте $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ частотная функция замкнутой системы равна $T(j2) = 0,7e^{-j50^\circ}$. Тогда если при моделировании на вход системы подать сигнал $\cos 2t$, на выходе *в установившемся режиме* должен появиться сигнал $0,7\cos(2t - 50^\circ)$. Таким способом можно проверить несколько точек частотной характеристики и тем самым повысить достоверность моделирования.

Во многих случаях чтобы проверить, правильно ли получена передаточная функция, желательно экспериментально снять частотные характеристики реальной системы. Для этого надо использовать процедуру, описанную в предыдущем абзаце, т.е. подавать синусоидальные сигналы на вход системы и регистрировать ее реакцию в установившемся режиме. Отношение выходного фазора ко входному даст частотную функцию системы. После этого измеренные частотные характеристики сравниваются с вычисленными. Данная процедура, по-видимому, является лучшим методом проверки правильности получения передаточной функции и имитационного моделирования системы.

9.12. Заключение

В этой главе были рассмотрены методы синтеза регуляторов с использованием частотных характеристик. Мы разделили регуляторы на обладающие либо отставанием по фазе, либо опережением по фазе. Тогда ПИ-регулятор относится к типу регуляторов с отставанием по фазе, а ПД-регулятор — к типу регуляторов с опережением по фазе. Был рассмотрен фильтр второго порядка, состоящий из двух частей, одна из которых обладает отставанием по фазе, а другая — опережением по фазе. Соединенные последовательно, они образуют так называемый регулятор с отставанием и опережением по фазе. К этому же типу относится и ПИД-регулятор.

В представленных методах синтеза предполагалось, что в качестве критериев должны быть заданы коэффициент усиления разомкнутой системы и запас устойчивости по фазе (при адекватном запасе по модулю). Поскольку эти критерии позволяют синтезировать регуляторы различных модификаций, то из них предлагается выбирать тот, который удовлетворял бы и другим критериям, в числе которых полоса пропускания системы, эффективность компенсации возмущений, время установления и т.д. На практике обычно ищут некоторый компромисс между различными требованиями к системе управления.

Подводя итоги, перечислим еще раз некоторые преимущества коррекции с отставанием по фазе:

1. Свойства системы в области низких частот сохраняются или улучшаются.
2. Запасы устойчивости сохраняются или улучшаются.
3. Снижается чувствительность системы к высокочастотному шуму.
4. Введение ПИ- или ПИД-регулятора увеличивает тип системы на единицу.

К недостаткам коррекции с отставанием по фазе относятся следующие:

1. Меньшее быстродействие, более длительное время установления.
2. В некоторых системах не удастся обеспечить устойчивость (см. раздел 7.6).

К преимуществам коррекции с опережением по фазе относятся следующие:

1. Улучшаются запасы устойчивости.
2. Улучшаются свойства системы в области высоких частот (повышается быстродействие).
3. Принципиально необходима для некоторых систем.
4. В некоторых системах легко реализуется с помощью обратной связи по скорости.

Недостатки коррекции с опережением по фазе таковы:

1. При наличии высокочастотного шума могут возникать определенные проблемы.
2. На входе объекта могут появляться большие сигналы.

Как уже отмечалось ранее, во всех процедурах анализа и синтеза, рассматриваемых в данной книге, мы работаем с *моделями* реальных систем, а не с самими этими системами. Модель не всегда может точно описывать характеристики реальной системы. Даже если модель является точной, то это справедливо только для работы реальной системы в ограниченном диапазоне сигналов. Следовательно, всегда надо быть очень критичными и не переоценивать методы анализа и синтеза, представленные в данной книге и других источниках. Мы можем разработать модель, которая обеспечивала бы малое перерегулирование, скажем 10%, имела бы малую установившуюся ошибку и т.д. Однако все это не имеет смысла, пока не проведены натурные испытания реальной системы — полученные результаты могут быть совсем не так хороши, как при работе с моделью. В результате может потребоваться много итераций, связанных с синтезом системы и уточнением ее модели, прежде чем будет достигнуто хотя бы сходство между поведением модели и реальной физической системы. Здесь еще раз необходимо подчеркнуть, что все аналитические операции выполняются над *моделью* системы; основная часть деятельности инженеров по управлению состоит в применении результатов анализа и синтеза к конкретной физической системе (см. рис. 1.4).

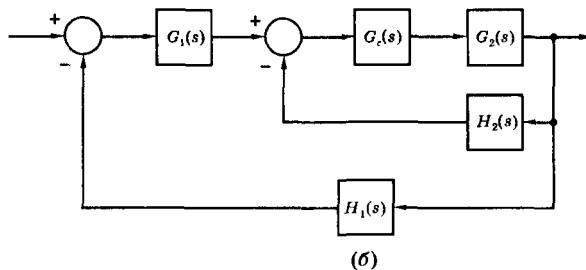
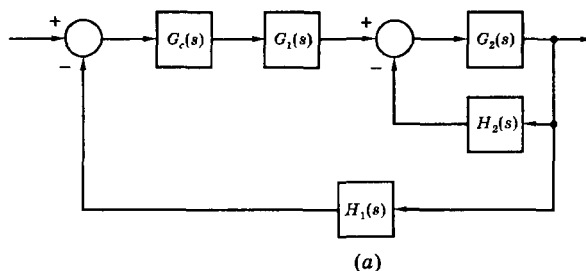
Литература

1. W.R.Wakeland. «Bode Compensator Design», *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-21 (October 1976): 771.
2. J.R.Mitchell. «Comments on Bode Compensator Design», *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-22 (October 1977): 869.
3. C.L.Phillips and R.D.Harbor, *Feedback Control Systems*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.

Задачи

- 9.1. Предположим, что к системам, изображенным на рис. 9.1 (3) должен быть применен метод синтеза на основе частотных характеристик. Характеристическое уравнение каждой системы имеет вид $1 + G_c(s) G_{eq}(s) = 0$, а синтез регулятора предполагает использование частотной функции $G_{eq}(j\omega)$. Для каждой из систем определите передаточную функцию $G_{eq}(s)$, на основании которой должна быть построена диаграмма Боде, являющаяся основой для синтеза регулятора.

Рис. 9.1 (3)



- 9.2. В системе, изображенной на рис. 9.2 (3), объект имеет передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}.$$

Частотные характеристики для $G_p(j\omega)$ приведены в табл. 9.2 (3). Предполагается, что передаточная функция датчика $H_k = 1,0$.

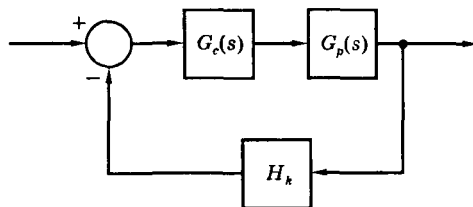


Рис. 9.2 (3)

Таблица 9.2 (3). Частотные характеристики к задаче 9.2

ω	Амплитуда	дБ	Фаза
0,0100	4,99968	13,97884	-0,97401
0,0200	4,99871	13,97716	-1,94788
0,0300	4,99710	13,97436	-2,92150
0,0400	4,99485	13,97044	-3,89473
0,0500	4,99195	13,96541	-4,86744
0,0600	4,98842	13,95926	-5,83951
0,0700	4,98425	13,95200	-6,81080
0,0800	4,97946	13,94364	-7,78119
0,0900	4,97403	13,94317	-8,75055
0,1000	4,96799	13,92361	-9,71876
0,2000	4,87467	13,75891	-19,31114
0,3000	4,72764	13,49290	-28,66364
0,4000	4,53773	13,13678	-37,68527
0,5000	4,31708	12,70380	-46,31189
0,6000	4,07739	12,34414	-54,50578
0,7000	3,82885	11,66138	-62,25169
0,8000	3,57956	11,07660	-69,55151
0,9000	3,33553	10,46328	-76,41895
1,0000	3,10087	9,82967	-82,87499
2,0000	1,46805	3,33482	-130,23640
3,0000	0,75207	-2,47482	-158,83880
4,0000	0,42349	-7,46323	-178,05850
5,0000	0,25751	-11,78402	-191,88870
6,0000	0,16641	-15,57652	-202,29720
7,0000	0,11291	-18,94538	-210,38680
8,0000	0,07972	-21,96873	-216,83340
9,0000	0,05817	-24,70599	-222,07640
10,0000	0,04364	-27,20325	-226,41440

- (а) Определите приблизительные значения запасов устойчивости по модулю и по фазе для нескорректированной системы.
- (б) Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе и единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте, который обеспечивал бы запас по фазе приблизительно 45° .
- (в) С помощью MATLAB определите для синтезированной системы:
- 1) запасы устойчивости по модулю и по фазе;
 - 2) полюсы замкнутой системы.
- (г) Определите постоянную времени системы.
- (д) Чтобы пронаблюдать влияние большой постоянной времени, найденной в п. (г), постройте переходную функцию системы. Обратите внимание на очень медленное приближение выходной переменной системы к ее установившемуся значению.

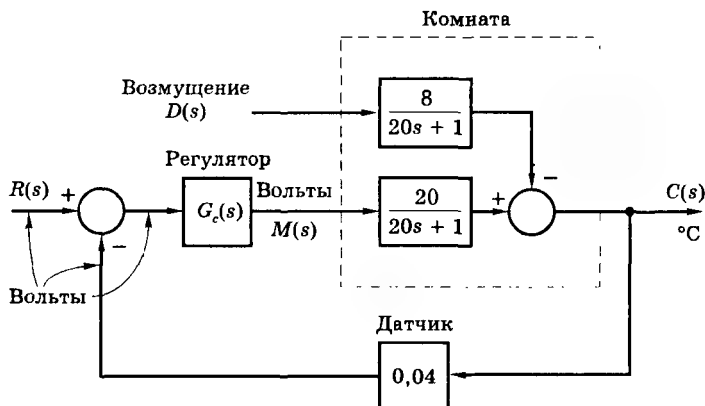
9.3. В системе на рис. 9.2 (3) передаточная функция

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

и $H_k = 0,25$.

- Требуется синтезировать регулятор на основании данных, приведенных в табл. 9.1. Как надо изменить эти данные, чтобы выполнить поставленную задачу?
 - С помощью аналитической процедуры синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, обладающий единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 50° .
 - Проделайте п. (б) для случая, когда синтезируется регулятор с опережением по фазе, дополнив условия задачи ограничением на время установления: $T_s < 4$ с.
 - С помощью MATLAB определите запасы устойчивости по модулю и по фазе для систем из пп. (б) и (в).
 - Для системы из п. (б) определите величину входного сигнала, необходимую для того, чтобы установившееся значение выходной переменной было равно 10.
 - Промоделируйте системы из пп. (б) и (в) при входном воздействии, найденном в п. (д), и постройте графики изменения выходной переменной. Для каждой из систем определите время нарастания, максимальное относительное перерегулирование и время установления.
- 9.4. Рассмотрите систему регулирования температуры в большом помещении, изображенную на рис. 9.4 (3). Эта система была ранее рассмотрена в задаче 6.12.
- Найдите величину входного напряжения, необходимую для задания требуемого значения выходной переменной, равного 50°C .
 - Предположим, что регулятор в системе на рис. 9.4 (3) имеет передаточную функцию $G_c(s) = K$. Найдите значение K , при котором установившаяся ошибка, соответствующая входному сигналу из п. (а), не превышала бы 1°C .
 - Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе и коэффициентом усиления на нулевой частоте, равным 61,25, который обеспечивал бы запас по фазе в 130° .
 - С помощью MATLAB определите запасы устойчивости по модулю и по фазе для систем из пп. (б) и (в).
 - Замкнутая система из п. (в) имеет второй порядок. С помощью MATLAB определите две постоянных времени данной системы. Какие физические факторы обуславливают такие большие значения этих постоянных времени?
 - С помощью SIMULINK проверьте значения постоянных времени из п. (д).

Рис. 9.4 (3)



9.5. На рис. 9.5 (3) изображена упрощенная структурная схема системы управления скоростью автомобиля. Эта система была ранее рассмотрена в задаче 3.11. Объект имеет передаточную функцию $G_p(s) = V(s)/M(s)$, а его частотные характеристики приведены в табл. 9.5 (3). Предположите, что датчик имеет коэффициент усиления $H_k = 1$, а не 0,03, как показано на рисунке.

- Проверьте какие-либо две точки частотных характеристик из таблицы 9.5 (3).
- По таблице 9.5 (3) определите приблизительные значения запасов по модулю и по фазе для нескорректированной системы.
- Синтезируйте П-регулятор $[G_c(s) = K]$, обеспечивающий запас по фазе приблизительно в 45° .
- Определите запас по модулю в скорректированной системе, используя данные таблицы 9.5 (3).
- С помощью SIMULINK определите время нарастания и максимальное относительное перерегулирование при единичном ступенчатом входном воздействии.

Таблица 9.5 (3) Частотные характеристики к задаче 9.5

ω	Модуль	дБ	Фаза
0,1000	31,76833	30,04002	-22,41142
0,2000	28,02729	28,95162	-42,27622
0,3000	23,73049	27,50614	-58,68931
0,4000	19,81204	25,93858	-71,99866
0,5000	16,53682	24,36904	-82,87763
0,6000	13,88012	22,84786	-91,91159
0,7000	11,73955	21,39303	-99,53091
0,8000	10,01028	20,00893	-106,04200
0,9000	8,60446	18,69448	-111,66600
1,0000	7,45289	17,44649	-116,56680
2,0000	2,45048	7,78501	-143,97360
3,0000	1,16393	1,31858	-155,22550
4,0000	0,67132	-3,46146	-161,20060
5,0000	0,43481	-7,23411	-164,87640
6,0000	0,30394	-10,34414	-167,35820
7,0000	0,22420	-12,98722	-169,14390
8,0000	0,17210	-15,28419	-170,48930
9,0000	0,13623	-17,31466	-171,53890
10,0000	0,11049	-19,13376	-172,38040
20,0000	0,02774	-31,13897	-176,18280
30,0000	0,01234	-38,17593	-177,45430

9.6. Рассмотрите еще раз систему из задачи 9.5. Пусть $H_k = 1$, а не 0,03, как показано на схеме.

- Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, имеющий единичный коэффициент усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе приблизительно в 45° .
- С помощью MATLAB проверьте значение запаса по фазе в скорректированной системе.
- С помощью рис. 8.50 определите приблизительное значение максимального относительного перерегулирования.

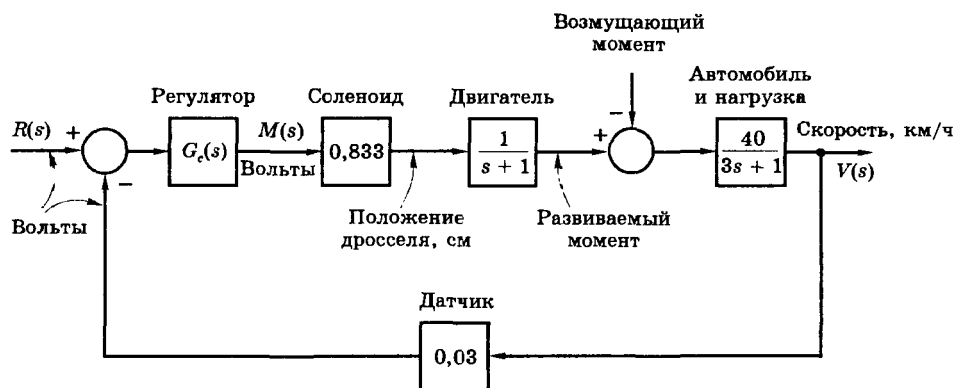


Рис. 9.5 (3)

- (г) С помощью SIMULINK определите время нарастания и максимальное относительное перерегулирование при единичном ступенчатом входном воздействии.
- 9.7. (а) Повторите задачу 9.6 для случая, когда синтезу подлежит регулятор с опережением по фазе.
 (б) Сравните значения времени нарастания и максимального относительного перерегулирования для систем из задач 9.5, 9.6 и 9.7.
- 9.8. На рис. 9.8 (3) изображена структурная схема следящей системы, предназначенной для перемещения пера плоттера по одной координате. На схеме θ_r — это сигнал, поступающий от цифрового компьютера, а θ_p — положение вала сервопривода, определяющее, в свою очередь, положение пера плоттера. Эта система была рассмотрена в задаче 6.13. В данной задаче предполагается использовать регулятор с опережением по фазе вместо изображенной на схеме обратной связи по скорости; следовательно, $K_v = 0$, а K_d заменяется на $G_c(s)$.
- (а) С помощью MATLAB вычислите частотные характеристики разомкнутой системы.
 (б) Вручную проверьте по крайней мере одну точку частотных характеристик из п. (а).
 (в) Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, имеющий коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 0,5, и обеспечивающий запас по фазе в 40° и время установления $T_s < 4$ с.
 (г) С помощью MATLAB проверьте значение запаса по фазе.
 (д) С помощью рис. 8.50 предскажите ожидаемое значение максимального относительного перерегулирования на переходной характеристике системы.
 (е) С помощью SIMULINK определите действительные значения перерегулирования и времени установления.

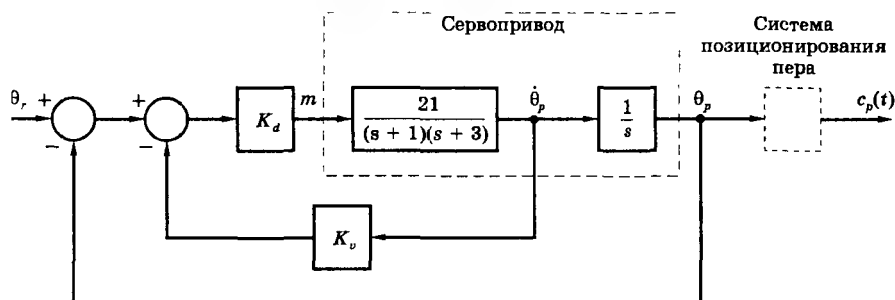


Рис. 9.8 (3)

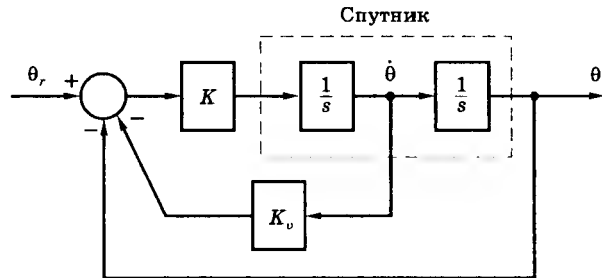
9.9. Для системы управления положением пера плоттера из задачи 9.8 коррекция по скорости эквивалентна действию ПД-регулятора.

- На рис. 9.8 (3) $K_v = 0$ и K_d заменяется ПД-регулятором. Синтезируйте ПД-регулятор, обеспечивающий в системе запас по фазе в 40° и время установления $T_s < 3,5$ с.
- ПД-регулятор должен быть реализован с помощью указанных на рис. 9.8 (3) коэффициентов K_d и K_v . Используя результаты п. (а), найдите значения K_d и K_v , обеспечивающие запас по фазе в 40° .
- С помощью MATLAB проверьте значение запаса по фазе для системы из п. (б).

9.10. Рассмотрите систему управления положением жесткого спутника, изображенную на рис. 9.10 (3). Эта система ранее анализировалась в примере 2.13 раздела 2.6.

- Может ли эта система быть устойчивой при отсутствии обратной связи по скорости ($K_v = 0$) и замене коэффициента K на регулятор с отставанием по фазе? Обоснуйте ваш ответ.
- Пусть $K_v = 0$, а коэффициент K заменен регулятором с опережением по фазе, имеющим единичный коэффициент усиления. Проведите синтез такого регулятора, обеспечивающего запас по фазе в 50° и время установления $T_s < 4$ с.
- Определите запас по модулю в скорректированной системе.
- Повторите п. (б) для случая, когда используется ПД-регулятор. Преобразуйте параметры ПД-регулятора в коэффициенты K и K_v , если используется обратная связь по скорости, как показано на рис. 9.10 (3).
- По рис. 8.50 предскажите ожидаемое значение максимального относительного перерегулирования.
- Путем моделирования определите перерегулирование и время установления для систем из пп. (б) и (г).

Рис. 9.10 (3)



9.11. На рис. 9.11 (3) изображена структурная схема следящей системы управления одним из звеньев руки робота. Эта система была рассмотрена в разделе 2.12.

- Покажите, что объект имеет передаточную функцию

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0,15}{s(s+1)(s+5)}.$$

- Синтезируйте регулятор с опережением по фазе (вместо изображенного на схеме ПД-регулятора), имеющий единичный коэффициент усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 50° и время установления $T_s < 4$ с. Учтите, что при вычислении частотных характеристик разомкнутой системы, необходимых для решения задачи, коэффициент 30 должен быть добавлен в передаточную функцию объекта. Частоту, на которой обеспечивается запас по фазе, выберите равной $\omega_1 = 2$ рад/с.
- Проведите синтез ПД-регулятора для условий п. (б).
- В передаточную функцию ПД-регулятора, полученного в п. (в), добавьте полюс, чтобы ограничить усиление на высоких частотах. Полюс выберите так, чтобы нуль регулятора и

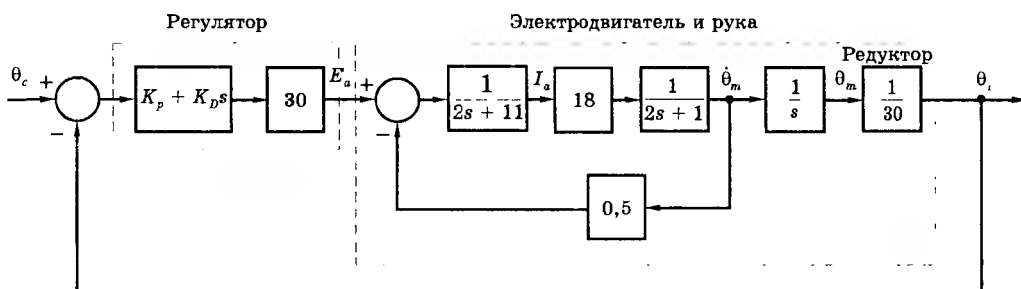


Рис. 9.11 (3)

его усиление на низких частотах не изменилось, а отношение коэффициентов усиления регулятора на высоких и низких частотах было не больше 10. Запишите передаточную функцию регулятора.

- (д) Определите запас по фазе в системе из п. (г). Оцените влияние дополнительного полюса.
- (е) С помощью SIMULINK определите время нарастания и максимальное относительное перерегулирование для систем из пп. (б) и (г).

9.12. На рис. 9.12 (3) изображена структурная схема замкнутой системы управления положением стержней ядерного реактора. Положение стержней в активной зоне определяет желаемый уровень мощности. Коэффициент 4,4 учитывает преобразование положения стержней в уровень нейтронного потока. Датчик нейтронного потока имеет единичный коэффициент усиления и постоянную времени 0,1 с.

- (а) Определите приблизительные значения запасов по модулю и по фазе нескорректированной системы, если усилитель мощности имеет $K = 1$.
- (б) Предположим, что исходя из требований к точности системы коэффициент усиления усилителя мощности должен быть равен 20. Для этого случая синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, обладающий единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 50° .
- (в) Используя рис. 8.50, оцените величину перерегулирования (в процентах) в переходной характеристике системы.
- (г) Повторите п. (б) для случая, когда синтезируется ПИ-регулятор, обеспечивающий заданный запас по фазе на той же частоте, что и в системе из п. (б).
- (д) С помощью MATLAB проверьте значения запаса по фазе в системах из пп. (б) и (г).
- (е) С помощью SIMULINK определите действительные значения перерегулирования в переходных характеристиках систем из пп. (б) и (г).



Рис. 9.12 (3)

9.13. В задаче 9.3 был синтезирован регулятор с отставанием по фазе, обеспечивающий заданное значение запаса по фазе на частоте $\omega_1 = 0,3$ рад/с, а также регулятор с опережением по фазе, обеспечивающий то же значение запаса по фазе на частоте $\omega_1 = 2$ рад/с. Для этих двух случаев передаточная функция регулятора имеет вид:

$$G_{ca}(s) = \frac{27,5s + 10,9}{s + 10,9}; \quad G_{cb}(s) = \frac{0,240s + 0,0258}{s + 0,0258}.$$

- (а) Какая из передаточных функций соответствует регулятору с отставанием по фазе? Почему?
- (б) Какая из синтезированных систем обладает большим быстродействием? Почему?
- (в) Промоделируйте две синтезированные системы в случае ступенчатого входного воздействия. Для каждой системы установите шаг численного интегрирования, используемый при моделировании. Для какой системы этот шаг должен быть меньше? Как это связано с ответом на вопрос п. (б)?
- 9.14. Прodelайте задачу 9.2 для случая, когда должен быть синтезирован ПИ-регулятор.
- 9.15. (а) Для системы из задачи 9.2 синтезируйте ПИД-регулятор, обеспечивающий запас по фазе в 45° . Примите значение $K_I = 0,04$.
- (б) С помощью MATLAB проверьте значение запаса по фазе.
- (в) Путем моделирования определите приблизительные значения времени нарастания и относительного перерегулирования.
- 9.16. (а) Для системы из задачи 9.3 синтезируйте ПИД-регулятор, обеспечивающий запас по фазе в 50° . Примите значение $K_I = 0,04$.
- (б) С помощью MATLAB проверьте значение запаса по фазе.
- (в) Путем моделирования определите приблизительные значения времени нарастания и относительного перерегулирования.
- (г) Чтобы пронаблюдать эффекты, связанные с наличием в регуляторе канала интегрирования, проделайте пп. (а) и (в) для случаев, когда K_I в два раза меньше и в два раза больше его значения, принятого в п. (а).
- (д) Видно, что чем меньше K_I , тем меньше и время устояния. Почему же тогда в регулятор вводится канал интегрирования?

9.17. Регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = K_{dc}(1 + s/\omega_0)/(1 + s/\omega_p),$$

где K_{dc} — коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте. Докажите, что при единичном ступенчатом воздействии на входе регулятора выходной сигнал будет иметь скачок величиной $K_{dc}\omega_p/\omega_0$.

9.18. Передаточная функция регулятора имеет вид:

$$G_c(s) = \frac{1,45s + 0,35}{s + 0,07}.$$

- (а) Определите коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте.
- (б) Определите коэффициент усиления регулятора на высоких частотах.
- (в) К какому типу относится этот регулятор — с опережением по фазе или с отставанием по фазе? Почему?
- 9.19. Передаточная функция регулятора имеет вид:
- $$G_c(s) = \frac{0,5s + 0,005}{s + 0,02}.$$
- (а) Определите коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте.

- (б) Определите коэффициент усиления регулятора на высоких частотах.
 (в) К какому типу относится этот регулятор — с опережением по фазе или с отставанием по фазе? Почему?

9.20. Задан регулятор с отставанием по фазе

$$G_c(s) = \frac{0,294s + 0,0706}{s + 0,0706}.$$

- (а) Запишите передаточную функцию ПИ-регулятора, которая имела бы такой же нуль и такой же коэффициент усиления на высоких частотах, что и данный регулятор с отставанием по фазе.
 (б) Сравните диаграммы Боде для амплитудных характеристик двух регуляторов.
 (в) Найдите значение коэффициента усиления на нулевой частоте для каждого из двух регуляторов.
 (г) Каким преимуществом обладает ПИ-регулятор в области высоких частот по сравнению с регулятором с отставанием по фазе?
 (д) Каким преимуществом обладает ПИ-регулятор в области низких частот по сравнению с регулятором с отставанием по фазе?

9.21. В примере 9.7 рассматривалась система, имеющая в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)},$$

и был синтезирован ПД-регулятор, $G_c(s) = 1,10 + 1,12s$, обеспечивающий запас по фазе в 50° на частоте $1,7$ рад/с. Определите передаточную функцию регулятора с опережением по фазе вида (9-28), которая имела бы тот же самый коэффициент усиления на нулевой частоте и тот же самый нуль, что и ПД-регулятор. Убедитесь, что если ПД-регулятор заменить регулятором с опережением по фазе, то система будет иметь запас по фазе по меньшей мере 47° .

9.22. Докажите, что для регуляторов первого порядка с опережением по фазе и с отставанием по фазе $\omega_m = \sqrt{\omega_0 \omega_p}$, где ω_m — частота, при которой фазовый сдвиг имеет максимальное значение [см. (9-24)].

9.23. Регулятор имеет передаточную функцию $G_c(s) = K_d(1 + s/\omega_0)/(1 + s/\omega_p)$.

- (а) Покажите, что K_d есть коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте.
 (б) Докажите, что при единичном ступенчатом воздействии на входе выходной сигнал регулятора будет иметь скачок величиной $K_d \omega_p / \omega_0$.
 (в) Рассмотрите передаточную функцию общего вида:

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Докажите, что если на вход подано единичное ступенчатое воздействие, т.е. $E(s) = 1/s$, то на выходе появится скачок величиной b_n . Если же порядок числителя передаточной функции меньше порядка знаменателя, т.е. $b_n = 0$, то при ступенчатом изменении входного сигнала скачок на выходе будет отсутствовать.

10. Проектирование систем с помощью современной теории управления

Методы синтеза, рассмотренные в предыдущих главах, были основаны на использовании либо частотных характеристик, либо корневого годографа. Эти методы обычно считаются *классическими*, или *традиционными*. Частотные методы очень хороши в практическом применении, и большинство систем управления проектируются именно на основе различных модификаций этих методов. Отличительной особенностью этих методов является так называемая *робастность* (или грубость — *прим. перев.*) [1], что означает нечувствительность характеристик замкнутой системы к небольшим погрешностям модели реальной системы. Эта особенность имеет существенное значение по причине сложности построения точной модели реальной системы, а также в связи с тем, что многим системам присущи различного рода нелинейности, осложняющие их анализ и синтез.

В последние годы было предпринято много попыток разработать новые методы синтеза, которые принято называть *методами современной теории управления*, чтобы не путать их с классическими методами. Эти методы в большей степени зависимы от точности модели системы в процессе синтеза. По этой причине они применяются весьма редко и не всегда приводят к успеху. Регуляторы с опережением по фазе, с отставанием по фазе и ПИД-регуляторы настолько хорошо себя зарекомендовали, что их синтез для реальных физических систем вряд ли стоит подвергать сомнению. Регуляторы, проектируемые методами современной теории управления, далеко не в той же степени получили признание у инженеров, занимающихся их промышленным применением. Однако следует ожидать, что эти методы станут более практичными и получат широкое применение.

В этой главе мы рассмотрим метод синтеза, основанный на применении современной теории управления, известный как метод размещения, или назначения, полюсов. Этот метод очень похож на метод корневого годографа, позволяющий разместить полюсы передаточной функции замкнутой системы в заданных точках. Однако современная теория позволяет реализовать заданное положение *всех* полюсов передаточной функции замкнутой системы, тогда как метод корневого годографа, описанный в главе 7, позволяет разместить в заданных точках только два доминирующих полюса. Расплатой за заданное размещение всех полюсов является необходимость измерения многих переменных в системе. На практике не все необходимые переменные могут быть измерены из-за дороговизны или отсутствия соответствующих преобразователей. В таких случаях те переменные, которые не могут быть измерены непосредственно, подлежат оценке на основании измеряемых переменных. Оценка переменных системы является вторым вопросом данной главы.

10.1. Синтез путем размещения полюсов

В этом разделе мы рассмотрим процедуру синтеза, основанную на размещении полюсов передаточной функции. Классические процедуры синтеза, рассмотренные в предыдущих главах, были основаны на использовании передаточной функции системы; синтез путем размещения полюсов основан на использовании модели системы в переменных состояния. Поскольку мы рассматриваем только линейные непрерывные стационарные системы, то модель объекта в переменных состояния имеет вид (см. главу 3):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10-1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

Мы ограничимся случаем систем с одним входом и одним выходом, поэтому $u(t)$ и $y(t)$ есть скалярные переменные. Сначала мы предположим, что вход системы управления, обозначаемый как $r(t)$, равен нулю; случай, когда $r(t) \neq 0$, будет рассмотрен в разделе 10.7.

В общем случае вход объекта управления $u(t)$ является функцией переменных состояния, т.е.

$$u(t) = f[\mathbf{x}(t)]. \quad (10-2)$$

Это уравнение обычно называют *законом управления*. При синтезе путем размещения полюсов закон управления определяется как

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (10-3)$$

где $\mathbf{K}$ есть вектор постоянных коэффициентов размерности $1 \times n$. Далее мы покажем, что этот закон управления позволяет разместить все полюсы замкнутой системы в любых заданных точках. Закон управления можно записать в виде:

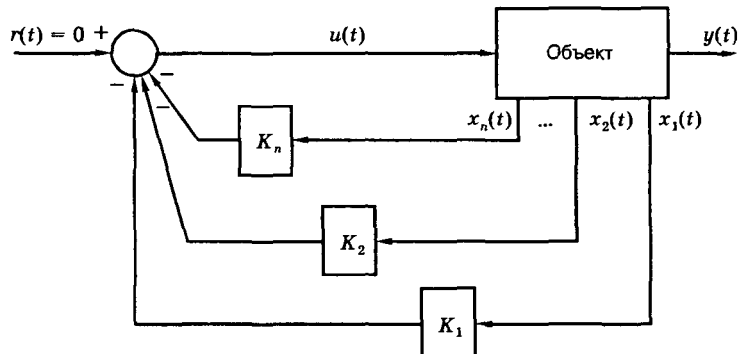
$$u(t) = -K_1x_1(t) - K_2x_2(t) - \dots - K_nx_n(t). \quad (10-4)$$

Отсюда видно, что сигнал, поступающий на вход объекта, представляет собой линейную комбинацию всех переменных состояния.

Задача синтеза заключается в определении желаемого положения корней характеристического уравнения системы и нахождении коэффициентов K_i , обеспечивающих заданное размещение корней.

Замкнутая система может быть представлена в виде рис. 10.1. Поскольку вход системы равен нулю, то ее назначение сводится к тому, чтобы поддерживать равной нулю выходную переменную. На практике система подвержена влиянию возмущений (не показанных на рис. 10.1), которые стремятся сделать выход объекта отличным от нуля; цель

Рис. 10.1
К синтезу системы
на основе
размещения полюсов



обратной связи — вернуть значение выходной переменной (и всех переменных состояния) к нулю определенным, наперед заданным, образом. Система такого типа (при входном сигнале, равном нулю) обычно называется *регулятором состояния*. Линейная система в случае постоянного входного воздействия также может рассматриваться как регулятор состояния (см. задачу 10.1).

Сначала мы рассмотрим метод размещения полюсов на примере, а затем сформулируем общие принципы процедуры синтеза. В разделе 7.6 был рассмотрен пример синтеза системы управления объектом второго порядка (спутником) с помощью метода корневого годографа с использованием обратной связи по положению и по скорости. Если в качестве переменных состояния выбрать положение спутника и его скорость, то в этой системе сигнал обратной связи будет представлять собой сумму переменных состояния с разными весовыми коэффициентами вида (10-4). Таким образом, мы, не отдавая себе отчет, реализовали бы метод синтеза, основанный на размещении полюсов. Теперь подойдем к данной проблеме именно с этой точки зрения.

Поскольку жесткий спутник из раздела 7.6 имеет передаточную функцию $1/s^2$, то схема моделирования объекта, если принять в качестве переменных состояния положение и скорость, выглядит так, как показано на рис. 10.2 (а). Уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (10-5)$$

На основании рис. 10.2 (б), в соответствии с (10-4) сигнал на входе объекта равен

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) = [-K_1 \ K_2] \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t). \quad (10-6)$$

Уравнения состояния для замкнутой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)|_{u=-\mathbf{K} \mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2] \mathbf{x}(t) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (10-7)$$

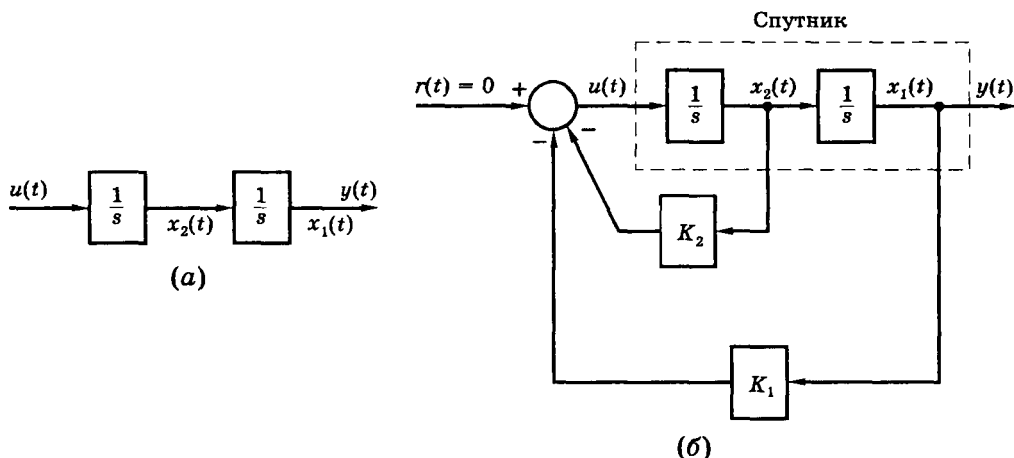


Рис. 10.2. Схема моделирования системы управления спутником

Таким образом, уравнения состояния замкнутой системы можно представить в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}(t), \quad (10-8)$$

где $\mathbf{A}_f$ есть матрица коэффициентов замкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы, согласно (5-14), имеет вид:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ K_1 & s + K_2 \end{vmatrix} = s^2 + K_2 s + K_1 = 0. \quad (10-9)$$

Предположим, что условия синтеза системы требуют, чтобы два корня характеристического уравнения были расположены в точках $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$. Присвоив желаемому характеристическому уравнению обозначение $\alpha_c(s)$, запишем:

$$\alpha_c(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 = 0. \quad (10-10)$$

Синтез заключается в выборе таких коэффициентов K_1 и K_2 в уравнении (10-9), которые равнялись бы соответствующим коэффициентам в уравнении (10-10). Таким образом,

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2, \quad (10-11)$$

$$K_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Из этого примера следует, что надлежащим выбором коэффициентов обратной связи можно разместить корни характеристического уравнения модели системы (полюсы передаточной функции замкнутой системы) в любых заданных точках на s -плоскости. Заметим также, что если λ_1 и λ_2 являются комплексными, то λ_2 должен быть комплексно-сопряженным корню λ_1 . Поэтому коэффициенты K_1 и K_2 всегда вещественны.

Теперь мы изложим общие принципы синтеза. Для линейной стационарной системы уравнения состояния объекта имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t). \quad (10-12)$$

Закон управления выбирается так, что

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (10-13)$$

где $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$, n — порядок объекта. Подставляя (10-13) в (10-12), получим:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f\mathbf{x}(t), \quad (10-14)$$

где $\mathbf{A}_f = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ есть матрица коэффициентов замкнутой системы. Тогда можно записать характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0. \quad (10-15)$$

Предположим, что по условиям синтеза корни характеристического уравнения должны иметь значения $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$. Желаемое характеристическое уравнение системы тогда можно записать в виде:

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_n) = 0. \quad (10-16)$$

В соответствии с процедурой синтеза путем размещения полюсов необходимо найти такую матрицу $\mathbf{K}$, чтобы выражения (10-15) и (10-16) были равны друг другу, т.е.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = \alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0. \quad (10-17)$$

Это уравнение содержит n неизвестных ($K_1, K_2, \dots, K_n$). Приравнявая в этом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях s , мы получим n уравнений относительно n неизвестных. Хотя это и не очевидно, но эти уравнения являются линейными; таким обра-

зом, решив эти уравнения, мы получим элементы матрицы $\mathbf{K}$.

Подобная процедура была использована в приведенном выше примере, однако она не применима к системам высокого порядка. В следующем разделе приводится процедура вычисления элементов матрицы $\mathbf{K}$ с помощью цифрового компьютера.

10.2. Формула Аккермана

Аккерманом [2] была предложена формула для вычисления элементов матрицы $\mathbf{K}$, удовлетворяющей уравнению (10-17); в этом разделе она приводится без доказательства.

Рассмотрим схему моделирования в *канонической форме управляемости* (см. раздел 3.2) для объекта n -го порядка, изображенную на рис. 10.3. Каждый блок, обозначенный символом интеграла, имеет передаточную функцию s^{-1} . Таким образом, объект имеет передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (10-18)$$

Уравнения состояния для данной системы имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t);$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] \mathbf{x}(t). \quad (10-19)$$

Отметим особенность матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ для данной системы. Все элементы этой матрицы равны нулю, кроме элементов, расположенных над главной диагональю (они рав-

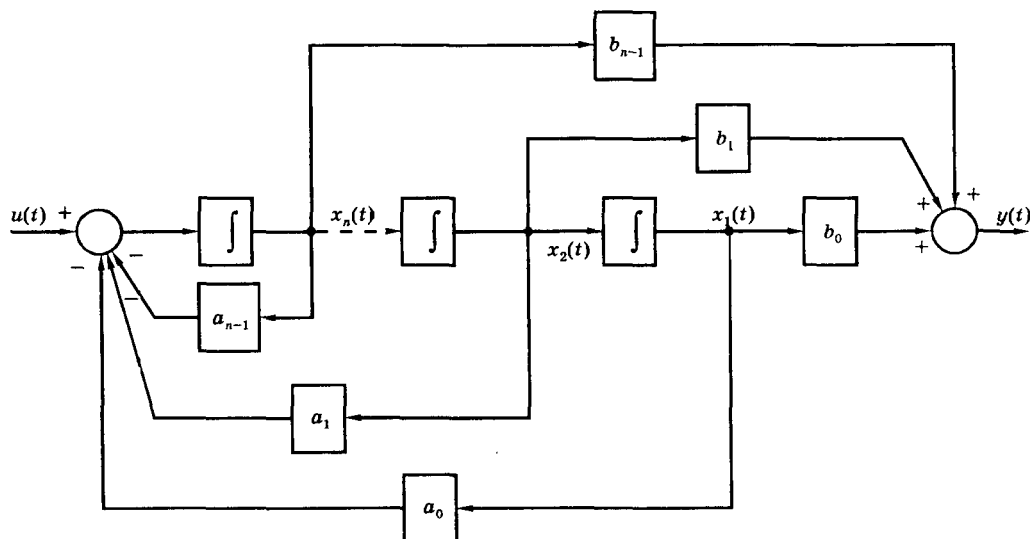


Рис. 10.3. Каноническая форма управляемости

ны единице) и элементов последней строки. В последней строке находятся коэффициенты характеристического уравнения системы со знаком минус. Если система имеет матрицу $\mathbf{A}$ подобного вида, мы сразу можем записать ее характеристическое уравнение.

Закон управления, согласно (10-13), записывается в виде:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (10-20)$$

Поэтому для замкнутой системы в матрице $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ член $\mathbf{BK}$ для канонической формы управляемости имеет вид:

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \dots K_{n-1} \ K_n] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_1 & \dots & K_{n-1} & K_n \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов замкнутой системы $\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ тогда запишется в виде:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - K_1 & -a_1 - K_2 & -a_2 - K_3 & \dots & -a_{n-1} - K_n \end{bmatrix}. \quad (10-21)$$

Эта матрица характерна для канонической формы управляемости; поэтому характеристическое уравнение замкнутой системы записывается в виде:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = s^n + (a_{n-1} + K_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + K_2)s + (a_0 + K_1) = 0.$$

Желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы, согласно (10-16), имеет вид:

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0.$$

Приравнявая в двух последних уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях s , получим:

$$a_{i-1} + K_i = \alpha_{i-1}.$$

Следовательно, искомые коэффициенты определяются выражениями

$$K_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10-22)$$

Последнее выражение представляет собой общее решение задачи синтеза путем размещения полюсов для системы с одним входом и одним выходом, но для этого необходимо, чтобы модель системы соответствовала канонической форме управляемости. Это требование трудно выполнить, поскольку переменные состояния в такой модели обычно не соответствуют естественным переменным состояния реальной системы и поэтому не являются теми переменными, которые должны отражать физическую сторону процессов, происходящих в реальной системе. Кроме того, в общем случае переменные состояния системы, представленной в канонической форме управляемости, могут быть недоступны для измерения.

Формула Аккермана основана на преобразовании подобия (см. раздел 3.5), которое переводит заданную модель произвольной структуры в каноническую форму управляемости, после чего с помощью (10-22) определяются искомые коэффициенты K_i . Затем полученное решение пересчитывается обратно применительно к исходной структуре. Эти действия выполняются с помощью формулы Аккермана:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}), \quad (10-23)$$

где $\alpha_c(\mathbf{A})$ — матричный полином, образованный путем использования коэффициентов желаемого характеристического уравнения $\alpha_c(s)$, т.е.

$$\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}. \quad (10-24)$$

Выражение (10-23) для матрицы $\mathbf{K}$ может быть вычислено на компьютере. Проиллюстрируем применение формулы Аккермана следующим примером.

Пример 10.1

Рассмотрим задачу синтеза системы управления положением спутника из раздела 10.1. Модель объекта, согласно (10-5) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

а желаемое характеристическое уравнение записывается в форме (10-10):

$$\alpha_c(s) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Для нахождения матрицы $\mathbf{K}$ воспользуемся формулой Аккермана. Сначала определим матрицу $[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Образует матричный полином (10-24):

$$\begin{aligned} \alpha_c(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{A} + \lambda_1\lambda_2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_1\lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Затем применяем формулу Аккермана (10-23):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [0 \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = \\ &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = [\lambda_1\lambda_2 \ \lambda_1 + \lambda_2]. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая матрица коэффициентов обратной связи имеет вид:

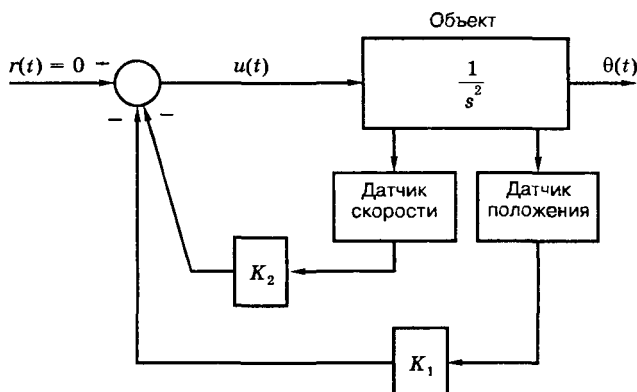
$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2] = [\lambda_1\lambda_2 \ \lambda_1 + \lambda_2],$$

что совпадает с выражением, полученным в разделе 10.1.

Пример 10.2

На рис. 10.4 приведена схема практической реализации системы управления спутником. Предположим, что по условиям синтеза необходимо получить критически демпфированную систему (см. раздел 4.2) с временем установления 1 с, т.е. $4\tau = 1$ с. Следовательно, требуемая постоянная времени $\tau = 0,25$ с, и два полюса должны быть расположены в точке $s = -4$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Запишем тогда желаемое характеристическое уравнение:

$$\alpha_c(s) = (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Рис. 10.4Система управления
спутником

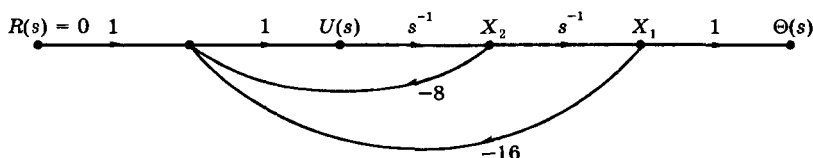
На основании примера 10.1 требуемые коэффициенты обратной связи равны:

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2 = 16; K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 8.$$

На рис. 10.5 изображен граф замкнутой системы, по которому можно определить соответствующую передаточную функцию:

$$T(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{s^{-2}}{1 + 8s^{-1} + 16s^{-2}} = \frac{1}{s^2 + 8s + 16},$$

откуда видно, что полюсы имеют заданные значения.

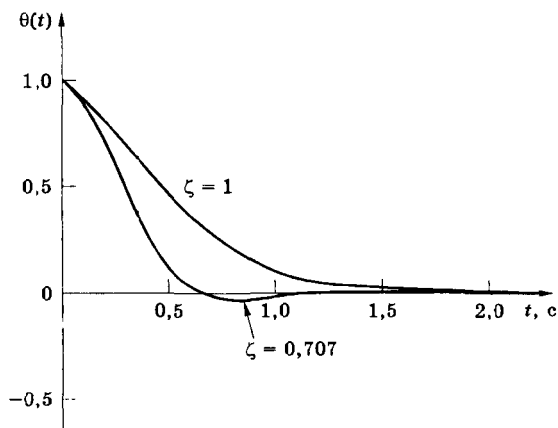
Рис. 10.5
Граф
системы
управления
спутником

На рис. 10.6 приведена реакция системы на начальные условия $x^T(0) = [1 \ 0]$, соответствующая $\zeta = 1$. График ясно указывает на то, что система является критически демпфированной.

Теперь предположим, что мы хотим сохранить прежнюю постоянную времени $\tau = 0.25$ с, но желаем иметь $\zeta = 0,707$. Это значит, что корни характеристического уравнения (полюсы замкнутой системы) должны быть равны $s = -4 \pm j4$, и

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2 = (4 + j4)(4 - j4) = 32,$$

$$K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 + j4 + 4 - j4 = 8.$$

Рис. 10.6Реакция системы
из примера 10.2
на начальные условия

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$(s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32 = 0.$$

Реакция этой системы на те же начальные условия также изображена на рис. 10.6.

Обратите внимание на различие двух реакций. Хотя полюсам двух систем соответствует одна и та же постоянная времени, реакция при $\zeta = 0,707$ затухает гораздо быстрее и имеет очень малое перерегулирование. Этим объясняется популярность выбора значения $\zeta = 0,707$ для доминирующих полюсов системы. Ниже приводится программа MATLAB, с помощью которой выполняется синтез и вычисляется реакция системы на начальные условия в случае $\zeta = 0,707$.

```
A = [0 1; 0 0]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;
```

```
Pp = [-4+4*i -4-4*i];
```

```
K = acker(A, B, Pp), pause
```

```
e10p2 = ss((A-B*K), B, C, D);
```

```
initial(e10p2, [1; 0])
```

В этой программе Pp — вектор-строка желаемого расположения полюсов системы управления, а инструкция *acker* вычисляет вектор коэффициентов K. Две последние инструкции вычисляют реакцию системы на начальные условия.

Из последнего примера, казалось бы, следует, что мы можем выбрать вещественную часть корней сколь угодно большой, чтобы повысить быстродействие системы. В модели системы мы действительно можем это сделать. Однако для того, чтобы уменьшить постоянную времени системы, необходимо увеличивать коэффициент обратной связи. *И это не случайно, т.к. чтобы увеличить скорость реакции объекта, на его вход должен поступать большой сигнал.* А если возрастают амплитуды сигналов в системе, то велика вероятность того, что она перейдет в нелинейный режим работы; при очень больших сигналах практически любая реальная система будет работать как нелинейная. Следовательно, линейная модель, которая использовалась при синтезе, больше не будет точно отображать поведение реальной системы и ее истинные характеристики. Тем не менее, математическая модель будет обладать всеми желаемыми свойствами, но с очень малой пользой для инженера.

Все сказанное выше можно непосредственно проиллюстрировать на примере со спутником. Чтобы увеличить быстроту реакции спутника, двигатели должны развивать большой момент. Однако в действительности они обладают ограниченным моментом. Если в системе управления требуется момент, превышающий максимально возможное значение, то двигатели будут работать в режиме ограничения (насыщения). Система при этом становится нелинейной. Некоторые эффекты, связанные с наличием в системе нелинейностей, в частности насыщения, будут рассмотрены в главе 14.

10.3. Оценка состояния

В предыдущих разделах была рассмотрена современная процедура синтеза, основанная на размещении полюсов. В этом случае закон управления определяется выражением

$$u(t) = -Kx(t), \quad (10-25)$$

а это подразумевает, что все переменные состояния объекта могут быть измерены. В подобных случаях говорят, что в системе используется *полная обратная связь по состоянию*. Для систем первого и второго порядка полная обратная связь по состоянию достаточно очевидна. Во многих системах второго порядка, проектируемых классическими методами, используется обратная связь и по положению, и по скорости; следовательно, они являются

системами с полной обратной связью по состоянию. Однако существует много систем, которые невозможно точно описать моделями первого или второго порядка. В большинстве таких систем невозможно измерить все переменные состояния; чтобы реализовать метод синтеза, основанный на размещении полюсов, те переменные состояния, которые не могут быть непосредственно измерены, должны быть оценены в результате некоторого наблюдения за поведением объекта. Затем эти переменные используются в уравнении (10-25). Предметом данного и двух последующих разделов является оценка состояния линейных стационарных систем.

Предположим, что задана непрерывная система с одним входом и одним выходом, описываемая уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (10-26)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

Необходимо получить оценку вектора состояния системы $\mathbf{x}(t)$, которую мы будем обозначать $\hat{\mathbf{x}}(t)$. В процессе оценки мы будем использовать всю доступную информацию, т.е. входной сигнал $u(t)$, измеренное значение выхода $y(t)$ и матрицы системы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ в любой момент времени неизвестен, в частности, мы не знаем начальных условий $\mathbf{x}(0)$.

На рис. 10.7 приведена блок-схема процесса оценки состояния. Устройство оценки состояния, называемое также *наблюдателем состояния* (или просто *наблюдателем*), имеет ту же динамику, что и сама система. Тогда уравнение наблюдателя можно записать в виде:

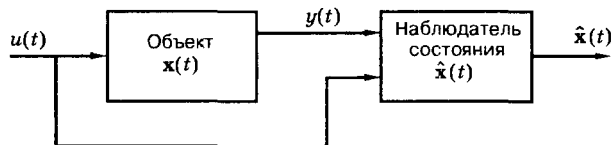


Рис. 10.7. Оценка состояния

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H}u(t) + \mathbf{G}y(t). \quad (10-27)$$

Матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы $\hat{\mathbf{x}}(t)$ давал точную оценку $\mathbf{x}(t)$. Тогда в системе управления вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ используется для формирования сигнала обратной связи $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Уравнения для определения матриц $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ могут быть получены разными способами; мы воспользуемся здесь методом передаточной функции. Суть его заключается в том, что передаточная функция от входа $u(t)$ к переменной состояния наблюдателя $\hat{x}_i(t)$ должна быть равна передаточной функции от $u(t)$ к переменной состояния $x_i(t)$ для всех i , т.е.

$$\frac{\hat{X}_i(s)}{U(s)} = \frac{X_i(s)}{U(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10-28)$$

Получим уравнения для определения $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющих (10-28). Преобразование Лапласа уравнений (10-26) дает:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s),$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s),$$

как это было показано при получении (3-18). Игнорируя начальные условия $\mathbf{x}(0)$, решим эти уравнения относительно $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s). \quad (10-29)$$

Заметим, что $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ есть *матричная передаточная функция*, т.е. матрица, элементы которой являются передаточными функциями. Матричная передаточная функция от $U(s)$ к $\hat{\mathbf{X}}(s)$ должна быть такой же, как и в выражении (10-29).

Преобразуя по Лапласу уравнение наблюдателя (10-27), получим (игнорируя начальные условия):

$$s\hat{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{H}U(s) + \mathbf{G}Y(s) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{H}U(s) + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{X}(s), \quad (10-30)$$

поскольку $Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$. Отсюда, учитывая (10-29), выразим $\hat{\mathbf{X}}(s)$:

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{H}U(s) + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{X}(s)] = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{H} + \mathbf{G}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]U(s). \quad (10-31)$$

Мы хотим, чтобы передаточные функции в уравнениях (10-31) и (10-29) были равны:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{H} + \mathbf{G}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]. \quad (10-32)$$

Группируя коэффициенты при члене $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, получим:

$$[\mathbf{I} - (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{C}](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{H}.$$

Затем из левой стороны этого уравнения вынесем $(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$ в качестве сомножителя:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{C}](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{H}.$$

Это уравнение удовлетворяется, если равны вторые сомножители в левой и правой части, т.е.

$$[\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{C}](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H},$$

или

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{H}.$$

Это уравнение удовлетворяется, если мы выберем $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{A}$. Следовательно, матрицы наблюдателя состояния определяются в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}, \quad (10-33)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Заметим, что если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ выбраны таким образом, то матричные передаточные функции (10-32) будут равны независимо от матрицы $\mathbf{G}$. Следовательно, матрицу $\mathbf{G}$ мы можем выбрать, учитывая желаемые ограничения; обычно матрица $\mathbf{G}$ выбирается исходя из приемлемого вида переходной функции или необходимых частотных характеристик наблюдателя состояния.

На основании (10-27) и (10-33) мы можем теперь представить уравнения наблюдателя состояния в виде:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t), \quad (10-34)$$

где подлежит определению матрица $\mathbf{G}$. Для этого полезно рассмотреть ошибку, возникающую в процессе оценки состояния. Введем вектор ошибки в виде

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (10-35)$$

или

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix}.$$

Производная вектора ошибки, согласно (10-35), равна:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t).$$

Подставляя в это уравнение выражения (10-26) и (10-34), получим:

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A - GC)\hat{x}(t) - Bu(t) - Gy(t). \quad (10-36)$$

Поскольку $y(t) = Cx(t)$, то (10-36) можно записать иначе:

$$\dot{e}(t) = Ax(t) - (A - GC)\hat{x}(t) - GCx(t) = (A - GC)[x(t) - \hat{x}(t)],$$

или

$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t). \quad (10-37)$$

Это уравнение показывает, что ошибка оценки состояния имеет ту же самую динамику, что и наблюдатель состояния, т.к. характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (10-37), имеет тот же вид, что и характеристическое уравнение наблюдателя [см. (10-34)], а именно

$$|sI - A + GC| = 0. \quad (10-38)$$

Матрица G обычно выбирается так, чтобы переходный процесс в наблюдателе заканчивался быстрее, чем переходный процесс в системе. Эмпирически установлено, что наблюдатель должен обладать быстродействием, в 2–4 раза превышающим быстродействие системы.

Все приведенные выше рассуждения являются математически строгими, но имеют много недостатков применительно к реальным физическим системам. Согласно нашим выводам, если наблюдатель является устойчивым (а так и должно быть), то ошибка оценки состояния будет сводиться к нулю с динамикой, определяемой уравнением (10-38). Тогда мы получим высокое качество оценки состояния. Но здесь как раз и возникают недостатки, поскольку нельзя достигнуть совершенства, работая с реальной системой. Некоторые из недостатков заключаются в следующем:

1. Мы предполагаем, что модель системы является точной. Следовательно, при получении уравнения для ошибки (10-37) мы считаем, что матрицы A , B и C для наблюдателя совпадают с соответствующими матрицами реальной системы. Но поскольку на самом деле это не так, то уравнение для ошибки (10-37) будет более сложным.
2. Мы пренебрегли возмущениями, действующими на реальную систему. Если их учитывать, то модель реальной системы в переменных состояния будет отличаться от уравнений (10-26) и запишется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= Cx(t) + v(t). \end{aligned} \quad (10-39)$$

В этих уравнениях $w(t)$ есть вектор возмущений, а член $v(t)$ учитывает ошибки датчиков. Если эти уравнения подставить вместо (10-26) в уравнение для ошибки, то получим:

$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t) + B_w w(t) - Gv(t). \quad (10-40)$$

Отсюда видно, что ошибка с течением времени не сводится к нулю, даже если пренебречь неточностями моделирования.

Следует заметить, что использование оценки состояния реальных систем может быть далеко небезопасным. С помощью наблюдателя управление системой осуществляется не на основе измеренных переменных состояния, а на основе вычисленных переменных. Если эти вычисления организованы недостаточно хорошо, то истинные значения переменных состояния могут изменяться в одном направлении, а их вычисленные значения — совсем в другом, т.е. ошибка оценки состояния может расходиться. Если в качестве сигнала обратной связи использовать выход соответствующего датчика, то можно быть уверенным, что этот сигнал достаточно точно отражает значение переменной состояния за исключением, конечно, случая отказа датчика. Если же в качестве сигнала обратной связи использовать оценку переменной состояния, то действие наблюдателя следует многократно проверить, чтобы убедиться, что он правильно функционирует при всех возможных условиях работы системы.

10.3.1. Синтез наблюдателя

Теперь мы перейдем к синтезу наблюдателей состояния. Уравнение наблюдателя [см. (10-34)] имеет вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{G}y(t).$$

Отсюда характеристическое уравнение наблюдателя:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = 0. \quad (10-41)$$

Как было отмечено ранее, один из методов синтеза наблюдателя состоит в том, чтобы сделать его в 2–4 раза более быстродействующим, чем замкнутая система. Следовательно, мы можем выбрать такое характеристическое уравнение наблюдателя, которое содержит информацию о желаемом быстродействии:

$$\alpha_e(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0. \quad (10-42)$$

Тогда матрица $\mathbf{G}$ должна удовлетворять уравнению:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = \alpha_e(s). \quad (10-43)$$

Отметим сходство данной задачи с синтезом системы путем размещения полюсов [см. (10-17)]. Поэтому для синтеза наблюдателей состояния также может быть использована формула Аккермана (10-23). В итоге мы получим следующий результат:

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10-44)$$

Выражение (10-44) позволяет вычислить матрицу $\mathbf{G}$ по заданному характеристическому полиному наблюдателя $\alpha_e(s)$ и известным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$.

Пример 10.3

Рассмотрим задачу синтеза системы управления спутником из примера 10.2. Уравнения состояния объекта имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

В примере 10.2 был синтезирован регулятор, удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$\alpha_c(s) = s^2 + 8s + 32 = 0,$$

который обеспечивал постоянную времени замкнутой системы $\tau = 0,25$ с и параметр $\zeta = 0,707$. Теперь мы синтезируем наблюдатель, который обладал бы критическим демпфированием с постоянной времени $\tau = 0,1$ с. Таким образом,

$$\alpha_e(s) = (s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100.$$

Тогда

$$\alpha_e(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{C}\mathbf{A} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1].$$

и

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

На этом синтез наблюдателя завершен. Эта процедура может быть выполнена с помощью следующей программы MATLAB:

```
A = [0 1; 0 0]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;
Pe = [-10 -10];
Gt = acker(A', C', Pe); G = Gt'
```

В этой программе для вычисления коэффициентов наблюдателя используются инструкция *acker* и транспонированные матрицы, т.к.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}. \quad (10-45)$$

Следовательно, в инструкции *acker* $\mathbf{A}^T$ заменяет $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}^T$ заменяет $\mathbf{B}$, а результатом является $\mathbf{G}^T$.

Пример 10.4

В данном примере мы рассмотрим реализацию закона управления с помощью наблюдателя состояния, используя результаты примеров 10.2 и 10.3 соответственно. В примере 10.2 была найдена матрица коэффициентов, позволяющая разместить полюсы замкнутой системы в точках $s = -4 \pm j4$:

$$\mathbf{K} = [32 \ 8],$$

а в примере 10.3 была получена матрица коэффициентов наблюдателя:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (10-34) уравнения наблюдателя имеют вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y(t),$$

поскольку теперь $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$. В последнем уравнении

$$\mathbf{GC} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 32 & 8 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A} - \mathbf{GC} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 32 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix}.$$

В результате регулятор-наблюдатель описывается следующими уравнениями:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} y(t),$$

$$u(t) = [-32 \ -8] \hat{\mathbf{x}}(t).$$

В этих уравнениях $y(t)$ есть вход, а $u(t)$ — выход наблюдателя.

Данная задача решается с помощью следующей программы MATLAB:

```
A = [0 1; 0 0]; B = [0; 1]; C = [1 0]; D = 0;
e10p4 = ss(A, B, C, D);
Pp = [-4+4*i -4-4*i];
K = acker(A, B, Pp)
Pe = [-10 -10];
Gt = acker(A', B', Pe); G = Gt'
rsys = reg(e10p5, K, G), pause
Gec = -tf(rsys), Gp = tf(e10p4), G01 = Gec * Gp, pause
[gm, pm, wg, wp] = margin(G01)
```

В этой программе объединены две предыдущие программы и использована функция *reg* (от слова регулятор), которая вычисляет матрицы системы с регулятором-наблюдателем. Назначение двух последних инструкций будет рассмотрено ниже.

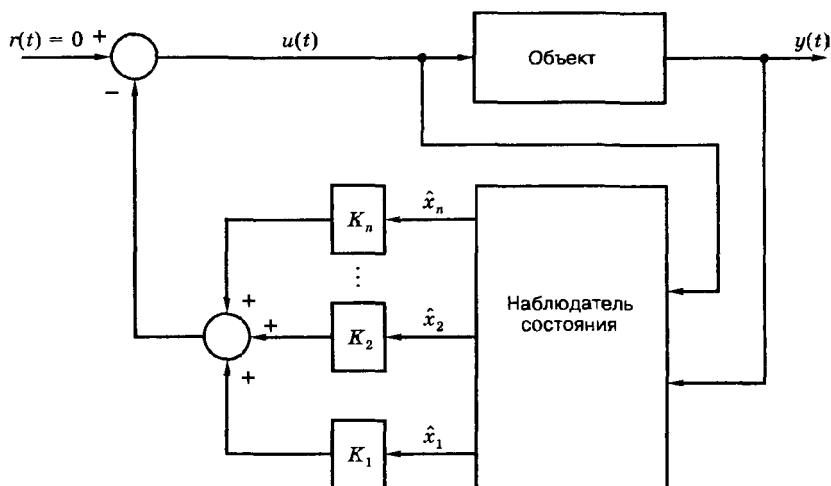
10.4. Характеристики замкнутой системы

В общем случае невозможно измерить все переменные состояния системы, поэтому для синтеза путем размещения полюсов необходимо применять наблюдатель состояния. Процесс синтеза состоит из двух этапов — сначала мы определяем матрицу коэффициентов обратной связи $\mathbf{K}$, удовлетворяющую заданному характеристическому уравнению замкнутой системы, $\alpha_c(s) = 0$. Затем мы синтезируем наблюдатель состояния, удовлетворяющий его характеристическому уравнению, $\alpha_o(s) = 0$. При реализации системы мы помещаем наблюдатель в замкнутый контур, как показано на рис. 10.8, хотя мы еще не рассмотрели, как это повлияет на характеристическое уравнение замкнутой системы. Пока очевидно лишь одно — поскольку и объект, и наблюдатель имеют n -й порядок, то характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь порядок $2n$. Поэтому необходимо исследовать, какое положение будут занимать $2n$ корней данного уравнения.

Мы имеем характеристическое уравнение системы с полной обратной связью по состоянию [см. (10-15)]

$$\alpha_c(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0$$

Рис. 10.8
Система
с регулятором-
наблюдателем



и характеристическое уравнение наблюдателя состояния [см. (10-41)]

$$\alpha_e(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}| = 0. \quad (10-46)$$

Как следует из последнего примера, уравнения состояния регулятора-наблюдателя имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}(t), \\ u(t) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \end{aligned}$$

где $y(t)$ есть вход, а $u(t)$ — выход наблюдателя. Поскольку эти уравнения записаны в стандартной форме, мы можем, используя (3-42), определить передаточную функцию, $-G_{ec}(s)$, регулятора-наблюдателя:

$$-G_{ec}(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}.$$

Причина, по которой в левой части выражения использован знак минус, будет объяснена ниже. Для последнего примера, проделав указанные вычисления, мы получим передаточную функцию

$$G_{ec}(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292}.$$

Эти вычисления можно проверить с помощью предпоследней инструкции программы MATLAB из примера 10.4. Из приведенных выше рассуждений следует, что поскольку вход и выход регулятора-наблюдателя являются скалярными переменными, его можно описать единственной передаточной функцией $G_{ec}(s)$, где

$$G_{ec}(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}. \quad (10-47)$$

В данном случае система принимает вид, изображенный на рис. 10.9, причем сумматор добавлен с целью инверсии знака сигнала на входе регулятора-наблюдателя. Она выглядит как обычная одноконтурная система с единичной обратной связью. Однако в последнем примере был синтезирован ре-

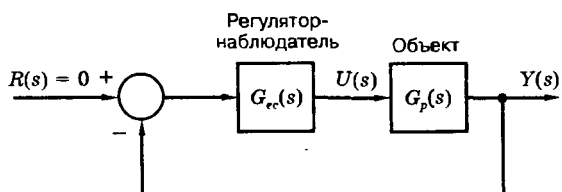


Рис. 10.9. Система
с регулятором-наблюдателем

гулятор, имеющий второй порядок; в общем случае если объект имеет n -й порядок, то и регулятор-наблюдатель тоже должен иметь n -й порядок. Замкнутая система будет иметь характеристическое уравнение вида:

$$1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0. \quad (10-48)$$

Следовательно, для системы можно изобразить диаграмму Боде, используя функцию $G_{ec}(j\omega)G_p(j\omega)$. Эти построения были выполнены с помощью последней инструкции программы MATLAB из примера 10.4 и было установлено, что запас по фазе составляет $37,7^\circ$, что в ряде задач синтеза считается недостаточным.

Теперь получим характеристическое уравнение замкнутой системы, изображенной на рис. 10.8. Сначала рассмотрим вектор ошибки (10-35):

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (10-49)$$

Уравнения состояния объекта [см. (10-4)] имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (10-50)$$

Закон управления задается уравнением $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$. Тогда из (10-49) и (10-50) имеем:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{e}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}(t). \quad (10-51)$$

Уравнение, описывающее изменение компонентов вектора ошибки [см. (10-37)] имеет вид:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e}(t). \quad (10-52)$$

Если объединить переменные состояния объекта и компоненты вектора ошибки, то на основании (10-51) и (10-52) мы получим:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (10-53)$$

Переменные $[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{e}^T(t)]^T$ можно рассматривать как результат преобразования подобия переменных $[\mathbf{x}^T(t) \hat{\mathbf{x}}^T(t)]^T$, т.к. компоненты вектора ошибки являются линейными комбинациями переменных состояния объекта и наблюдателя (см. раздел 3.5). Следовательно, характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальным уравнениям (10-53), одновременно является таковым и для замкнутой системы на рис. 10.8. В приложении А показано, что это характеристическое уравнение имеет вид:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}| = 0. \quad (10-54)$$

$2n$ корней этого уравнения образованы n корнями, заданными из условий синтеза путем размещения полюсов, и n корнями наблюдателя. Это замечательное свойство; в противном случае введение в систему наблюдателя привело бы к смещению на s -плоскости корней, заданных из условий синтеза. Поскольку быстродействие наблюдателя обычно выбирается большим, чем быстродействие системы с полной обратной связью по состоянию, то доминирующими будут полюсы, размещаемые с помощью этой обратной связи.

Теперь получим уравнения состояния для замкнутой системы, причем в качестве переменных будем рассматривать переменные состояния собственно исходной системы плюс переменные, являющиеся их оценками. На основании ранее записанных уравнений имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Те же уравнения, но в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица $\mathbf{A}_f$ для замкнутой системы имеет вид:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC} \end{bmatrix}. \quad (10-55)$$

Ниже рассматриваются два полезных примера.

Пример 10.5

Здесь мы исследуем переходный процесс в замкнутой системе из примера 10.4. В этом примере модель объекта задана уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t),$$

а модель регулятора-наблюдателя уравнениями:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} y(t),$$

$$u(t) = [-32 \ -8] \hat{\mathbf{x}}(t).$$

Взяв за основу структурную схему на рис. 10.9, мы можем построить граф этой системы; он изображен на рис. 10.10. Из характеристического уравнения (10-48) очевидно, что система имеет четвертый порядок. Если принять $x_3(t) = \hat{x}_1(t)$ и $x_4(t) = \hat{x}_2(t)$, то на основании рис. 10.10 можно записать уравнения состояния для замкнутой системы:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & -8 \\ 20 & 0 & -20 & 1 \\ 100 & 0 & -132 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 100 \end{bmatrix} r(t),$$

$$\theta(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T.$$

Моделирование данной системы выполняется с помощью следующей программы MATLAB:

$\mathbf{A} = [0 \ 1; 0 \ 0]; \mathbf{B} = [0; 1]; \mathbf{C} = [1 \ 0]; \mathbf{D} = 0;$

$\mathbf{K} = [32 \ 8]; \mathbf{G} = [20; 100];$

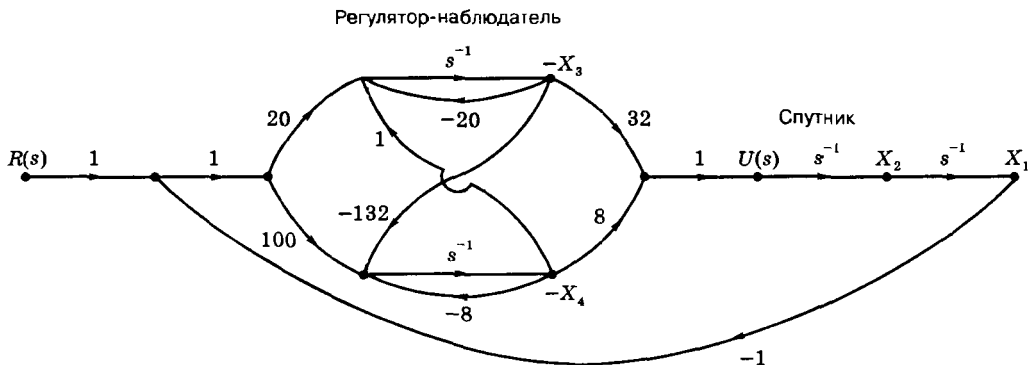


Рис. 10.10. Замкнутая система с наблюдателем состояния

```
Af = [A -B*K; G*C A-B*K-G*C]
e10p5 = ss(Af, [B; 0; 0], [C 0 0], 0); pause
initial(e10p5, [1 0 1 0], 1.5), hold
initial(e10p5, [1 0 0 0], 1.5), hold off
eig(Af)
```

Результаты моделирования приведены на рис. 10.11. В первом случае начальные условия были заданы так, что

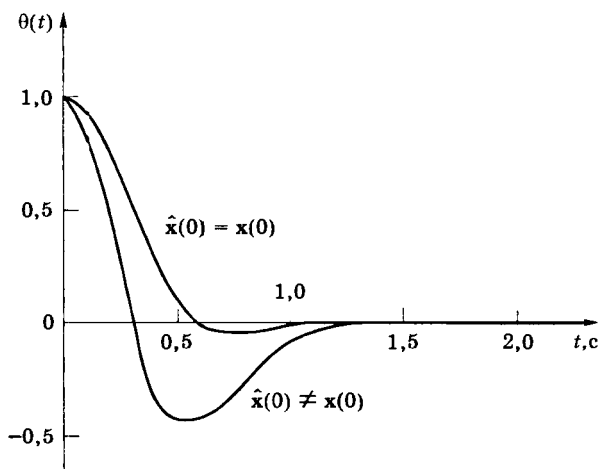
$$\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0],$$

т.е. начальное состояние наблюдателя совпало с начальным состоянием объекта. На рисунке соответствующей реакции присвоено обозначение $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$. Эта реакция в точности совпадает с реакцией на начальные условия объекта с полной обратной связью по состоянию (см. рис. 10.6). Поскольку известна точная модель объекта, а начальное значение ошибки оценки состояния равно нулю, то уравнение (10-37) показывает, что ошибка будет оставаться равной нулю в любой момент времени. Во втором случае, который является более реальным, начальные условия были заданы в виде

$$\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

т.е. начальное состояние объекта и начальное состояние наблюдателя отличались друг от друга. На рис. 10.11 соответствующей реакции присвоено обозначение $\mathbf{x}(0) \neq \hat{\mathbf{x}}(0)$. В этом случае отчетливо проявляется влияние динамики наблюдателя: кроме того, большое перерегулирование очевидно из упомянутого выше запаса по фазе в $37,7^\circ$.

Рис. 10.11
Реакция системы
из примера 10.5
на начальные условия



Хотя процедуры синтеза, рассмотренные в предыдущих примерах, выглядят достаточно обоснованно, запас по фазе получается меньшим, чем обычно. Действительно, как было продемонстрировано при синтезе регулятора-наблюдателя, запас по фазе может стать чрезвычайно малым, даже если все требования к системе вполне разумны [3]. Следовательно, завершив синтез системы, *всегда* необходимо с целью проверки вычислять запас по фазе в замкнутой системе.

Пример 10.6

Чтобы проиллюстрировать получение характеристического уравнения (10-54), рассмотрим систему из примера 10.5. Для этой системы характеристическое уравнение имеет вид:

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = (s^2 + 8s + 32)(s^2 + 20s + 100) = s^4 + 28s^3 + 292s^2 + 1440s + 3200 = 0.$$

Это характеристическое уравнение мы можем также получить с помощью выражения (10-48), записанного для системы, представленной в виде рис. 10.9:

$$1 + G_{cc}(s)G_p(s) = 1 + \left[\frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292} \right] \left[\frac{1}{s^2} \right] = 0.$$

Из этого уравнения сразу вытекает:

$$s^4 + 28s^3 + 292s^2 + 1440s + 3200 = 0,$$

что совпадает с полученным ранее. Характеристическое уравнение можно получить еще одним способом, если вычислить определитель

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = 0,$$

где $\mathbf{A}_f$ есть матрица коэффициентов замкнутой системы. Эта матрица была вычислена в примере 10.5, поэтому определитель принимает вид:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 32 & 8 \\ -20 & 0 & s+20 & -1 \\ -100 & 0 & 132 & s+8 \end{vmatrix}.$$

Раскрытие этого определителя дает уже известный результат. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}_f$ вычисляются с помощью последней инструкции программы MATLAB из примера 10.5.

10.5. Наблюдатели пониженного порядка

Наблюдатель, рассмотренный в предыдущем разделе, можно назвать наблюдателем полного порядка, т.к. с его помощью мы получаем оценки всех переменных состояния объекта. Однако обычно некоторые из этих переменных состояния недоступны для измерения; например, для спутника, с которым мы имели дело в предыдущих разделах, всегда измеряется положение, представляющее собой переменную $x_1(t)$. Очевидно, что измерение переменной состояния в общем случае будет более точным, нежели оценка этой переменной с помощью наблюдателя. Поэтому в большинстве случаев нелогично оценивать те переменные состояния, которые можно измерить. Единственным исключением является случай, когда измерение сопровождается большим шумом. В подобной ситуации наблюдатель может оказаться предпочтительным благодаря возможности фильтрации шума; степень ослабления шума определяется частотной характеристикой наблюдателя от его входа до оцениваемой переменной состояния.

По указанным причинам целесообразно синтезировать наблюдатель, дающий оценку только тех переменных состояния, которые не могут быть измерены. Подобное устройство называют *наблюдателем пониженного порядка*. В данном разделе мы получим уравнения, позволяющие синтезировать такой наблюдатель, причем ограничимся случаем измерения только одной переменной состояния. Предполагается, что переменные состояния всегда выбираются так, что измеряется $x_1(t)$; без потери общности этот случай можно распространить на любую другую измеряемую переменную. Тогда уравнение выхода всегда будет иметь вид:

$$y(t) = x_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{x}(t). \quad (10-56)$$

Сначала мы разделим вектор состояния на составляющие:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_e(t)$ — вектор состояния, подлежащий оценке. Затем мы разделим уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{1e} \\ \mathbf{A}_{e1} & \mathbf{A}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} u(t). \quad (10-57)$$

На основании (10-57) запишем уравнения относительно переменных состояния, подлежащих оценке:

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}_{e1}x_1(t) + \mathbf{A}_{ee}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_eu(t), \quad (10-58)$$

а также уравнение относительно измеряемой переменной:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \mathbf{A}_{1e}\mathbf{x}_e(t) + b_1u(t). \quad (10-59)$$

В этих уравнениях $x_1(t)$ и $u(t)$ известны, а $\mathbf{x}_e(t)$ неизвестно и подлежит оценке.

Чтобы получить уравнения наблюдателя, мы преобразуем (10-58) и (10-59) в ту же форму, что и уравнения объекта при полной оценке состояния. Поскольку последние нам известны, мы можем записать уравнения для наблюдателя пониженного порядка. Для наблюдателя полного порядка

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (10-60)$$

а для наблюдателя пониженного порядка, согласно (10-58),

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}_{ee}\mathbf{x}_e(t) + [\mathbf{A}_{e1}x_1(t) + \mathbf{B}_eu(t)]. \quad (10-61)$$

При полной оценке состояния

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (10-62)$$

а для наблюдателя пониженного порядка, согласно (10-59),

$$[\dot{x}_1(t) - a_{11}x_1(t) - b_1u(t)] = \mathbf{A}_{1e}\mathbf{x}_e(t). \quad (10-63)$$

Сравнивая (10-60) с (10-61) и (10-62) с (10-63), мы обнаруживаем, что эти уравнения эквивалентны, если сделать следующие замены:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\leftarrow \mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{A} &\leftarrow \mathbf{A}_{ee} \\ \mathbf{B}u(t) &\leftarrow \mathbf{A}_{e1}x_1(t) + \mathbf{B}_eu(t) \\ y(t) &\leftarrow \dot{x}_1(t) - a_{11}x_1(t) - b_1u(t) \\ \mathbf{C} &\leftarrow \mathbf{A}_{1e}. \end{aligned} \quad (10-64)$$

Произведя эти подстановки в уравнение наблюдателя полного порядка (10-34),

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t),$$

мы получим уравнение наблюдателя пониженного порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_e(t) &= (\mathbf{A}_{ee} - \mathbf{G}_e\mathbf{A}_{1e}) \hat{\mathbf{x}}_e(t) + \mathbf{A}_{e1}y(t) + \mathbf{B}_eu(t) + \\ &+ \mathbf{G}_e[\dot{x}_1(t) - a_{11}x_1(t) - b_1u(t)], \end{aligned} \quad (10-65)$$

где $x_1(t)$ заменено на $y(t)$, а $\mathbf{G}_e$ есть матрица коэффициентов наблюдателя пониженного порядка. Тогда из (10-37) следует, что динамика изменения ошибки определяется уравнением:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_e(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_e(t) = (\mathbf{A}_{ee} - \mathbf{G}_e\mathbf{A}_{1e})\mathbf{e}(t). \quad (10-66)$$

Следовательно, характеристическое уравнение для наблюдателя и ошибок оценки имеет вид:

$$\alpha_e(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{ee} + \mathbf{G}_e\mathbf{A}_{1e}| = 0. \quad (10-67)$$

Если задать полином $\alpha_e(s)$, определяющий желаемую динамику процесса оценки состояния, то можно найти $\mathbf{G}_e$, удовлетворяющую данному уравнению.

Используя формулу Аккермана для наблюдателя полного порядка (10-44)

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10-68)$$

и произведя указанные выше замены, получим формулу для синтеза наблюдателя пониженного порядка:

$$\mathbf{G}_e = \alpha_e(\mathbf{A}_{ee}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1e} \\ \mathbf{A}_{1e}\mathbf{A}_{ee} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{1e}\mathbf{A}_{ee}^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10-69)$$

Заметим, что порядок этого наблюдателя на единицу меньше, чем порядок наблюдателя полного порядка.

Предыдущие уравнения могут быть использованы для синтеза наблюдателя пониженного порядка, однако при этом существует одна проблема. Как следует из (10-65), на вход такого наблюдателя должна подаваться производная сигнала $y(t)$. Хотя в принципе можно создать устройства, обладающие дифференцирующими свойствами (например, ПД-регулятор), однако дифференциатор будет усиливать любой высокочастотный шум, содержащийся в сигнале $y(t)$. Но можно исключить необходимость дифференцирования, изменив переменные состояния так, что вычисления $\dot{y}(t)$ не потребуются. Сначала введем новую переменную, которую обозначим $\hat{\mathbf{x}}_{e1}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{e1}(t) = \hat{\mathbf{x}}_e(t) - \mathbf{G}_e y(t), \quad (10-70)$$

или

$$\hat{\mathbf{x}}_e(t) = \hat{\mathbf{x}}_{e1}(t) + \mathbf{G}_e y(t). \quad (10-71)$$

Подставляя это выражение в (10-65), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{e1}(t) + \mathbf{G}_e \dot{y}(t) &= (\mathbf{A}_{ee} - \mathbf{G}_e \mathbf{A}_{1e})[\hat{\mathbf{x}}_{e1}(t) + \mathbf{G}_e y(t)] + \\ &+ \mathbf{A}_{e1}y(t) + \mathbf{B}_e u(t) + \mathbf{G}_e[\dot{y}(t) - a_{11}y(t) - b_1 u(t)], \end{aligned}$$

что можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{e1}(t) &= (\mathbf{A}_{ee} - \mathbf{G}_e \mathbf{A}_{1e}) \hat{\mathbf{x}}_{e1}(t) + (\mathbf{A}_{e1} - \mathbf{G}_e a_{11} + \\ &+ \mathbf{A}_{ee} \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{A}_{1e} \mathbf{G}_e) y(t) + (\mathbf{B}_e - \mathbf{G}_e b_1) u(t). \end{aligned} \quad (10-72)$$

Это дифференциальное уравнение решается относительно переменных $\hat{\mathbf{x}}_{e1}(t)$, после чего в соответствии с (10-71) находятся оцениваемые переменные:

$$\hat{\mathbf{x}}_e(t) = \hat{\mathbf{x}}_{e1}(t) + \mathbf{G}_e y(t). \quad (10-73)$$

Сигнал поступающий на вход объекта,

$$u(t) = -K_1 y(t) - K_e \hat{x}_e(t) = -K_1 y(t) - K_e [\hat{x}_{e1}(t) + G_e y(t)], \quad (10-74)$$

где матрица коэффициентов K разделена на две части

$$K = [K_1 \ K_e], \quad (10-75)$$

а K_e имеет размерность $1 \times (n-1)$. Реализация замкнутой системы показана на рис. 10.12. Поскольку мы ввели дополнительную переменную $\hat{x}_{e1}(t)$, это не единственно возможная реализация. Следующий пример иллюстрирует синтез наблюдателя пониженного порядка.

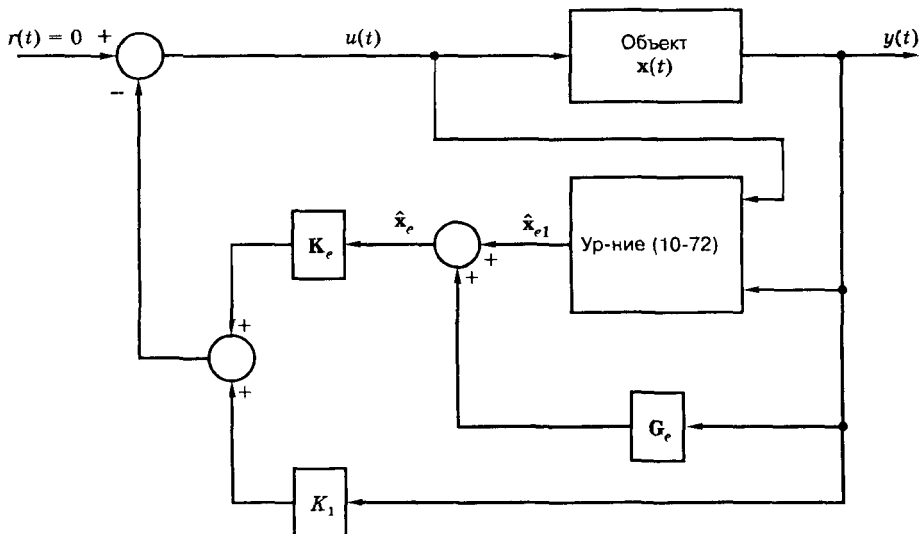


Рис. 10.12. Система с наблюдателем пониженного порядка

Пример 10.7

Рассмотрим систему управления спутником из примера 10.6. Уравнения объекта имеют вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t).$$

Регулятор, синтезированный для этой системы в примере 10.2, обеспечивает выполнение характеристического уравнения:

$$\alpha_c(s) = s^2 + 8s + 32 = 0,$$

из которого следует, что замкнутая система имеет постоянную времени $\tau = 0,25$ с и коэффициент затухания $\zeta = 0,707$. Как и в примере 10.3, мы синтезируем наблюдатель с постоянной времени $\tau = 0,1$ с; следовательно, этот наблюдатель первого порядка должен иметь характеристическое уравнение

$$\alpha_e(s) = s + 10 = 0.$$

Сравнивая уравнения состояния спутника с уравнениями (10-57), имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & A_{1e} &= 1 & b_1 &= 0 \\ A_{e1} &= 0 & A_{ee} &= 0 & B_e &= 1 \end{aligned}$$

По формуле Аккермана (10-69):

$$\alpha_c(\mathbf{A}_{ee}) = 0 + 10 = 10$$

и

$$\mathbf{G}_e = \alpha_e(\mathbf{A}_{ee})[\mathbf{A}_{1e}]^{-1}[1] = 10.$$

Тогда на основании (10-72):

$$\dot{\hat{x}}_{e1}(t) = (\mathbf{A}_{ee} - \mathbf{G}_e \mathbf{A}_{1e}) \hat{x}_{e1}(t) + (\mathbf{A}_{e1} - \mathbf{G}_e \mathbf{a}_{11} + \mathbf{A}_{ee} \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{A}_{1e} \mathbf{G}_e) y(t) + (\mathbf{B}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{b}_1) u(t).$$

После подстановки матриц и коэффициентов получим уравнение первого порядка:

$$\dot{\hat{x}}_{e1}(t) = [0 - (10)(1)] \hat{x}_{e1}(t) + [0 - (10)(0) + (0)(10) - (10)(1)(10)] y(t) + [1 - (10)(0)] u(t),$$

или

$$\dot{\hat{x}}_{e1}(t) = -10\hat{x}_{e1}(t) - 100y(t) + u(t).$$

Оцениваемое значение $\hat{x}_2(t)$ получим на основании (10-73):

$$\hat{x}_2(t) = \hat{x}_{e1}(t) + G_e y(t) = \hat{x}_{e1}(t) + 10y(t).$$

Этим завершается процедура синтеза наблюдателя пониженного порядка, который оценивает угловую скорость спутника по результату измерения его углового положения. Все вычисления для данного примера выполняются с помощью программы MATLAB:

```
alphae = [1 10];
A = [0 1; 0 0]; B = [0; 1];
a11 = A(1, 1); Ae1 = A(2, 1);
A1e = A(1, 2); Aee = A(2, 2);
b1 = B(1); Be = B(2);
G = polyvalm(alphae, Aee) * inv(A1e) * 1
```

Пример 10.8

Здесь мы продолжим рассмотрение системы управления спутником из примера 10.7. Если мы объединим все уравнения объекта с уравнениями наблюдателя и законом управления

$$u(t) = -\mathbf{K}[y(t) \hat{x}_e(t)]^T = [-32 \ -8][y(t) \hat{x}_e(t)]^T = -32y(t) - 8\hat{x}_e(t),$$

то получим граф системы, изображенный на рис. 10.13. Характеристическое уравнение для этого графа, полученное с помощью формулы Мейсона, имеет вид:

$$\Delta(s) = 1 + 10s^{-1} + 8s^{-1} + 32s^{-2} + 80s^{-2} - 800s^{-3} + (-10s^{-1})(-80s^{-2} - 32s^{-2}) = 1 + 18s^{-1} + 112s^{-2} + 320s^{-3} = 0.$$

Умножая это уравнение на s^3 и представляя его в виде сомножителей, получим:

$$s^3 + 18s^2 + 112s + 320 = (s^2 + 8s + 32)(s + 10) = 0,$$

что является произведением характеристических уравнений системы управления, $\alpha_c(s)$, и наблюдателя, $\alpha_e(s)$.

По графу мы можем также определить передаточную функцию регулятора-наблюдателя. Разомкнем систему в ветви с единичным коэффициентом усиления, следующей за узлом для $U(s)$ и

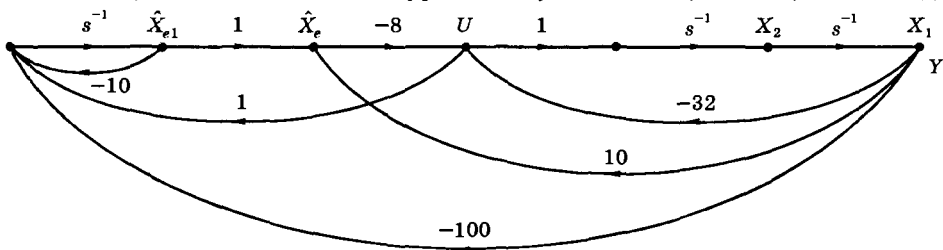


Рис. 10.13. Система к примеру 10.8

вычислим передаточную функцию $-G_{ec}(s)$ от $Y(s)$ к $U(s)$:

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -G_{ec}(s) = \frac{-32(1+10s^{-1}) - 80(1+10s^{-1}) + 800s^{-1}}{1+10s^{-1}+8s^{-1}} = \frac{-112 - 320s^{-1}}{1+18s^{-1}} = -\frac{112s+320}{s+18}.$$

Заметим, что для данной передаточной функции $Y(s)$ является входом, а $U(s)$ — выходом. Тогда систему можно представить в виде структуры с единичной обратной связью, как показано на рис. 10.14. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 1 + \frac{112s+320}{s+18} \cdot \frac{1}{s^2} = 0,$$

или

$$s^3 + 18s^2 + 112s + 320 = 0,$$

что подтверждает правильность вычислений с помощью формулы Мейсона.

Сделаем последнее замечание к этому примеру. В передаточной функции регулятора-наблюдателя можно явно выделить нуль и полюс:

$$G_{ec}(s) = \frac{112(s+2,86)}{s+18}.$$

Отсюда видно, что в процессе синтеза был получен регулятор с опережением по фазе, обладающий коэффициентом усиления на нулевой частоте $320/18 = 17,8$. Это и не удивительно, т.к. диаграмма Найквиста для объекта показывает, что для обеспечения устойчивости системы управления *необходим* регулятор с опережением по фазе. Следовательно, какая бы процедура синтеза ни применялась, всегда будет получен регулятор с опережением по фазе.

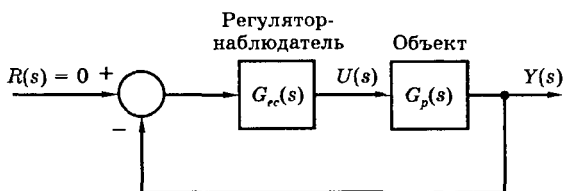


Рис. 10.14. Система к примеру 10.8

Пример 10.9

В конце данного раздела исследуем процесс отработки начальных условий в системе из примера 10.7. На графе, изображенном на рис. 10.13, мы обозначили $\hat{x}_{e1}(t)$ как $x_3(t)$. Тогда уравнения состояния для замкнутой системы можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -112 & 0 & -8 \\ -212 & 0 & -18 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Эти уравнения были численно проинтегрированы в результате имитационного моделирования системы. Начальные условия были заданы следующими: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. Поскольку

$$x_3(t) = \hat{x}_{e1}(t) = \hat{x}_e(t) - 10y(t) = \hat{x}_2(t) - 10x_1(t),$$

то начальное условие для $x_3(t)$ должно быть равно

$$x_3(0) = \hat{x}_2(0) - 10x_1(0) = -10.$$

При этом начальное значение ошибки оценки будет равно нулю. Следовательно, в соответствии с (10-66), ошибка будет оставаться равной нулю в любой момент времени. Моделирование системы при таких начальных условиях показало, что ее реакция является точно такой же, как и в системе с полной обратной связью по состоянию из примера 10.2 (см. рис. 10.6), что подтверждает отсутствие ошибки оценки. Затем начальное условие $x_3(0)$ было задано равным нулю, а не -10 , как в первом случае. При этом реакция системы протекала с перерегулированием в 30%. Вычисление частотных характеристик системы, смоделированной по схеме рис. 10.14, показало, что запас по фазе составляет 46° — это лучше, чем в системе с наблюдателем полного порядка из примера 10.6 (там запас по фазе равнялся 38°).

10.6. Управляемость и наблюдаемость

В этом разделе мы обсудим некоторые проблемы, которые могут возникнуть при синтезе систем управления. Эти проблемы, в частности, связаны с синтезом системы на основе размещения полюсов, а также с проектированием наблюдателя состояния. Указанные проблемы очевидны из двух разновидностей формулы Аккермана, (10-23) и (10-44):

$$[10-23]: \quad K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B \ AB \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]^{-1}\alpha_c(A),$$

$$[10-44]: \quad G = \alpha_e(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Мы не рассматривали возможность ситуации, когда обратная матрица может не существовать. Если обратная матрица в (10-23) не существует, то говорят, что объект является *неуправляемым*, и все полюсы замкнутой системы не могут быть размещены в заданных точках. Если обратная матрица в (10-44) не существует, то говорят, что объект является *ненаблюдаемым*, и нельзя синтезировать наблюдатель, который оценивал бы все переменные состояния объекта. Более строгие определения этих терминов будут даны ниже.

Однако сначала мы покажем, что те же самые проблемы могут возникнуть и при классическом синтезе систем управления. Рассмотрим замкнутую систему, изображенную на рис. 10.15. Заметим, что полюс датчика совпадает с нулем объекта. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

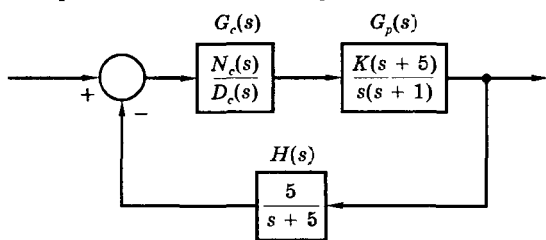


Рис. 10.15. Система с сокращением полюса и нуля

$$1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0, \quad (10-76)$$

или

$$1 + \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{K(s+5)}{s(s+1)} \frac{5}{s+5} = 0. \quad (10-77)$$

Чтобы представить характеристическое уравнение в виде полинома, умножим (10-77) на знаменатель дроби:

$$D_c(s)[s(s+1)(s+5)] + N_c(s)[5K(s+5)] = 0,$$

или

$$(s+5)[s(s+1)D_c(s) + 5KN_c(s)] = 0. \quad (10-78)$$

Однако, если в (10-77) сократить члены $(s+5)$ перед умножением выражения на знаменатель, то характеристическое уравнение примет вид второго сомножителя в (10-78):

$$s(s+1)D_c(s) + 5KN_c(s) = 0. \quad (10-79)$$

Следовательно, мы получили два разных характеристических уравнения, (10-78) и (10-79), для одной и той же системы. Какое из них является верным? Ответ таков — уравнение (10-78). Переходный процесс в системе будет иметь составляющую e^{-5t} , обусловленную

начальными условиями или некоторыми возмущениями, но только *не* входным воздействием на рис. 10.15. Соответствующий этой составляющей корень характеристического уравнения присутствует в (10-78), но отсутствует в (10-79). Поэтому на эту составляющую нельзя воздействовать входным сигналом на рис. 10.15, и с помощью регулятора не удастся сдвинуть данный корень характеристического уравнения в более предпочтительное положение; это свойство сохраняется при любом методе синтеза регулятора. Данная особенность будет рассмотрена ниже на конкретном примере.

Теперь мы дадим определение понятиям *управляемость* и *наблюдаемость*.

Управляемость. Линейная стационарная система

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (10-80)$$

называется *управляемой*, если можно найти некоторый входной сигнал $u(t)$, который переводил бы систему из начального состояния $x(0)$ в начало координат пространства состояний $x(t_0) = 0$ за конечное время t_0 .

Решение уравнений состояния (10-80), согласно (3-23), имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (10-81)$$

Чтобы система (10-80) была управляемой, должна существовать такая функция $u(t)$, которая удовлетворяла бы уравнению:

$$0 = \Phi(t_0)x(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t_0-\tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (10-82)$$

в случае конечного t_0 . Можно показать, что это условие выполняется, если матрица

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B] \quad (10-83)$$

имеет себе обратную [4].

Наблюдаемость. Линейная стационарная система (10-80) является *наблюдаемой*, если по значениям выходной функции $y(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, где t_1 — конечное время, можно определить начальное состояние $x(0)$.

Из (10-80) и (10-81) имеем:

$$y(t) = Cx(t) = C\Phi(t)x(0) + C \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (10-84)$$

Так, если известны $u(t)$ и $y(t)$ для $0 \leq t \leq t_1$, где t_1 — конечное время, то система является наблюдаемой, если это уравнение можно решить относительно $x(0)$. Можно показать, что система является наблюдаемой, если матрица

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (10-85)$$

имеет себе обратную [4]. Это иллюстрируется следующим примером.

и

$$CA^2 = CAA = [5 \ 0 \ -5] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = [-30 \ 5 \ 25].$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -30 & 5 & 25 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 25, следовательно, обратная матрица существует, а значит, система является наблюдаемой.

Приведенные вычисления проверяются с помощью следующей программы MATLAB:

```
A = [-1 1 0; 0 0 0; 5 0 -5]; B = [1; 5; 0]; C = [0 0 1];
Co = ctrb(A, B)
det(Co), pause
Ob = obsv(A, C)
det(Ob)
```

По инструкции *ctrb* вычисляется матрица управляемости, а по инструкции *obsv* — матрица наблюдаемости.

В рассмотренном примере система была неуправляемой, но наблюдаемой. Предположим, что в системе на рис. 10.15 произведены изменения, так что происходит сокращение нуля датчика и полюса объекта. В этом случае система будет управляемой, но ненаблюдаемой (см. задачу 10.15).

В большинстве систем, являющихся либо неуправляемыми, либо ненаблюдаемыми, либо и то и другое, происходит сокращение нуля и полюса. Следовательно, в результате такого сокращения модель системы имеет более низкий порядок. Система, в которой число переменных состояния больше, чем ее минимальный порядок, будет либо неуправляемой, либо ненаблюдаемой, либо и то и другое. Для примера рассмотрим электрическую схему, изображенную на рис. 10.17. Для этой схемы справедливы следующие уравнения:

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + R_1(i_1 + i_2) = e,$$

$$Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + R_1(i_1 + i_2) = e.$$

Эти уравнения можно привести к стандартной форме уравнений состояния:

$$\frac{di_1}{dt} = -\left[\frac{R+R_1}{L}\right]i_1 - \frac{R_1}{L}i_2 + \frac{1}{L}e,$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_1 - \left[\frac{R+R_1}{L}\right]i_2 + \frac{1}{L}e.$$

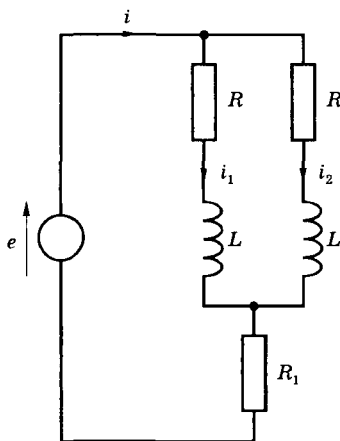


Рис. 10.17
Неуправляемая
электрическая схема

По этим уравнениям запишем матрицы **A** и **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R+R_1}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ -\frac{R_1}{L} & -\frac{R+R_1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{R+2R_1}{L^2} \\ -\frac{R+2R_1}{L^2} \end{bmatrix},$$

и матрица управляемости (10-83) принимает вид:

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{R+2R_1}{L^2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R+2R_1}{L^2} \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, следовательно, система неуправляема.

Заметим, что в рассмотренной нами схеме две параллельные RL -ветви могут быть объединены в одну цепь с сопротивлением $R/2$ и индуктивностью $L/2$. Поэтому передаточная функция от входного напряжения к току $i(t)$ равна

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{(L/2)s + R/2 + R_1}.$$

Она имеет первый порядок, тогда как модель схемы в переменных состояния — второй. Неуправляемость схемы очевидна также из того факта, что $e(t)$ влияет на $i_1(t)$ точно так же, как и на $i_2(t)$. Если $e(t)$ вызывает какое-то изменение в токе $i_1(t)$, то такое же изменение происходит в токе $i_2(t)$. Следовательно, две переменных состояния — токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ не могут быть за одно и то же конечное время сведены к нулю, за исключением случая, когда в начальный момент они были равны, т.е. $i_1(0) = i_2(0)$.

Важно отметить, что сокращение полюсов и нулей может происходить только в модели системы, но не в системе как таковой. Реальная система обладает определенными свойствами, а ее модель имеет полюсы и нули, которые некоторым приближенным образом описывают эти свойства. В реальной системе одна ее часть может обладать свойствами, которые совершенно противоположны свойствам другой части. В общем случае трудно ожидать, что свойства одной части будут в точности компенсироваться свойствами другой части. Однако, если они приблизительно компенсируют друг друга, то очень трудно влиять на соответствующие свойства систем или оценивать их. В этом и состоит физическая сторона проблемы, даже если математически все строго определено.

10.7. Системы при наличии входных воздействий

В предыдущих разделах рассматривались только регуляторы систем управления. В таких случаях у системы нет входного воздействия, а ее назначение сводится к тому, чтобы воз-

вращать все переменные состояния к нулю после того как они по той или иной причине приняли ненулевое значение. Однако во многих случаях система должна отслеживать входное воздействие. Тогда уравнения, позволяющие синтезировать регулятор, должны быть модифицированы; это и является предметом данного раздела.

10.7.1. Полная обратная связь по состоянию

Сначала мы рассмотрим систему с полной обратной связью по состоянию. В этом случае объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

при

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (10-86)$$

Единственной функцией, на которую можно повлиять, является входной сигнал объекта $u(t)$; следовательно, это можно сделать только с помощью входного воздействия $r(t)$. Таким образом, $u(t)$ принимает вид:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_r r(t). \quad (10-87)$$

Полагая, что матрица коэффициентов $\mathbf{K}$ выбрана исходя из желаемого характеристического уравнения замкнутой системы, единственным оставшимся параметром, который должен быть определен в процессе синтеза, является коэффициент K_r .

Коэффициент K_r можно определить, используя различные критерии синтеза. Если представить (10-87) в виде

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - \dots - K_n x_n(t) + K_r r(t), \quad (10-88)$$

то отсюда следует, что один из способов выбора K_r состоит в том, что вход $r(t)$ включается в линейную комбинацию переменных состояния. Например, предположим, что переменная состояния $x_1(t)$ соответствует выходу системы, который должен отслеживать изменение входного воздействия $r(t)$. Тогда совершенно логично выбрать K_r равным коэффициенту K_1 , при котором $u(t)$ принимает вид:

$$u(t) = K_1[r(t) - x_1(t)] - K_2 x_2(t) - \dots - K_n x_n(t). \quad (10-89)$$

Структурная схема такой системы изображена на рис. 10.18, откуда следует, что она представляет собой систему управления с единичной обратной связью и сигналом ошибки $e(t)$. Пример синтеза такой системы приводится ниже.

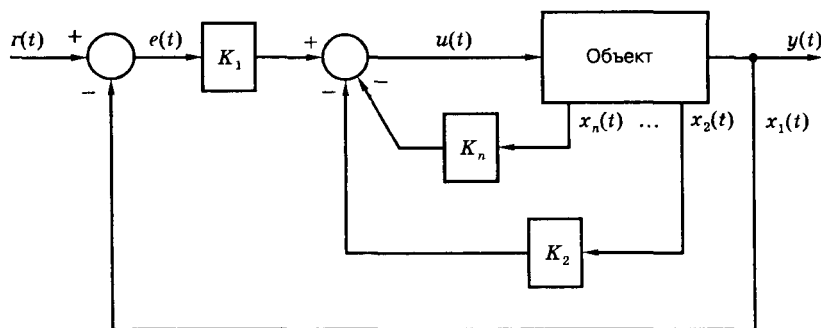


Рис. 10.18. К синтезу системы управления при наличии входного воздействия

Пример 10.11

Рассмотрим еще раз систему управления спутником из примера 10.2. Уравнения объекта имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

при матрице коэффициентов обратной связи

$$\mathbf{K} = [32 \ 8].$$

Для системы с единичной обратной связью входной сигнал объекта, согласно (10-89), равен

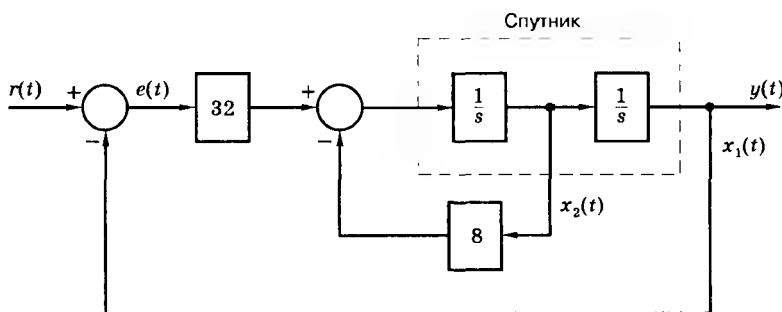
$$u(t) = 32[r(t) - x_1(t)] - 8x_2(t) = 32[r(t) - y(t)] - 8x_2(t).$$

Структура системы приведена на рис. 10.19, а ее переходная функция изображена на рис. 10.20. Система относится к типу I (см. раздел 5.5), и установившаяся ошибка при постоянном входном воздействии равна нулю. Переходная функция вычисляется с помощью программы MATLAB:

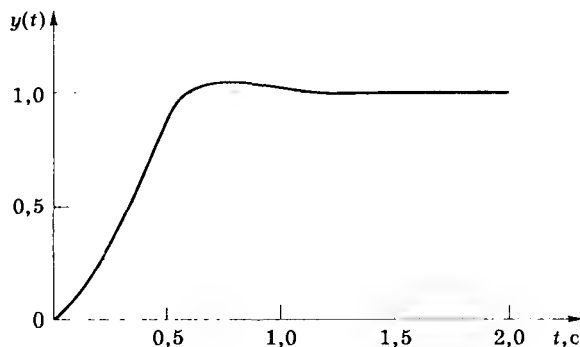
```
G = tf([0 0 32], [1 8 0]);
e10p11 = minreal(G/(1+G));
step(e10p11)
```

Рис. 10.19

Система
управления
спутником

**Рис. 10.20**

Переходная функция
к примеру 10.11



До сих пор мы рассматривали системы с единичной обратной связью. Но в общем случае коэффициент усиления датчика отличен от единицы. Если коэффициент усиления датчика, измеряющего переменную $x_1(t)$, равен H_{k1} (в предположении, что датчик безынерционный), то систему на рис. 10.18 следует видоизменить, включив этот коэффициент в цепь обратной связи от выхода ко входу. Поскольку общий коэффициент обратной связи по переменной $x_1(t)$ должен быть равен K_1 , то в системе на рис. 10.18 блок, обозначенный как K_1 , необходимо изменить на K_1/H_{k1} . Аналогичная операция должна быть проведе-

на и в других каналах обратной связи, если они содержат датчики, измеряющие соответствующие переменные. В случае, когда K_1 заменяется на K_1/H_{k1} , необходимо изменить масштаб входного сигнала, т.к. теперь вход и выход измеряются в разных единицах. Проблема учета коэффициента усиления датчика детально обсуждалась в разделе 5.1.

Подобную процедуру синтеза можно распространить и на случай, когда выходная переменная не равна $x_1(t)$, а представляет собой линейную комбинацию переменных состояния, т.е.

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t). \quad (10-90)$$

Тогда $u(t)$ можно выразить так

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_r r(t) = K_a[r(t) - y(t)] - K_b\mathbf{x}(t), \quad (10-91)$$

поскольку закон управления формируется за счет разности между входным и выходным сигналами. Таким образом,

$$u(t) = K_a r(t) - K_a \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - K_b \mathbf{x}(t) = K_a r(t) - [K_a \mathbf{C} + K_b]\mathbf{x}(t). \quad (10-92)$$

Сравнение (10-92) и (10-91) показывает, что $K_r = K_a$ и

$$K_a \mathbf{C} + K_b = \mathbf{K}.$$

Это матричное уравнение можно записать в виде:

$$K_a c_1 + K_{1b} = K_1 \quad (10-93)$$

$$K_a c_2 + K_{2b} = K_2$$

$$\vdots$$

$$K_a c_n + K_{nb} = K_n,$$

где c_i — элементы известной матрицы $\mathbf{C}$, K_{ib} — элементы неизвестной матрицы $\mathbf{K}_b$, а K_i — элементы известной матрицы $\mathbf{K}$. Таким образом, система (10-93) состоит из n уравнений с $(n+1)$ неизвестными $K_a, K_{1b}, K_{2b}, \dots, K_{nb}$. Поэтому один из коэффициентов должен быть определен исходя из других требований к синтезируемой системе. Очень часто в качестве такого требования выбирают ограничение на величину разности между $r(t)$ и $y(t)$ в установившемся режиме при постоянном значении $r(t)$.

10.7.2. Следящие системы с наблюдателями

Использование наблюдателя является очень эффективным, когда система предназначена для отработки входного сигнала. Простейший случай показан на рис. 10.8, где регулятор-наблюдатель рассматривается как фильтр, а при наличии входа мы получаем обычную систему с единичной обратной связью. В качестве первого этапа синтеза производится решение уравнений регулятора-наблюдателя с целью получения его передаточной функции по выражению (10-4). Затем регулятор-наблюдатель реализуется в виде фильтра и, наконец, добавляется вход, как показано на рис. 10.8. Данный случай иллюстрируется примером.

Пример 10.12

Рассмотрим систему управления спутником из примера 10.4. Объект имеет передаточную функцию $1/s^2$, а передаточная функция регулятора-наблюдателя, полученная после примера 10.4, имеет выражение:

$$G_{cc}(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292}.$$

Синтез завершается заданием входного сигнала, как показано на рис. 10.21. Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях изображена на рис. 10.22. Влияние наблюдателя очевидно из сравнения рис. 10.20 и рис. 10.22: переходная функция системы с наблюдателем имеет существенно большее перерегулирование. Переходная функция вычисляется с помощью программы MATLAB:

```
Gp = tf([1], [1 0 0]);
Gc = tf([1440 3200], [1 28 292]);
e10p11 = minreal(Gc*Gp/(1+ Gc*Gp));
step(e10p11, 2)
```

Рис. 10.21

Система управления спутником

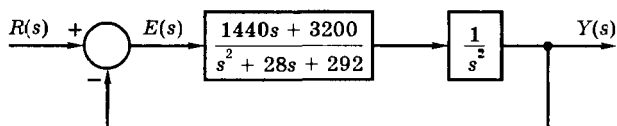
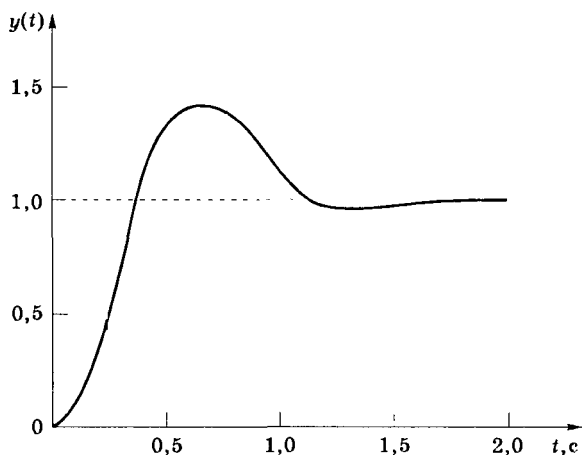


Рис. 10.22

Переходная функция к примеру 10.12



Теперь мы рассмотрим более общий случай, когда в системе управления с наблюдателем регулятор имеет дополнительный вход. Если используется наблюдатель полного состояния, то его уравнение имеет вид:

$$[10-34]: \quad \dot{\hat{x}}(t) = (A - GC) \hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t),$$

а входной сигнал объекта

$$u(t) = -K\hat{x}(t). \quad (10-94)$$

В каждое из этих уравнений мы можем добавить член, учитывающий входное воздействие:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC) \hat{x}(t) + Bu(t) + Gy(t) + Mr(t), \quad (10-95)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + Nr(t).$$

Предполагается, что матрицы K и G были вычислены при синтезе регулятора. Следовательно, n элементов матрицы M и коэффициент N должны быть определены из других соображений. Поскольку необходимо найти $(n+1)$ неизвестных, то эта процедура обладает большой гибкостью. Синтез системы такого типа, предполагая, что она имеет единичную обратную связь, а целью является определение M и N , рассматривается в задаче 10.19.

10.7.3. Обработка сигналов с помощью ПИ-регуляторов

Важным требованием, предъявляемым ко многим системам управления, является их способность отрабатывать (воспроизводить) постоянное входное воздействие без установившейся ошибки. При классическом синтезе мы добиваемся этого с помощью ПИ-регуляторов, если объект относится к типу 0. Аналогичный подход можно использовать и при синтезе путем размещения полюсов. Разумеется, введение в систему ПИ-регулятора будет увеличивать ее порядок на единицу; если порядок объекта равен n , то система будет иметь порядок $n + 1$.

Мы будем считать, что синтезируемая система имеет структуру, изображенную на рис. 10.23. Заметим, что передаточная функция от $y(t)$ к $m(t)$ равна

$$\frac{M(s)}{Y(s)} = -\left(K_1 + \frac{K_{n+1}}{s}\right) = -G_c(s), \quad (10-96)$$

где через $G_c(s)$ обозначена передаточная функция ПИ-регулятора. При необходимости коэффициент K_1 может быть введен в прямую цепь параллельно с интегратором и коэффициентом K_{n+1} ; характеристическое уравнение системы при этом не изменится. Этот случай будет рассмотрен ниже на примере.

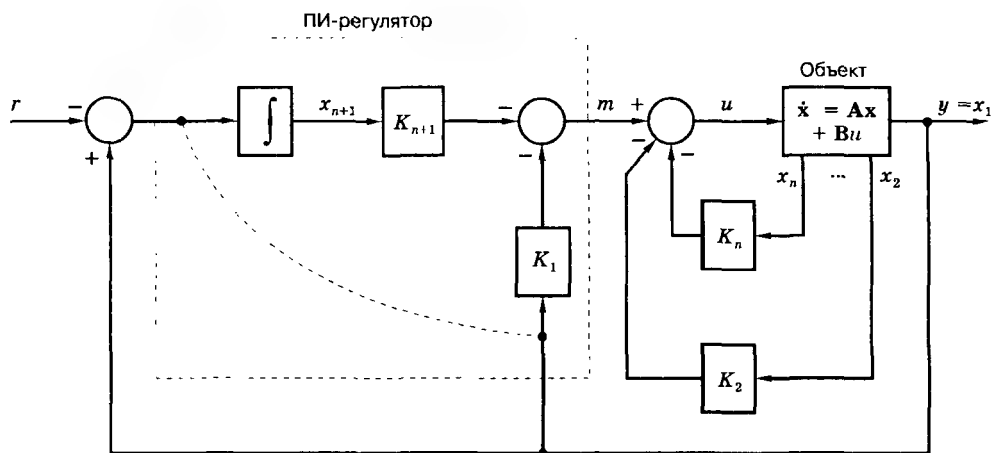


Рис. 10.23. К размещению полюсов при наличии ПИ-регулятора

На рис. 10.23 уравнения состояния объекта имеют вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (10-97)$$

$$y(t) = Cx(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t) = x_1(t).$$

Уравнение для интегратора:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = Cx(t) - r(t) = x_1(t) - r(t). \quad (10-98)$$

Входной сигнал объекта:

$$u(t) = -Kx(t) - K_{n+1}x_{n+1}(t), \quad (10-99)$$

где K и K_{n+1} выбираются исходя из желаемого размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы. Процедура синтеза заключается в следующем. Подставляя (10-99) в (10-97), получим:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) - BK_{n+1}x_{n+1}(t). \quad (10-100)$$

Затем мы объединим переменную $x_{n+1}(t)$ с вектором $\mathbf{x}(t)$ и образуем таким способом вектор состояния системы с обратной связью $\mathbf{x}_a(t)$. Тогда на основании (10-97), (10-98) и (10-100) можно записать:

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_{n+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t) \quad (10-101)$$

Этому уравнению можно придать иную форму:

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) - \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a \mathbf{x}_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t), \quad (10-102)$$

где

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_a = [\mathbf{K} \ K_{n+1}]. \quad (10-103)$$

Уравнению (10-102) соответствует характеристическое уравнение $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a| = 0$, которое имеет стандартную форму, используемую при синтезе систем путем размещения полюсов. Характеристическое уравнение имеет порядок $(n+1)$; следовательно, желаемое характеристическое уравнение $\alpha_{ca}(s)$ мы должны задать в виде:

$$\alpha_{ca}(s) = s^{n+1} + \alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0. \quad (10-104)$$

Таким образом,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a| = s^{n+1} + \alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0. \quad (10-105)$$

В данном уравнении $(n+1)$ значений α_i известны, а неизвестными являются $(n+1)$ коэффициентов K_i . Для их определения можно либо в (10-105) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой части и получить таким образом систему из $(n+1)$ линейных уравнений, либо воспользоваться формулой Аккермана (10-23). Формула Аккермана для решения уравнения (10-105) имеет вид:

$$\mathbf{K}_a = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] (\mathbf{B}_a \ \mathbf{A}_a \mathbf{B}_a \ \dots \ \mathbf{A}_a^n \mathbf{B}_a)^{-1} \alpha_{ca}(\mathbf{A}_a). \quad (10-106)$$

Данная процедура синтеза иллюстрируется следующим примером.

Пример 10.13

В этом примере мы синтезируем систему управления скоростью двигателя постоянного тока. Модель двигателя изображена на рис. 10.24; в схеме дополнительно использован усилитель мощности с коэффициентом $K = 4$. Эта модель была рассмотрена в разделе 2.7, а описание ее

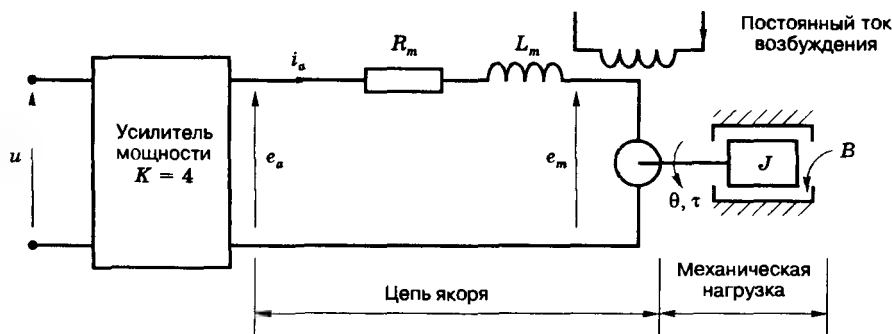


Рис. 10.24. Система к примеру 10.13

уравнениями в переменных состояния — в разделе 3.2. Схема (граф) имитационного моделирования двигателя приведена на рис. 10.25. Переменными состояния являются скорость вращения двигателя, $x_1(t) = \omega(t)$, и ток якоря, $x_2(t) = i_a(t)$. Эти две переменные легко могут быть измерены.

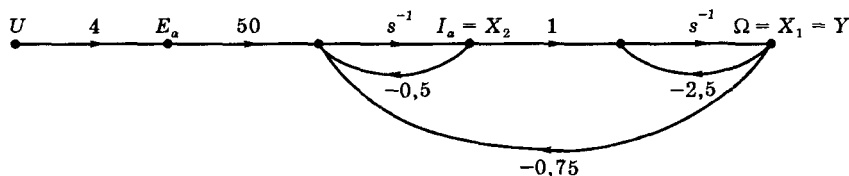


Рис. 10.25. Схема моделирования объекта

В этом примере на рис. 10.25 параметрам двигателя присвоены соответствующие численные значения. Предположим, что номинальное входное напряжение двигателя равно 24 В, а скорость измеряется в об/мин. На основании рис. 10.25 передаточная функция двигателя имеет вид:

$$G_p(s) = \frac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)}.$$

Этой передаточной функции соответствует коэффициент усиления на нулевой частоте, равный 25; следовательно, номинальная скорость двигателя равна $25 \times 24 = 600$ об/мин. Поскольку коэффициент усиления усилителя мощности равен 4, то номинальное напряжение на его входе равно 6 В. Общая передаточная функция объекта таким образом равна:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = KG_p(s) = \frac{200}{(s+1)(s+2)},$$

а его модель в переменных состояния задается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 \\ -0,75 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Предположим, что замкнутая система должна иметь время установления 0,8 с; тогда мы выберем постоянную времени $\tau = 0,2$ с, а желаемое характеристическое уравнения системы в виде

$$\alpha_{ca}(s) = (s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125 = 0.$$

Затем мы образуем на основании (10-103) расширенные матрицы с учетом уравнений состояния объекта:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 & 0 \\ -0,75 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 & 0 \\ -0,75 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2 \ K_3] = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 & 0 \\ -0,75 - 200K_1 & -0,5 - 200K_2 & -200K_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а характеристический полином, согласно (10-105),

$$\alpha_{ca}(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a| = \begin{vmatrix} s+2,5 & -1 & 0 \\ 0,75+200K_1 & s+0,5+200K_2 & 200K_3 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= s(s + 2,5)(s + 0,5 + 200K_2) + (0,75 + 200K_1)s + 200K_3 = \\
 &= s^3 + (3 + 200K_2)s^2 + (500K_2 + 2 + 200K_1)s + 200K_3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125.
 \end{aligned}$$

Отсюда определяем неизвестные коэффициенты:

$$K_2 = \frac{12}{200} = 0,06; \quad K_3 = \frac{125}{200} = 0,625;$$

$$200K_1 = 75 - 2 - 500(0,06) = 43 \Rightarrow K_1 = \frac{43}{200} = 0,215.$$

Синтез можно проверить с помощью программы MATLAB, в которой использована формула Аккермана:

```

Aa = [-2.5 1 0; -0.75 -0.5 0; 1 0 0]; Ba = [0; 200; 0];
Pp = [-5 -5 -5];
Ka = acker(Aa, Ba, Pp), pause
B = [C; 0; -1]; C = [1 0 0]; D = 0
e10p13 = ss((Aa - Ba * Ka), B, C, D);
step(e10p13)

```

С помощью двух последних инструкций производится имитационное моделирование синтезированной системы. Граф замкнутой системы приведен на рис. 10.26, а уравнения состояния для нее имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 & 0 \\ -43,75 & -12,5 & -125 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t).$$

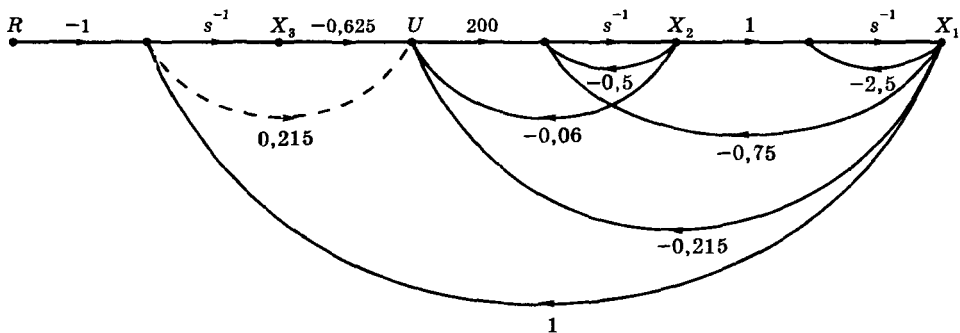


Рис. 10.26. Схема моделирования к примеру 10.13

Передаточную функцию системы можно определить с помощью компьютера непосредственно по этим уравнениям либо применив формулу Мейсона к графу на рис. 10.26. В любом случае получим результат:

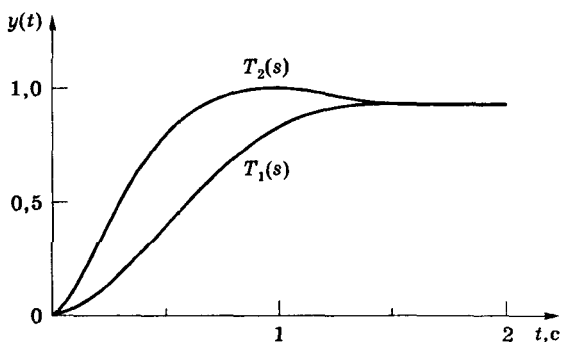
$$T_1(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{125}{s^3 + 15s^2 + 75s + 125}.$$

Как отмечалось выше, коэффициент K_1 можно ввести в прямую цепь параллельно с интегратором, как показано пунктирной линией на рис. 10.26. В этом случае получим передаточную функцию

$$T_2(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{43s + 125}{s^3 + 15s^2 + 75s + 125}.$$

Переходные функции для двух реализаций системы приведены на рис. 10.27. Во втором случае, при передаточной функции $T_2(s)$, реакция быстрее, т.к. имеется канал прямой передачи от ступенчатой входной функции к напряжению, подаваемому на двигатель. В первом же случае, при передаточной функции $T_1(s)$, ступенчатая функция интегрируется, так что напряжение, подаваемое на двигатель, в начале процесса аппроксимируется линейной функцией. На практике можно использовать обе реализации; первая из них предпочтительнее тогда, когда нежелательно подвергать объект «удару» со стороны ступенчатого воздействия.

Рис. 10.27
Переходные функции
к примеру 10.13



10.8. Заключение

В этой главе была описана процедура синтеза, основанная на применении современной теории управления, а именно на размещении полюсов передаточной функции замкнутой системы. Практическая реализация этой процедуры требует, чтобы все переменные состояния объекта были доступны измерению. Строго говоря, это требование свойственно всем современным процедурам синтеза. По причине сложности или невозможности измерения всех переменных состояния объекта, для реализации системы управления необходим наблюдатель состояния того или иного вида. Поэтому в данной главе большое внимание уделено синтезу наблюдателей состояния. Очень часто введение в систему наблюдателя состояния уменьшает ее запасы устойчивости. Проверкой, что этого в действительности не произошло, может служить построение диаграммы Найквиста.

Существуют и другие современные методы синтеза, которые мы не рассматривали в этом кратком введении в современную теорию управления [4, 5]. Одна из наиболее популярных процедур заключается в минимизации некоторой математической функции переменных состояния и входных переменных системы; такие системы называются оптимальными. Преимуществом этого метода синтеза является то, что он применим также к линейным нестационарным системам. Все методы синтеза, представленные в данной книге, относятся только к линейным стационарным системам. Синтез оптимальных систем также требует использования полной обратной связи по состоянию, но в данном случае элементы матрицы **K** являются функциями времени. Методами современной теории управления можно также синтезировать оптимальный наблюдатель состояния, называемый *фильтром Калмана* [6].

Литература

1. B.Friedland. *Control System Design*. New York: McGraw-Hill, 1986.
2. J.E.Ackermann. «Der Entwurf linearer regelungs Systems in Zustandstraum», *Regelungstech Process-Datenverarb*, 7(1972): 297-300.
3. P.S.Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol.3. Orlando, FL: Academic Press, 1979.
4. W.L.Brogan. *Modern Control Theory*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
5. F.L.Lewis and Y.L.Syrmos. *Optimal Control*, 2nd ed. New York: Wiley, 1996.
6. P.S.Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol.1. Orlando, FL: Academic Press, 1979.

Задачи

10.1. Рассмотрите устойчивую линейную стационарную систему, описываемую уравнениями состояния $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$.

- (а) Предположим, что к системе приложен входной сигнал $u(t)$ и заданы начальные условия $\mathbf{x}(0)$. Покажите, что решение уравнений состояния, $\mathbf{x}(t)$, состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит от начальных условий $\mathbf{x}(0)$ и не зависит от $u(t)$, а другое зависит только от $u(t)$ и не зависит от $\mathbf{x}(0)$.
- (б) Предположим, что вход $u(t)$ до момента $t = 0$ длительное время сохранял постоянное значение, так что система находится в установившемся состоянии. Если в момент $t = 0$ переменные состояния получают приращение $\Delta\mathbf{x}(0)$, то покажите, что их изменение при $t > 0$ зависит только от $\Delta\mathbf{x}(0)$.

10.2. Рассмотрите модель спутника на рис. 10.2 (3) и систему управления на рис. 10.2. Обратите внимание, что единственное отличие данной системы от системы, рассмотренной в примере 10.1, состоит в том, что изменен момент инерции спутника.

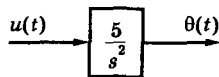


Рис. 10.2 (3)

- (а) Путем размещения полюсов синтезируйте систему управления, которая в замкнутом состоянии имела бы постоянную времени $\tau = 1,0$ с и $\zeta = 0,707$. В качестве двух переменных состояния примите $\theta(t)$ и $d\theta(t)/dt$.
- (б) Запишите уравнения состояния для замкнутой системы.
- (в) Предположим, что передаточные функции датчиков положения и скорости представлены, соответственно, постоянными коэффициентами 0,01 и 0,4, а все коэффициенты, необходимые для синтеза замкнутой системы, реализуются с помощью обычных усилителей. Изобразите структурную схему замкнутой системы, обозначив на ней датчики, усилители и их коэффициенты.
- (г) Проверьте решение данной задачи с помощью компьютера.

10.3. На рис. 10.3 (3) изображен объект управления. Предположим, что это модель электромеханической системы позиционирования и что $y(t)$ есть положение.

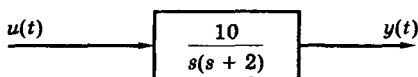


Рис. 10.3 (3)

- (а) Предложите модель данного объекта в переменных состояния, приняв в качестве этих переменных положение и скорость его изменения.

- (б) Вычислите коэффициенты обратной связи по состоянию, при которых положение полюсов замкнутой системы обеспечивало бы постоянную времени системы 0,5 с, а последняя обладала бы критическим демпфированием.
 - (в) Повторите п. (б), если постоянная времени системы должна быть равна 0,5 с, а $\zeta = 0,707$.
 - (г) Запишите уравнения состояния замкнутой системы для условий пп. (б) и (в).
 - (д) Проверьте все результаты с помощью компьютера.
- 10.4. Докажите, что формула Аккермана (10-23) для случая синтеза системы по методу размещения полюсов может быть использована для синтеза наблюдателя состояния, в результате чего получается выражение (10-44).
- 10.5. (а) Для системы из задачи 10.2 синтезируйте наблюдатель полного порядка, приняв, что его постоянная времени в два раза меньше постоянной времени системы, а наблюдатель обладает критическим демпфированием.
- (б) Получите передаточную функцию регулятора-наблюдателя, $G_{ec}(s)$, для системы, изображенной на рис. 10.8.
 - (в) Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы: $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0$. Убедитесь, что в этом уравнении присутствуют в виде произведения характеристические полиномы системы с обратной связью по состоянию и наблюдателя.
 - (г) Изобразите сигнальный граф замкнутой системы типа приведенного на рис. 10.10. На основании этого графа запишите уравнения состояния системы.
 - (д) Покажите, что характеристическое уравнение системы имеет корни, соответствующие п. (в).
 - (е) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (а), (б), (в) и (д).
- 10.6. (а) Синтезируйте наблюдатель полного порядка для системы из задачи 10.3. Постоянная времени наблюдателя должна быть в два раза меньше постоянной времени системы и при этом наблюдатель должен обладать критическим демпфированием.
- (б) Получите передаточную функцию регулятора-наблюдателя, $G_{ec}(s)$, для системы со структурой, изображенной на рис. 10.9.
 - (в) Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы: $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0$. Убедитесь, что в этом уравнении присутствуют в виде произведения характеристические полиномы системы с обратной связью по состоянию и наблюдателя.
 - (г) Изобразите сигнальный граф замкнутой системы по образцу рис. 10.10. На основании этого графа запишите уравнения состояния системы.
 - (д) Покажите, что характеристическое уравнение системы имеет корни, соответствующие п. в).
 - (е) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (а), (б), (в) и (д).
- 10.7. (а) Синтезируйте наблюдатель пониженного порядка для системы из задачи 10.2, предполагая, что $x_1(t)$ — измеряемая переменная. Постоянная времени наблюдателя должна быть в два раза меньше постоянной времени системы.
- (б) Изобразите сигнальный граф замкнутой системы по образцу рис. 10.13. По этому графу определите передаточную функцию регулятора-наблюдателя, $G_{ec}(s)$, для системы, структура которой приведена на рис. 10.14.
 - (в) Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы: $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0$. Убедитесь, что в этом уравнении присутствуют в виде произведения характеристические полиномы системы с обратной связью по состоянию и наблюдателя.
 - (г) По сигнальному графу из п. (б) запишите уравнения состояния системы.
 - (д) Получите характеристическое уравнение замкнутой системы, используя матрицы, найденные в п. (г). Убедитесь, что это уравнение совпадает с полученным ранее в п. (в).

- 10.8. (а) Синтезируйте наблюдатель пониженного порядка для системы из задачи 10.3, считая, что $x_1(t)$ — измеряемая переменная. Постоянная времени наблюдателя должна быть в два раза меньше постоянной времени системы.
- (б) Изобразите сигнальный граф замкнутой системы по образцу рис. 10.13. По этому графу определите передаточную функцию регулятора-наблюдателя, $G_{ec}(s)$, для системы, структура которой приведена на рис. 10.14.
- (в) Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы: $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0$. Убедитесь, что в этом уравнении присутствуют в виде произведения характеристические полиномы системы с обратной связью по состоянию и наблюдателя.
- (г) По сигнальному графу из п. (б) запишите уравнения состояния системы.
- (д) Получите характеристическое уравнение замкнутой системы, используя матрицы, найденные в п. (г). Убедитесь, что это уравнение совпадает с полученным ранее в п. (в).
- (е) Проверьте результаты решения задачи с помощью компьютера.
- 10.9. Наблюдатели, рассмотренные в данной главе, синтезировались на основании идеи о том, что передаточные функции от входа к восстановленному состоянию и к действительному состоянию равны. Рассмотрите систему управления спутником из примера 10.8, граф которой приведен на рис. 10.13. Докажите, что если $K = 0$, т.е. система является разомкнутой, то передаточная функция $X_2(s)/U(s)$ равна передаточной функции $X_c(s)/U(s)$.
- 10.10. Рассмотрите систему управления спутником из примера 10.7, в которой был синтезирован наблюдатель пониженного порядка, позволяющий оценивать величину скорости по результату измерения положения. Поскольку скорость является производной от положения, то можно ожидать, что наблюдатель в некотором смысле подобен дифференциатору. Изобразите диаграмму Боде, соответствующую передаточной функции наблюдателя $\hat{X}_c(s)/Y(s)$. На эту же диаграмму нанесите диаграмму Боде для идеального дифференциатора и поясните их сходства и отличия.
- 10.11. Рассмотрите систему управления спутником из примера 10.7.
- (а) Синтезируйте наблюдатель пониженного порядка с постоянной времени 0,05 с, т.е. примите $\alpha_c(s) = s + 20$.
- (б) Для этого наблюдателя повторите задачу 10.10.
- (в) Сравните результаты п. (б) и задачи 10.10 и поясните, как повлияет увеличение быстродействия наблюдателя (уменьшение его постоянной времени) на его фильтрующие свойства в отношении высокочастотного шума.
- (г) На основании вашего ответа на п. (в) объясните, как бы вы изменили процедуру синтеза наблюдателя, чтобы улучшить его фильтрующие свойства в отношении высокочастотного шума.
- 10.12. Для системы, представленной на рис. 10.12 (3), запишите уравнения состояния, считая, что $x_1(t)$ есть переменная состояния верхнего блока, а $x_2(t)$ — нижнего блока.
- (а) Определите, является ли эта система управляемой.
- (б) Определите, является ли эта система наблюдаемой.
- (в) Объясните результаты пп. (а) и (б) путем анализа свойств системы (с математической точки зрения).
- (г) С помощью MATLAB проверьте результаты решения задачи.

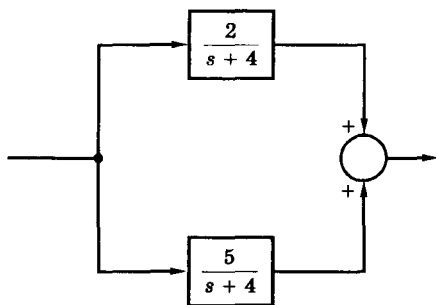


Рис. 10.12 (3)

10.13. С помощью MATLAB рассчитайте реакцию замкнутых систем на начальные условия для приведенных ниже задач. Для систем, в которых используется наблюдатель, рассмотрите два варианта: когда начальные условия в объекте и наблюдателе одинаковы и когда они различны.

- (а) Задачи 10.2 и 10.5.
(б) Задачи 10.3 и 10.6.

10.14. (а) В системе, изображенной на рис. 10.15, замените передаточные функции на следующие:

$$G_p(s) = \frac{5}{s+3}; \quad H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Исследуйте данную систему на управляемость и наблюдаемость, воспользовавшись процедурой примера 10.10 для построения модели в переменных состояния.

- (б) Проверьте результаты с помощью MATLAB.

10.15. (а) В системе, изображенной на рис. 10.15, замените передаточные функции на следующие:

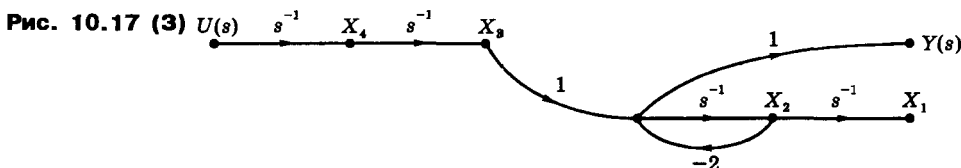
$$G_p(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}; \quad H(s) = \frac{s+3}{s+1}.$$

Исследуйте данную систему на управляемость и наблюдаемость, воспользовавшись процедурой примера 10.10 для построения модели в переменных состояния.

- (б) Проверьте результаты с помощью MATLAB.

10.16. (а) В системе управления спутником из примера 10.5 предположите, что датчик углового положения θ имеет коэффициент передачи 0,1 В/рад. Модифицируйте граф системы на рис. 10.10, включив в него датчик, так чтобы характеристические уравнения наблюдателя и системы в целом остались неизменными.

- (б) Повторите п. (а) применительно к примеру 10.8 и рис. 10.13.



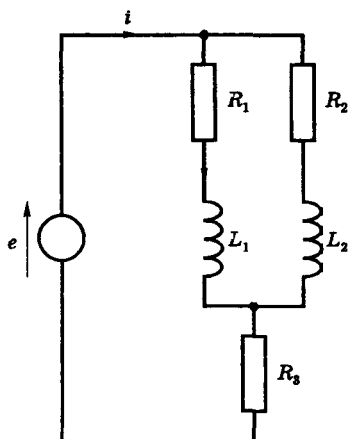
10.17. Рассмотрите систему, схема моделирования которой в виде графа приведена на рис. 10.17 (3).

- (а) Запишите уравнения состояния для этой системы.
(б) С помощью формулы Мейсона определите передаточную функцию системы.
(в) Обратите внимание, что в системе четыре переменных состояния, а передаточная функция имеет второй порядок. Говорят, что системы подобного вида имеют неминимальную реализацию, т.к. число переменных состояния в них превышает порядок передаточной функции. Определите, является ли данная система управляемой и наблюдаемой.
(г) С помощью MATLAB проверьте результат п. (в).

10.18. Рассмотрите электрическую цепь на рис. 10.18 (3).

- (а) Определите передаточную функцию $I(s)/E(s)$.
(б) Запишите уравнения состояния для данной цепи, выбрав в качестве переменных состояния токи, протекающие через катушки индуктивности.
(в) Определите, при каких ограничениях на величины сопротивлений и индуктивностей эта цепь будет неуправляемой.
(г) Покажите, что условия, полученные в п. (в), являются теми же самыми, при которых порядок передаточной функции из п. (а) уменьшается до первого.

Рис. 10.18 (3)



- 10.19. Система управления спутником из примера 10.12, приведенная на рис. 10.21, реализует уравнения (10-95), в которых учтено воздействие на входе системы. Для данного случая определите значения M и N . Для решения задачи полезно использовать рис. 10.10.

11. Дискретные системы

В этой главе мы рассмотрим три проблемы. Сначала мы введем понятие систем с дискретным временем. До сих пор в этой книге мы имели дело с системами, работающими в непрерывном времени, или с аналоговыми системами. Эти системы описываются дифференциальными уравнениями. Мы рассмотрели только такие системы, модели которых суть линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В этой главе мы рассмотрим *системы с дискретным временем*, которые описываются *разностными уравнениями*. Очень часто такие системы называют просто дискретными системами. Основным математическим аппаратом, используемым при анализе линейных стационарных аналоговых (непрерывных) систем, является преобразование Лапласа; для линейных стационарных дискретных систем мы будем пользоваться z -преобразованием. Вторым важным вопросом данной главы является z -преобразование, его теоремы и свойства. В заключение будут рассмотрены модели в переменных состояния для дискретных систем.

Как было показано выше, модель линейной стационарной непрерывной системы можно представить либо в виде дифференциального уравнения n -го порядка, либо в виде системы из n дифференциальных уравнений первого порядка, либо (если воспользоваться преобразованием Лапласа) в виде передаточной функции n -го порядка. Аналогичным образом модель линейной стационарной дискретной системы можно представить либо в виде разностного уравнения n -го порядка, либо в виде системы из n разностных уравнений первого порядка, либо (если применить z -преобразование) в виде передаточной функции n -го порядка.

11.1. Системы с дискретным временем

Чтобы ввести понятие системы с дискретным временем, предположим, что ПИ-регулятор в замкнутой системе управления должен быть реализован с помощью цифрового компьютера. Компьютер может выполнять операции сложения, умножения и численного интегрирования; следовательно, он вполне пригоден для реализации ПИ-регулятора. В действительности, с помощью цифрового компьютера можно реализовать любой из типов регуляторов, рассмотренных в данной книге; эти регуляторы описываются дифференциальными уравнениями, но подобные уравнения могут быть решены и численно.

Цифровая система управления, о которой только что шла речь, изображена на рис. 11.1. Цифровой компьютер в этой системе должен выполнять функцию корректирующего устройства (регулятора). Входным интерфейсом компьютера является аналого-цифровой преобразователь (АЦП) [1]; он необходим для преобразования непрерывного сигнала ошибки в двоичный код, который затем обрабатывается компьютером. Выходным интерфейсом компьютера является цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), кото-

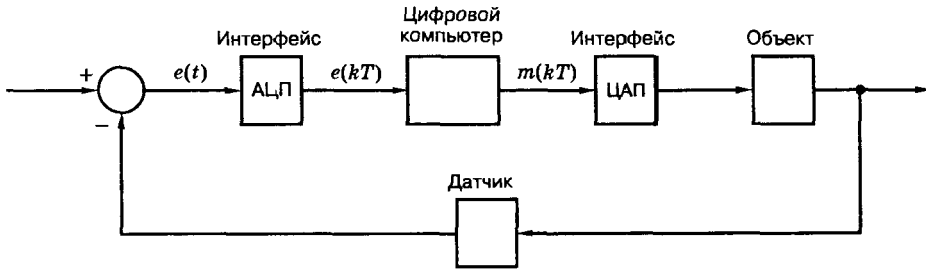


Рис. 11.1. Цифровая система управления

рый преобразует двоичный код, выводимый из компьютера, в напряжение, используемое для управления объектом.

Для облегчения анализа и синтеза мы будем считать, что компьютер выполняет только линейные операции, а хранящиеся в его памяти константы не зависят от времени. Иначе говоря, мы не будем рассматривать нелинейные регуляторы или регуляторы с переменными параметрами. Напомним, что ранее мы ограничились непрерывными регуляторами, которые тоже были линейными и параметры которых не зависели от времени. Поскольку компьютер на рис. 11.1 является цифровым устройством, работающим в реальном времени, он может принимать информацию только в дискретные моменты времени. Предположим, что эти моменты отстоят друг от друга на постоянную величину T секунд, начинаясь с $t = 0$. Тогда сигнал, поступающий в компьютер, можно представить в виде числовой последовательности $e(0), e(T), e(2T), \dots$, которую мы обозначим как $\{e(kT)\}$. Очень часто параметр T опускают, и тогда обозначение превращается в $\{e(k)\}$.

Мы будем считать, что время, затрачиваемое компьютером на выполнение любых операций с входным сигналом, является ничтожно малым и им можно пренебречь (это допущение часто вполне оправдано). Таким образом, мы считаем, что если в момент $t = 0$ на вход компьютера поступил сигнал, то будучи обработанным, он вызовет появление сигнала на выходе компьютера также в момент $t = 0$, входной сигнал в момент $t = T$ обусловит появление выходного сигнала также в момент $t = T$, и т.д. Предположим, что при $t = 0$ вход компьютера равен $e(0)$, а выход — $m(0)$. Так как операция, выполняемая компьютером, должна быть линейной и независимой от времени, то мы можем выразить $m(0)$ в виде:

$$m(0) = b_0 e(0), \quad (11-1)$$

где $b_0 = \text{const}$. Если b_0 зависит либо от $e(0)$, либо от времени, то это уравнение не будет, соответственно, линейным или стационарным. В компьютере можно запомнить значения $e(0)$ и $m(0)$. Тогда $m(T)$ может представлять собой функцию $e(0)$, $m(0)$ и $e(T)$, например,

$$m(T) = b_0 e(T) + b_1 e(0) - a_1 m(0). \quad (11-2)$$

Аналогично, $m(2T)$ может иметь вид:

$$m(2T) = b_0 e(2T) + b_1 e(T) + b_2 e(0) - a_1 m(T) - a_2 m(0). \quad (11-3)$$

Эти уравнения называются *разностными* уравнениями. Общий вид линейного разностного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (где параметр T опущен) таков:

$$m(k) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_n e(k-n) - a_1 m(k-1) - \dots - a_n m(k-n). \quad (11-4)$$

Ниже мы покажем, что если непрерывный объект на рис. 11.1 также является линейным и стационарным, то всю систему можно смоделировать в виде разностного уравнения (11-4), но, конечно, более высокого порядка, чем регулятор. Теперь сравним (11-4) с линейным

дифференциальным уравнением n -го порядка, описывающим непрерывную систему с входом $e(t)$ и выходом $y(t)$:

$$y(t) = \beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} - \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} - \dots - \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}. \quad (11-5)$$

Уравнение, описывающее линейный аналоговый регулятор (фильтр) с постоянными параметрами, также имеет вид (11-5). Устройство, которое реализует такой фильтр (чаще всего это RC-фильтр на операционном усилителе), можно рассматривать как (аналоговый) компьютер, запрограммированный для решения уравнения (11-5). Аналогичным образом, уравнение (11-4) описывает линейный дискретный фильтр с постоянными параметрами, обычно называемый цифровым фильтром. Такой фильтр может быть реализован с помощью цифрового компьютера, запрограммированного для решения уравнения общего вида (11-4), или с помощью специализированного цифрового устройства, созданного для решения разностного уравнения конкретного вида. Рассмотрим еще раз систему управления на рис. 11.1. Цифровой компьютер должен быть запрограммирован для решения разностного уравнения вида (11-4). Задачей проектировщика системы управления является определение таких значений (1) периода квантования T , (2) порядка разностного уравнения n и (3) коэффициентов фильтра a , b , при которых система обладала бы желаемыми характеристиками. Реализация цифрового фильтра связана с дополнительными проблемами, такими, например, как длина машинного слова, необходимая для того, чтобы ошибка системы из-за округления в компьютере не вышла за допустимые пределы. Например, для автоматического управления посадкой самолетов на авианосцы США был спроектирован и реализован цифровой фильтр [2], имеющий 11-й порядок и работающий с периодом $T = 0,04$ с. Было установлено, что для удержания ошибки системы из-за округления в цифровом компьютере в допустимых пределах минимальная длина машинного слова должна составлять 32 бита. Кроме того, этот фильтр эквивалентен ПИД-регулятору, в котором предусмотрена эффективная фильтрация шума, принципиально необходимая в силу наличия канала дифференцирования сигнала. Операции интегрирования и дифференцирования выполняются численно; далее об этом в книге см. главу 13.

11.2. Методы преобразования

В линейных непрерывных стационарных системах с целью анализа и синтеза может быть использовано преобразование Лапласа. Например, альтернативным, но совершенно эквивалентным способом описания системы с уравнением (11-5) является передаточная функция, полученная в результате преобразования этого уравнения по Лапласу:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\beta_n s^n + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}. \quad (11-6)$$

Теперь мы определим преобразование, которое может быть использовано при анализе дискретных систем, моделируемых разностными уравнениями вида (11-4).

Дадим следующее определение преобразованию числовой последовательности.

z-преобразование. z-преобразование числовой последовательности $\{e(k)\}$ определяется как степенной ряд вида z^{-k} с коэффициентами, равными значениям $e(k)$. Это преобразование имеет вид:

$$E(z) = \mathcal{Z}[\{e(k)\}] = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \dots, \quad (11-7)$$

где $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ есть символ z -преобразования. Выражение (11-7) можно записать в виде

$$E(z) = \mathcal{Z}\{e(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k}. \quad (11-8)$$

z -преобразование определяется для любой числовой последовательности и может быть использовано при анализе любых систем, описываемых разностными уравнениями. Например, z -преобразование используется в задачах о вероятности дискретных событий, в которых $\{e(k)\}$ есть их вероятность [3].

Если последовательность $\{e(k)\}$ образуется из функции времени $e(t)$ путем взятия выборок каждые T секунд, то $e(k)$ следует понимать как $e(kT)$, т.е. T ради удобства просто опускается. Ниже мы приведем три примера, иллюстрирующих применение z -преобразования.

Пример 11.1

Задано выражение $E(z)$. Требуется найти последовательность $e(k)$.

$$E(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} + 0,5z^{-4} + \dots$$

Из (11-7) следует, что

$$\begin{aligned} e(0) &= 1 & e(4) &= 0,5 \\ e(1) &= -2 & & \\ e(2) &= 0 & & \\ e(3) &= 3 & & \end{aligned}$$

Далее мы определим z -преобразование двух часто встречающихся числовых последовательностей. Однако всегда, когда это будет возможно, мы будем пользоваться следующей формулой, позволяющей представить степенной ряд в замкнутой форме. Разложение в ряд функции $(1-x)^{-1}$ имеет вид [4]:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \quad (11-9)$$

С очевидностью следует, что этот ряд не сходится при $|x| \geq 1$. Одним из способов получения этого разложения является деление двух полиномов:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1-x \end{array} \quad \begin{array}{r} 1-x \\ 1+x+x^2+x^3+\dots \end{array} \quad (11-10)$$

$$\begin{array}{r} x \\ x-x^2 \\ x^2 \\ \vdots \end{array}$$

Метод деления числителя на знаменатель приведен здесь в связи с тем, что, как будет показано позже, он очень полезен при определении обратного z -преобразования. Следующий пример иллюстрирует, как из разложения в ряд может быть получено z -преобразование.

Пример 11.2

Найдем z -преобразование $e(k)$, если $e(k)$ равно единице при всех k . По определению z -преобразования (11-7),

$$E(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e_1(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_2(k)z^{-k} = E_1(z) + E_2(z)$$

Сравним этот ряд с (11-9). Если обозначить $z^{-1} = x$, то очевидно, что z -преобразование имеет вид:

$$E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z^{-1}| < 1.$$

Заметим, что $\{e(k)\}$ может быть получено в результате квантования единичной функции. Но при этом следует учитывать, что существуют и многие другие функции, которые через каждые T секунд имеют значение, равное единице.

Пример 11.3

Требуется определить z -преобразование $e(k) = e^{-akT}$.

$$E(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \dots = 1 + (e^{-aT}z^{-1}) + (e^{-aT}z^{-1})^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad |e^{-aT}z^{-1}| < 1$$

Заметим, что в данном примере последовательность $e(k)$ может быть получена в результате квантования функции $e(t) = e^{-at}$ каждые T секунд, начиная с $t = 0$.

Как и в случае преобразования Лапласа, каждое z -преобразование имеет свою область существования на комплексной плоскости. Эта область имеет значение $-\infty$, то z -преобразование интегрирования необходимо найти обратное z -преобразование [5]. Однако пользоваться таблицами как для прямого, так и для обратного z -преобразования мы не принимаем во внимание ту область, в которой это преобразование определено. Напомним, что точно так же мы не были связаны с областью существования преобразования Лапласа в главе 2, разделы 2-9.

В заключение отметим, что z -преобразование (11-8) является одностронним суммирование в выражении (11-8) производится для нижнего предела $k = 0$. Преобразование называется *двусторонним* [5]. В данной книге используется преобразование, которое называют *двусторонним* z -преобразованием.

11.3. Теоремы z -преобразования

В предыдущих главах отчетливо было продемонстрировано, какую пользу приносят теоремы преобразования Лапласа. Ниже мы увидим, что не менее важную роль играют теоремы z -преобразования. В этом разделе приводятся несколько теорем z -преобразования, их формальное доказательство.

11.3.1. Суммирование

Теорема. z -преобразование суммы числовых последовательностей равно $E_1(z) + E_2(z)$.

$$\mathcal{Z}\{\{e_1(k)\} + \{e_2(k)\}\} = E_1(z) + E_2(z).$$

Доказательство. Согласно определению z -преобразования,

11.3.2. Умножение на константу

Теорема. z-преобразование числовой последовательности, умноженной на константу, равно произведению этой константы и z-преобразования числовой последовательности, т.е.

$$\mathfrak{z}[a\{e(k)\}] = a\mathfrak{z}[\{e(k)\}] = aE(z). \quad (11-13)$$

Доказательство. Согласно определению z-преобразования,

$$\mathfrak{z}[a\{e(k)\}] = \sum_{k=0}^{\infty} ae(k)z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k} = aE(z).$$

11.3.3. Сдвиг на целое число тактов

Теорема. Пусть n — целое положительное число и $e(k) = 0$ при $k < 0$. Пусть также $\{e(k)\}$ имеет z-преобразование $E(z)$. Тогда

$$\mathfrak{z}[\{e(k-n)\}] = z^{-n}E(z) \quad (11-14)$$

и

$$\mathfrak{z}[\{e(k+n)\}] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(k)z^{-k} \right]. \quad (11-15)$$

Доказательство. Согласно определению z-преобразования,

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}[\{e(k-n)\}] &= e(-n) + e(-n+1)z^{-1} + \dots + e(0)z^{-n} + e(1)z^{-(n+1)} + \dots = \\ &= z^{-n}[e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \dots] = z^{-n}E(z), \end{aligned}$$

поскольку $e(k) = 0$ при $k < 0$. Это условие необходимо по той же причине, что и условие $e(t) = 0$, $t < 0$ для теоремы запаздывания в преобразовании Лапласа (см. приложение Б). В противном случае формулировка теоремы не была бы такой простой. Для доказательства (11-15) запишем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}[\{e(k+n)\}] &= e(n) + e(n+1)z^{-1} + e(n+2)z^{-2} + \dots = \\ &= z^n[e(0) + e(1)z^{-1} + \dots + e(n-1)z^{-n+1} + e(n)z^{-n} + e(n+1)z^{-n-1} + \\ &+ \dots - e(0) - e(1)z^{-1} - \dots - e(n-1)z^{-n+1}], \end{aligned}$$

т.е. мы добавили и вычли первые n членов последовательности $e(k)$. Тогда

$$\mathfrak{z}[\{e(k+n)\}] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(k)z^{-k} \right].$$

Как видим, эта теорема доказывается не так просто, как первая. Еще раз заметим, что в этой теореме n должно быть *положительным целым* числом.

Чтобы проиллюстрировать эту теорему, рассмотрим образец числовой последовательности, приведенный в таблице 11.1. Заметим, что последовательность $e(k-2)$ — это последовательность $e(k)$, сдвинутая назад на два периода. В результате запаздывания никакие значения $e(k)$ не теряются, поэтому z-преобразование для $e(k-2)$ может быть представлено в виде функции только от $E(z)$. Последовательность $e(k+2)$ образована сдвигом $e(k)$ в сторону опережения на те же два периода. Здесь первые два члена $e(k)$ теряются, поэтому z-преобразование для $e(k+2)$ не может быть представлено в виде простой функции от $E(z)$.

Таблица 11.1. Примеры сдвига

k	$e(k)$	$e(k-2)$	$e(k+2)$
0	1	0	0,3
1	0,5	0	0,2
2	0,3	1	0,15
3	0,2	0,5	—
4	0,15	0,3	—

Пример 11.4

В примере 11.3 было показано, что

$$\mathfrak{H}\{e^{-akT}\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{H}\{e^{-a(k-3)T} u((k-3)T)\} = z^{-3} \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} \right) = \frac{1}{z^2(z - e^{-aT})},$$

где $u(k)$ — дискретная единичная ступенчатая функция. Также,

$$\mathfrak{H}\{e^{-a(k+2)T}\} = z^2 \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} - 1 - e^{-aT} z^{-1} \right).$$

Дискретная единичная ступенчатая функция, использованная в примере 11.4, определяется как

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

11.3.4. Начальное значение

Теорема. Если z -преобразование для $\{e(k)\}$ равно $E(z)$, то

$$e(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z). \quad (11-16)$$

Доказательство. Поскольку

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \dots,$$

то (11-16) очевидно.

11.3.5. Конечное значение

Теорема. Если z -преобразование для $\{e(k)\}$ равно $E(z)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z), \quad (11-17)$$

при условии, что предел в левой части существует.

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}\{e(k+1)\} - \{e(k)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n e(k+1)z^{-k} - \sum_{k=0}^n e(k)z^{-k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [-e(0) + e(1)(1 - z^{-1}) + e(2)(z^{-1} - z^{-2}) + \dots + e(n)(z^{-n+1} - z^{-n}) + e(n+1)z^{-n}]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 1} \{ \{e(k+1)\} - \{e(k)\} \} = \lim_{n \rightarrow \infty} [e(n+1) - e(0)],$$

при условии, что предел в правой части существует. Кроме того, по теореме о сдвиге,

$$\{ \{e(k+1)\} - \{e(k)\} \} = z[E(z) - e(0)] - E(z) = (z-1)E(z) - ze(0).$$

Полагая в этом выражении $z \rightarrow 1$ и приравнявая его предыдущему, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [e(n+1) - e(0)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)E(z) - ze(0)],$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z),$$

при условии, что предел в левой части существует. Как и в случае теоремы о конечном значении в преобразовании Лапласа, предел в правой части может дать неверное значение, если предел в левой части не существует.

Пример 11.5

Как было показано в примере 11.2, если $e(k) = 1$ для всех k , то $E(z) = z/(z-1)$. Таким образом,

$$e(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-1/z} = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} z = 1$$

Как видим, и начальное, и конечное значение являются верными.

11.4. Решение разностных уравнений

Существуют три основных метода решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Первый (классический) метод состоит в нахождении общего и частного решений [6] подобно тому, как это делается при классическом решении линейных дифференциальных уравнений. Этот метод мы рассматривать не будем. Второй метод является рекуррентным; он используется при решении разностных уравнений с помощью цифрового компьютера. Мы проиллюстрируем его на примере, а затем рассмотрим третий метод.

Пример 11.6

Получим решение для $m(k)$ следующего уравнения:

$$m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1), \quad k \geq 0,$$

где

$$e(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ четное} \\ 0, & \text{если } k \text{ нечетное} \end{cases}$$

и как $e(-1)$, так и $m(-1)$ равны нулю. Решение для $m(k)$ можно получить, положив сначала в разностном уравнении $k = 0$, затем $k = 1$, затем $k = 2$ и т.д. В результате получим:

$$m(0) = e(0) - e(-1) - m(-1) = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$m(1) = e(1) - e(0) - m(0) = 0 - 1 - 1 = -2$$

$$m(2) = e(2) - e(1) - m(1) = 1 - 0 + 2 = 3$$

$$m(3) = e(3) - e(2) - m(2) = 0 - 1 - 3 = -4$$

$$m(4) = e(4) - e(3) - m(3) = 1 - 0 + 4 = 5 \text{ и т.д.}$$

Используя этот метод, можно определить $m(k)$ для любых значений k . При больших значениях k подобная процедура очень трудоемка, за исключением случаев, когда она выполняется на компьютере. Последний пример для $k = 0, 1, \dots, 5$ решается с помощью следующей программы MATLAB:

```
mkminus1 = 0; ekminus1 = 0; ek = 1;
for k = 0:5
    mk = ek - ekminus1 - mkminus1;
    [k ek mk]
    mkminus1 = mk;
    ekminus1 = ek;
    ek = 1 - ek;
end
```

В этой программе $ekminus1$ соответствует значению $e(k-1)$, ek — значению $e(k)$, $mkminus1$ — значению $m(k-1)$, а mk — значению $m(k)$. Инструкции в первой строке задают начальные значения переменных в разностном уравнении. Программирование цифрового фильтра аналогично данной программе.

В таблице 11.2 приведен алгоритм практической реализации цифрового фильтра. Легко можно сравнить шаги этого алгоритма с приведенной выше программой MATLAB. Дополнительный шаг 6 необходим, если фильтр должен работать в реальном времени; он реализуется с помощью специального таймера в виде микросхемы, входящего в состав компьютера.

Таблица 11.2 Алгоритм работы цифрового фильтра

1. Задать начальное состояние фильтра
2. Задать вход
3. Решить разностное уравнение
4. Выдать результат
5. Обновить память
6. Отсчитать время
7. Вернуться к шагу 2

В качестве второго примера применения рекуррентного метода решения разностных уравнений рассмотрим численное интегрирование дифференциального уравнения по методу Эйлера (см. раздел 3.6). Дано дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + be(t).$$

Для малого значения T производную $\dot{x}(t)$ можно приближенно представить как

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (приближенно) примет вид:

$$\frac{x(t+T) - x(t)}{T} = ax(t) + be(t).$$

Выражая отсюда $x(t+T)$, получим:

$$x(t+T) = (1 + aT)x(t) + bTe(t).$$

Переходя к дискретному времени $t = kT$, получим разностное уравнение:

$$x[(k+1)T] = (1 + aT)x(kT) + bTe(kT).$$

Мы видим, что интегрирование дифференциального уравнения методом Эйлера сводится к получению разностного уравнения. В действительности любой метод численного интегрирования может быть сведен к разностному уравнению [7] и запрограммирован для решения на цифровом компьютере, как это было показано выше. Более углубленно эта проблема затрагивается в задачах в конце данной главы.

Теперь рассмотрим третий метод решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на использовании z -преобразования. Рассмотрим следующее разностное уравнение n -го порядка, считая входную последовательность $\{e(k)\}$ известной:

$$m(k) + a_1 m(k-1) + \dots + a_n m(k-n) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_n e(k-n). \quad (11-18)$$

Используя теорему о сдвиге, запишем z -преобразование данного уравнения:

$$M(z) + a_1 z^{-1} M(z) + \dots - a_n z^{-n} M(z) = b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \dots + b_n z^{-n} E(z), \quad (11-19)$$

или

$$M(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} E(z). \quad (11-20)$$

Поскольку $E(z)$ известно, то $m(k)$ можно найти, применив обратное z -преобразование к выражению (11-20). Общие методы определения обратного z -преобразования будут рассмотрены в следующем разделе, а сначала мы проиллюстрируем один из них на примере.

Пример 11.7

Рассмотрим разностное уравнение из примера 11.6:

$$m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1); \quad e(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ четное} \\ 0, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Используя теорему о сдвиге, найдем z -преобразование этого уравнения:

$$M(z) = E(z) - z^{-1} E(z) - z^{-1} M(z),$$

или

$$M(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} E(z).$$

$E(z)$ определяется выражением:

$$E(z) = 1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots = \frac{1}{1-x} \Big|_{x=z^{-2}} = \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1}.$$

Таким образом,

$$M(z) = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2}{z^2+2z+1}.$$

Путем деления числителя на знаменатель можно представить $M(z)$ в виде степенного ряда:

$$\begin{array}{r} z^2 \\ z^2+2z+1 \quad | \quad z^2+2z+1 \\ \hline -2z-1 \\ -2z-4 \quad -2z^{-1} \\ \hline 3+2z^{-1} \\ 3+6z^{-1}+3z^{-2} \\ \hline -4z^{-1}-3z^{-2} \\ \vdots \end{array}$$

Итак,

$$M(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + \dots,$$

откуда видно, что $m(k)$ имеет те же самые значения, которые были получены рекуррентным методом в примере 11.6.

До сих пор мы рассматривали только разностные уравнения, для которых начальные условия были нулевыми. Решение, представленное в виде (11-20), характеризует, таким образом, только вынужденное движение системы. Чтобы учесть начальные условия при решении уравнения (11-18), заменим сначала k на $(k+n)$. Тогда это уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} m(k+n) + a_1 m(k+n-1) + \dots + a_n m(k) = \\ = b_0 e(k+n) + b_1 e(k+n-1) + \dots + b_n e(k). \end{aligned} \quad (11-21)$$

По теореме о сдвиге,

$$\mathcal{Z}\{m(k+i)\} = z^i [M(z) - m(0) - m(1)z^{-1} - \dots - m(i-1)z^{-(i-1)}]. \quad (11-22)$$

С помощью (11-22) можно найти z -преобразование уравнения (11-21), включив в него все начальные условия. Заметим, что если все начальные условия равны нулю, то z -преобразование уравнения (11-21) приведет к уже известному решению (11-20). Также обратим внимание, что начальными условиями для разностного уравнения n -го порядка относительно $m(k)$ должны быть значения $m(0), m(1), \dots, m(n-1)$. Термин *начальное условие* в данном случае имеет несколько иной смысл, чем для дифференциальных уравнений.

11.5. Обратное z -преобразование

Метод z -преобразования очень полезен для решения разностных уравнений; однако необходимо тем или иным способом получить обратное z -преобразование. Из многих известных методов нахождения обратного z -преобразования мы рассмотрим только два.

11.5.1. Метод разложения в степенной ряд

Этот метод заключается в делении числителя на знаменатель в выражении $E(z)$, в результате чего получается степенной ряд вида:

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \dots \quad (11-23)$$

Из определения z -преобразования следует, что коэффициенты этого степенного ряда представляют собой не что иное как значения последовательности $\{e(k)\}$. Этот метод был проиллюстрирован в примере 11.7. Приведем еще один пример.

Пример 11.8

Найдем значения $\{e(k)\}$ по $E(z)$ вида

$$E(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}.$$

Путем бесконечного деления получим

$$\begin{array}{r} z \\ z - 3 + 2z^{-1} \quad \overline{) z^2 - 3z + 2} \\ \underline{3 - 2z^{-1}} \quad \quad \quad z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots \\ 3 - 9z^{-1} + 6z^{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ \frac{7z^{-1} - 21z^{-2} + 14z^{-3}}{15z^{-2} - 14z^{-3}} \\ \vdots \end{array}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{array}{ll} e(0) = 0 & e(4) = 15 \\ e(1) = 1 & \dots \\ e(2) = 3 & e(k) = 2^k - 1 \\ e(3) = 7 & \dots \end{array}$$

В этом примере можно усмотреть явную функциональную зависимость $e(k)$ от номера k . В общем случае, если при обратном z-преобразовании используется метод разложения в степенной ряд, такую зависимость обнаружить очень трудно.

11.5.2. Метод разложения на простые дроби

Функцию $E(z)$ можно разложить на простые дроби точно так же, как это делается в преобразованиях Лапласа. Тогда для нахождения обратного z-преобразования можно воспользоваться таблицей z-преобразований. В таблице 11.3 представлены z-преобразования некоторых числовых последовательностей. Более полная таблица z-преобразований приведена в приложении В.

Таблица 11.3. z-преобразования

$\{e(k)\}$	$E(z)$
$\{1\}$	$\frac{z}{z-1}$
$\{k\}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\{k^2\}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\{a^k\}$	$\frac{z}{z-a}$
$\{ka^k\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\{\sin ak\}$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$\{\cos ak\}$	$\frac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$\{b^k \sin ak\}$	$\frac{bz \sin a}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$
$\{b^k \cos ak\}$	$\frac{z(z - b \cos a)}{z^2 - 2bz \cos a + b^2}$

Метод разложения на простые дроби описан в приложении Б и здесь не приводится. Однако применение его в отношении z -преобразования имеет одну особенность. Анализ таблицы 11.3 показывает, что числитель всех z -преобразований содержит множитель z . Поэтому на простые дроби раскладывается функция $E(z)/z$, а затем каждая дробь умножается на z , чтобы придать разложению надлежащую форму. Это обстоятельство мы проиллюстрируем на примере.

Пример 11.9

Рассмотрим функцию $E(z)$ из примера 11.8:

$$E(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Раскладывая $E(z)/z$ на простые дроби, получим:

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Следовательно

$$\mathfrak{z}^{-1}[E(z)] = \mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{-1}{z-1}\right] + \mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{1}{z-2}\right],$$

где через $\mathfrak{z}^{-1}[\cdot]$ обозначено обратное z -преобразование. По таблице 11.3 находим:

$$e(k) = -1 + 2^k,$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 11.8. Следующая программа MATLAB выполняет разложение на простые дроби:

```
[r p k] = residue([0 0 1], [1 -3 2])
```

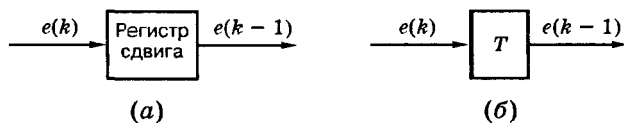
Отметим, что при разложении на простые дроби функции $E(z)$ каждая дробь имеет вид табличного z -преобразования. В этом смысле данная процедура полностью совпадает с методом, применяемым в преобразовании Лапласа. В случае, когда $E(z)$ не содержит в числителе множителя z и не имеет полюсов $z = 0$, то $E(z)$ удобно представить в виде $z^{-1}zE(z) = z^{-1}F(z)$. Тогда $F(z)$ уже будет иметь в числителе множитель z , и решение задачи для $f(k)$ может быть получено путем разложения $F(z)$ на простые дроби. По теореме о сдвиге на целое число тактов получим $e(k) = f(k-1)$. Если же $E(z)$ имеет при $z = 0$ полюс кратности m , то можно $E(z)$ представить в виде $(z^{-1}z)^{m+1}E(z) = z^{-(m+1)}F(z)$. При этом $F(z)$, как и ранее, будет содержать в числителе необходимый множитель z .

11.6. Схемы моделирования и графы

В этом разделе мы рассмотрим основные элементы, используемые для моделирования систем, которые описываются разностными уравнениями. Будем считать, что блок, изображенный на рис. 11.2 (а), представляет собой регистр сдвига. Каждые T секунд в регистр записывается число и одновременно то число, которое хранилось в регистре, выводится из него. Пусть $e(k)$ представляет число, записываемое в регистр в момент $t = kT$. Тогда в тот же самый момент из регистра выводится число $e(k-1)$. Символическое изображение такого элемента памяти представлено на рис. 11.2 (б). Подобный символ используется для обозначения любого устройства, выполняющего указанную выше операцию. Комбинация из таких устройств, блоков умножения на константу и сумматоров позволяет построить модель системы, описываемой разностным уравнением.

Рис. 11.2

Элемент идеальной задержки



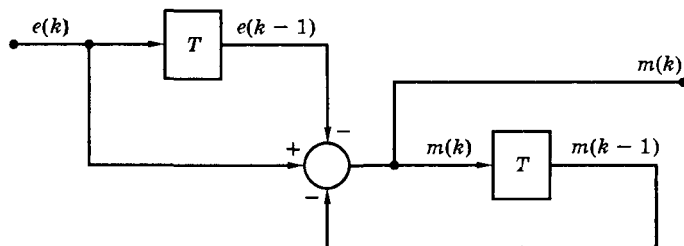
Рассмотрим разностное уравнение из примера 11.6:

$$m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1). \quad (11-24)$$

Схема моделирования этого уравнения приведена на рис. 11.3. Для выполнения всех указанных на рисунке операций можно разработать соответствующие электронные устройства. Предположим, что они существуют. Тогда, чтобы с помощью созданной нами машины решить пример 11.6, необходимо числа в обеих ячейках памяти (регистрах сдвига) установить равными нулю. После этого в моменты $t = 0, 2T, 4T, \dots$ входу $e(k)$ придется значение 1, а в моменты $t = T, 3T, 5T, \dots$ $e(k)$ полагается равным нулю. В моменты $t = kT$ на выходе мы получаем решение $m(k)$. Воспользовавшись этой схемой, читатель может проделать несколько первых итераций и убедиться, что выходная последовательность равна 1, -2, 3, -4 и т.д., как было получено ранее.

Рис. 11.3

Схема моделирования к примеру 11.6



Описанное выше устройство является специализированным компьютером, способным решать только разностные уравнения (11-24). Напомним, что компьютерная программа, приведенная после примера 11.6, также решает это разностное уравнение, но при этом используется компьютер общего назначения. Программные средства компьютера общего назначения управляют арифметическими регистрами, памятью и т.п. для того, чтобы выполнить операции, отраженные на рис. 11.3.

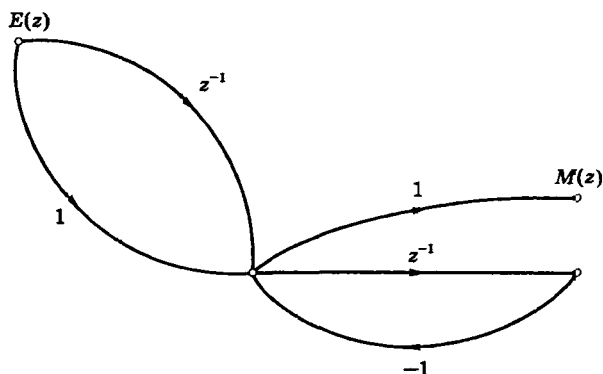
Напомним, что основным элементом, используемым при моделировании непрерывных систем, является интегратор (см. разделы 3.2 и 3.6). При моделировании дискретных систем таким основным блоком является элемент задержки (запоминания и сдвига) на T секунд.

Несколько отличным символическим представлением разностного уравнения является граф. Структурная схема, изображенная на рис. 11.3, это просто графическое представление уравнения или системы уравнений. Для этой цели можно также использовать граф, который содержит ту же самую информацию, что и структурная схема.

Теперь рассмотрим элемент задержки, изображенный на рис. 11.2 (б). z -преобразование входа $e(k)$ равно $E(z)$, а z -преобразование выхода $e(k-1)$ равно $z^{-1}E(z)$. Поэтому элемент задержки имеет передаточную функцию z^{-1} . (Напомним, что интегратор имеет передаточную функцию s^{-1} .) Обратимся еще раз к системе на рис. 11.3. Представление этой системы в виде графа показано на рис. 11.4. Передаточную функцию системы можно получить либо из рис. 11.3, если каждый элемент задержки в ней заменить его передаточной функцией, либо из рис. 11.4 с помощью формулы Мейсона (см. раздел 2.4).

Рис. 11.4

Граф к примеру 11.6



Применение формулы Мейсона к рис. 11.4 дает передаточную функцию

$$\frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{z - 1}{z + 1},$$

что совпадает с выражением, полученным в примере 11.7.

Рассмотрим теперь разностное уравнение n -го порядка общего вида

$$\begin{aligned} m(k) + a_{n-1}m(k-1) + \dots + a_0m(k-n) = \\ = b_n e(k) + b_{n-1}e(k-1) + \dots + b_0e(k-n). \end{aligned} \quad (11-25)$$

Используя теорему о сдвиге, найдем z -преобразование этого уравнения:

$$\begin{aligned} M(z) + a_{n-1}z^{-1}M(z) + \dots + a_0z^{-n}M(z) = \\ = b_n E(z) + b_{n-1}z^{-1}E(z) + \dots + b_0z^{-n}E(z). \end{aligned} \quad (11-26)$$

В этом уравнении связь между $E(z)$ и $M(z)$ определяется передаточной функцией $G(z)$:

$$M(z) = \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} E(z) = G(z)E(z). \quad (11-27)$$

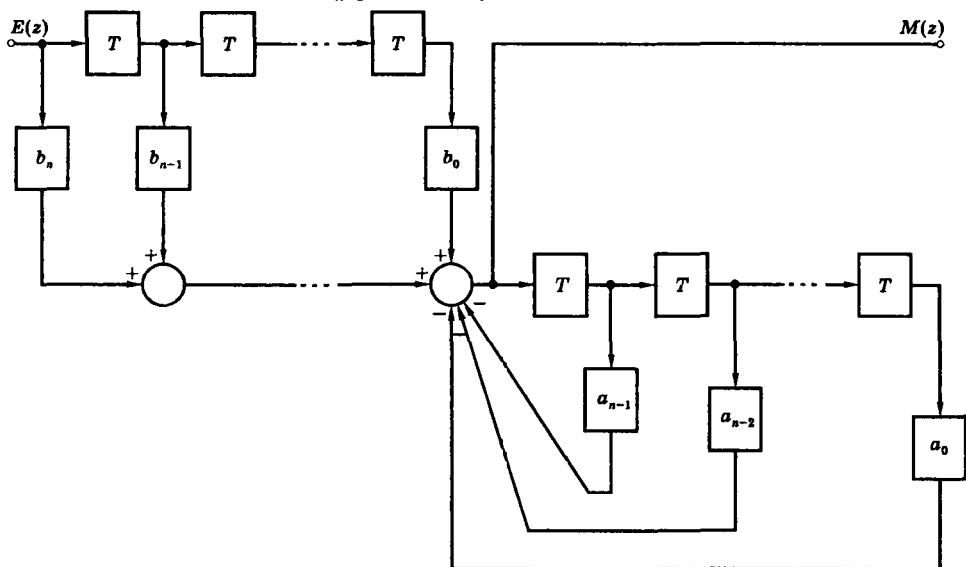
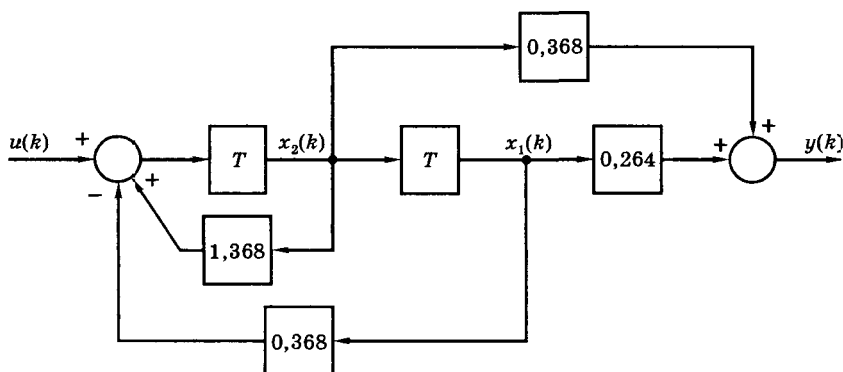
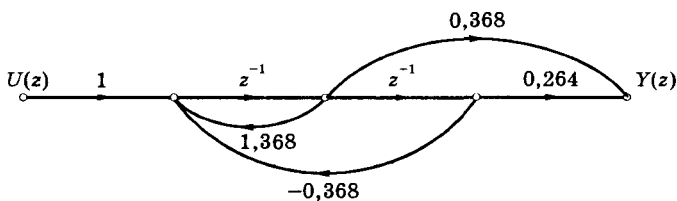
Рис. 11.5. Схема моделирования разностного уравнения n -го порядка

Рис. 11.7

Схема
моделирования



(a)



(б)

делирования изображен на рис. 11.7 (б). Применение к этому графу формулы Мейсона показывает, что схема моделирования имеет передаточную функцию (11-29).

Модель в переменных состояния для системы, описываемой уравнением (10-28), можно получить, приняв выход каждого элемента задержки в схеме моделирования за переменную состояния. Как показано на рис. 11.7 (а), эти переменные обозначены через $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Тогда входы элементов задержки будут соответственно равны $x_1(k+1)$ и $x_2(k+1)$, а уравнения состояния запишутся в виде:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -0,368x_1(k) + 1,368x_2(k) + u(k), \\ y(k) &= 0,264x_1(k) + 0,368x_2(k). \end{aligned} \quad (11-30)$$

Эти уравнения можно представить в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,368 & 1,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= [0,264 \quad 0,368] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11-31)$$

Используя стандартный вид векторов и матриц, можно также записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (11-32)$$

Описанным выше способом можно построить модель дискретной системы в переменных состояния, если заданы либо ее разностное уравнение, либо передаточная функция. Сначала необходимо изобразить схему моделирования системы. Затем выход каждого элемента задержки принять за переменную состояния. И, наконец, составить уравнения для входов

каждого элемента задержки и для каждого из выходов системы в зависимости от выходов элементов задержки и входов системы.

Общий вид уравнений состояния для многомерной линейной дискретной системы с постоянными параметрами выглядит как

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{aligned} \quad (11-33)$$

где вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность $(n \times 1)$, вектор входа $\mathbf{u}(k)$ — размерность $(r \times 1)$, а вектор выхода $\mathbf{y}(k)$ — размерность $(p \times 1)$. Следовательно, матрица коэффициентов системы $\mathbf{A}$, матрица входа $\mathbf{B}$ и матрица выхода $\mathbf{C}$ имеют размерности, соответственно, $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(p \times n)$. Матрица $\mathbf{D}$, характеризующая непосредственную связь между входом и выходом системы, имеет размерность $(p \times r)$.

Модель системы в виде (11-33) является линейной и стационарной. Если матрицы в этих уравнениях зависят от k , то система является линейной, но нестационарной. Для такой линейной дискретной системы с переменными параметрами модель в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (11-34)$$

11.8. Решение уравнений состояния

Группа разностных уравнений первого порядка, описывающих модель в переменных состояния для линейной стационарной дискретной системы, имеет вид:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \quad (11-35)$$

Для решения этих уравнений можно воспользоваться итерационным методом, описанным в разделе 11.4. Считая, что $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{u}(k)$ известны, можно вычислить (11-35) для $k=0$, затем для $k=1$, затем для $k=2$ и т.д.:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0), \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1), \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(n-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1). \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнений (11-35) можно выразить в общем виде:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k} \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \quad (11-36)$$

Общее решение уравнений (11-35) можно получить также с использованием z -преобразования. Для этого представим (11-35) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_{11}x_1(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}u_1(k) + \dots + b_{1r}u_r(k), \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= a_{n1}x_1(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}u_1(k) + \dots + b_{nr}u_r(k). \end{aligned}$$

Затем найдем z -преобразование этих уравнений:

$$\begin{aligned} z[X_1(z) - x_1(0)] &= a_{11}X_1(z) + \dots + a_{1n}X_n(z) + b_{11}U_1(z) + \dots + b_{1r}U_r(z), \\ &\vdots \\ z[X_n(z) - x_n(0)] &= a_{n1}X_1(z) + \dots + a_{nn}X_n(z) + b_{n1}U_1(z) + \dots + b_{nr}U_r(z). \end{aligned}$$

Те же уравнения, но в матричной форме:

$$z[\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)] = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z),$$

или

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z).$$

Отсюда выразим $\mathbf{X}(z)$:

$$\mathbf{X}(z) = z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z). \quad (11-37)$$

Применив к (11-37) обратное z -преобразование, мы получим тот же результат, что в (11-36), поэтому матрица перехода $\Phi(k)$ для уравнений состояния дискретной системы имеет вид:

$$\Phi(k) = \mathcal{Z}^{-1}(z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}) = \mathbf{A}^k. \quad (11-38)$$

Тогда решение (11-36) можно записать как

$$\mathbf{x}(n) = \Phi(n)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(n-1-k)\mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

Решение дискретных уравнений состояния проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 11.10

Рассмотрим дискретную систему с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

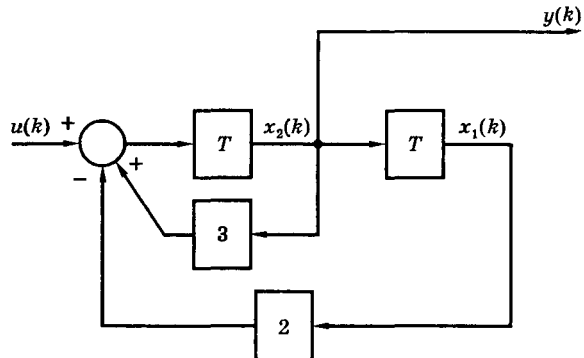
Чтобы получить модель в переменных состояния, изобразим сначала схему моделирования системы (рис. 11.8) и выход каждого элемента задержки примем за переменную состояния. По этой схеме запишем уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= [0 \ 1] \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Далее решим эти уравнения итерационным методом, считая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ и $u(k) = 1$ для всех k . Так как $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, то $y(0) = 0$. Последовательно увеличивая k , получим:

Рис. 11.8

Схема моделирования
к примеру 11.10



$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y(1) = 1,$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y(2) = 4,$$

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad y(3) = 11,$$

$$\mathbf{x}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 26 \end{bmatrix}, \quad y(4) = 26,$$

⋮

Итерационная процедура данного примера с успехом может быть реализована на компьютере.

В среде MATLAB ее можно выполнить с помощью программы `itsol.m` следующего вида:

```
for k = 0 : iter
    inputuk
    y(k + 1) = C * x + D * u;
    [k y(k + 1)]
    x1 = A * x + B * u;
    x = x1;
end
```

Вычисление $u(k)$ производится с помощью m-файла `inputuk.m`. Программа, вызывающая `itsol.m`, выглядит так:

```
A = [0 1; -2 3]; B = [0; 1]; C = [0 1]; D = 0;
x = [0; 0];
iter = 4;
itsol
```

В этой программе `iter` указывает на количество итераций.

Пример 11.11

Теперь мы решим уравнения состояния из предыдущего примера с помощью z-преобразования, воспользовавшись выражением (11-37). Итак,

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z-3 \end{bmatrix}; \quad |z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = z^2 - 3z + 2,$$

следовательно,

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}.$$

Согласно (11-37), учитывая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, получим:

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} U(z).$$

Поскольку $U(z) = z/(z-1)$, то

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)(z^2 - 3z + 2)} \\ \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 3z + 2)} \end{bmatrix},$$

или

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{-2z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}.$$

По таблице 11.3 находим:

$$y(k) = -k - 2 + 2(2)^k.$$

Следовательно, числовая последовательность $y(k)$ равна 0, 1, 4, 11, 26, ..., что подтверждает результат, полученный в примере 11.10.

В заключение установим связь между уравнениями состояния и передаточной функцией дискретной системы с одним входом и одним выходом. Из (11-37) при условии $x(0) = 0$ имеем:

$$X(z) = [zI - A]^{-1}BU(z). \quad (11-39)$$

Найдем z -преобразование уравнения выхода (11-33):

$$Y(z) = CX(z) + DU(z). \quad (11-40)$$

Подстановка в последнее уравнение $X(z)$ из (11-39) дает:

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z),$$

откуда следует, что система имеет передаточную функцию

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B + D. \quad (11-41)$$

Таким образом, передаточную функцию по уравнениям состояния можно определить двояким образом — либо с помощью матричной процедуры (11-41), либо с помощью формулы Мейсона, применив ее к графу, соответствующему уравнениям состояния.

Пример 11.12

Этот пример иллюстрирует определение передаточной функции по уравнениям состояния. Рассмотрим систему из примеров 11.10 и 11.11. Для этой системы

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [0 \ 1]x(k).$$

Матрица $[zI - A]^{-1}$ была получена в примере 11.11:

$$[zI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z-3}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{-2}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix}, \text{ где } \Delta = z^2 - 3z + 2.$$

Тогда на основании (11-39), учитывая что $D = 0$, определим передаточную функцию системы:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{z-3}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{-2}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & z \\ \Delta & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}.$$

Как видим, этот результат совпадает с передаточной функцией из примера 11.10. Его можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
A = [0 1; -2 3]; B = [0; 1]; C = [0 1];
```

```
[Gnum; Gden] = ss2tf(A, B, C, 0)
```

В двух последних разделах были кратко рассмотрены основы моделирования дискретных систем путем описания их переменными состояниями. Многие вопросы, конечно, остались за рамками этих разделов; например, преобразование подобия, рассмотренное в разделе 3.5 применительно к непрерывным системам, может быть также использовано и в отношении дискретных систем. Читатели, желающие получить более полную информа-

цию о методе переменных состояния в теории дискретных систем, могут обратиться к источникам [1] и [8].

11.9. Заключение

В этой главе мы познакомились с дискретными системами. Эти системы моделируются разностными уравнениями. Для решения таких уравнений был предложен метод z -преобразования; этот же метод будет использован позже при анализе и синтезе цифровых систем управления. Были приведены некоторые теоремы z -преобразования, имеющие практическое применение, и два метода нахождения обратного z -преобразования. Было также показано, как разностные уравнения, а следовательно и дискретные системы можно представить в виде схем моделирования и графов.

В заключительной части главы было показано, как дискретные системы могут быть описаны переменными состояния. Этот метод аналогичен соответствующему методу описания непрерывных систем, рассмотренному в главе 3, и большая часть этой главы полностью применима к анализу дискретных систем. Основные положения данной главы будут использованы ниже применительно к анализу и синтезу цифровых систем управления.

Литература

1. C.L.Phillips and H.T.Nagle, Jr. *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
2. «Software Implementation ALS Computer Program», Contract N00421-75-C-0058, Bell Aerospace Corporation, Buffalo, NY, March 1975.
3. A.W.Drake. *Fundamentals of Applied Probability Theory*. New York: McGraw-Hill, 1967.
4. R.E.Johnson and F.L.Kiokemeister. *Calculus with Analytic Geometry*. Boston: Allyn and Bacon, 1969.
5. C.L.Phillips and J.M.Parr. *Signals, Systems, and Transforms*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
6. F.Scheid. *Theory and Problems of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill (Schaum's Outline Series), 1968.
7. C.F.Gerald. *Applied Numerical Analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.
8. G.F.Franklin, J.D.Powell, and M.Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.

Задачи

- 11.1. (а) Определите z -преобразование числовой последовательности, полученной в результате квантования функции $e(t) = u(t-2)$ с частотой 5 Гц ($T = 0,2$ с). Получите z -преобразование в виде степенного ряда, а также в замкнутой форме.
- (б) Повторите п. (а) для $T = 1$ с.
- (в) Повторите п. (а) для $e(t) = t$ в случае, если $T = 0,1$ с или $T = 1$ с.
- (г) Повторите п. (в) для $e(t) = tu(t)$.

- 11.2. (а) Функция времени $e(t) = Ae^{-bt}$ подвергается квантованию с частотой 20 Гц. Полученная числовая последовательность имеет z -преобразование

$$E(z) = \frac{2z}{z - 0,9}.$$

Определите параметры A и b .

- (б) Используя результат п. (а), определите, какая функция $e(t)$, квантуемая с частотой 20 Гц, дает z -преобразование

$$E(z) = \frac{2}{z - 0,9}.$$

- (в) Проверьте результаты пп. (а) и (б), найдя z -преобразование каждой из функций $e(t)$.

- 11.3. Рассмотрите функцию $e(t)$, которая имеет преобразование Лапласа $\mathcal{L}[e(t)] = e^{-Ts}/[s(s+1)]$.

- (а) Определите $e(t)$.

- (б) Функция $e(t)$ квантуется с периодом T секунд. Определите z -преобразование полученной числовой последовательности, представив его в виде степенного ряда, а также в замкнутой форме.

- (в) Проверьте результат п. (б), применив к $E(z)$ обратное z -преобразование.

- 11.4. Дано z -преобразование

$$E(z) = \mathcal{Z}[e(t)] = \frac{z}{z+1}, \quad T = 0,01 \text{ с.}$$

- (а) Определите последовательность $e(kT)$.

- (б) Найдите функцию $e_1(t)$ такую, что $e_1(kT) = e(kT)$.

- (в) Найдите другую функцию $e_2(t)$ такую, что $e_2(kT) = e(kT)$ и $e_2(t) \neq e_1(t)$.

- (г) Изобразите на одном графике функции $e_1(t)$ и $e_2(t)$.

- 11.5. Дано z -преобразование

$$E(z) = \mathcal{Z}[e(t)] = \frac{3z}{(z-1)(z-0,5)(z-0,9)}.$$

- (а) Из этого выражения очевидно, что $e(0) = e(1) = 0$, а $e(2) = 3$. Докажите, что это действительно так.

- (б) Определите последовательность $e(k)$ как функцию от k .

- (в) Проверьте результат п. (б) с помощью MATLAB, применив метод разложения на простые дроби.

- (г) Покажите, что результат п. (б) соответствует утверждению в п. (а).

- (д) Даст ли теорема о конечном значении правильный результат?

- (е) Определите правильное конечное значение $e(k)$ с помощью двух разных методов.

- 11.6. Для каждой из приведенных ниже функций $E(z)$ найдите обратное z -преобразование, воспользовавшись двумя методами, рассмотренными в разделе 11.5. Сравните значения $e(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3$, полученные этими двумя методами.

$$(а) E(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,8)}; \quad (б) E(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0,8)};$$

$$(в) E(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,8)}; \quad (г) E(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-0,8)}.$$

- (д) Проверьте полученные результаты с помощью MATLAB, применив метод разложения на простые дроби.

- 11.7. (а) Синусоидальный сигнал $e(t) = 5\cos 20t$ квантуется с периодом 0,05 с. По таблице z -преобразований найдите z -преобразование полученной числовой последовательности.

- (б) Можно ли к функции $E(z)$ применить теорему о конечном значении? Почему?

- (в) Синусоидальный сигнал $e(t) = A \cos \omega t$ квантуется с периодом $T = 0,1$ с. Полученная числовая последовательность имеет z -преобразование

$$E(z) = \frac{5z(z - 0,6967)}{z^2 - 1,3934z + 1}.$$

Определите параметры A и ω .

- (1) Функция $e(t) = A_1 \cos \omega_1 t$ квантуется с периодом $T = 0,2$ с. В результате получается такое же z -преобразование, что и в п. (в). Какая связь существует между A и A_1 ? Между ω и ω_1 ? Почему?

- 11.8. Решите следующее разностное уравнение двумя предлагаемыми методами. Убедитесь, что оба метода дают один и тот же результат для $k = 2, 3, 4$ и 5 .

$$x(k+2) + x(k+1) + x(k) = 0$$

при $x(0) = 0$ и $x(1) = 2$.

- (а) Рекуррентный метод.
 (б) Метод z -преобразования с нахождением обратного z -преобразования по таблице.
 (в) Напишите программу MATLAB, позволяющую рекуррентным методом определить $x(k)$ для $k = 2, 3, 4, 5$.

- 11.9. Дано разностное уравнение

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k),$$

причем $x(-2) = x(-1) = 0$ и $e(k) = 1$ для $k \geq 0$.

- (а) Определите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, используя рекуррентный метод.
 (б) Модифицируйте программу MATLAB, приведенную после примера 11.6, с целью проверки результата п. (а).
 (в) Определите $X(z)$.
 (г) Определите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, используя метод разложения в степенной ряд.
 (д) Определите $x(k)$ как функцию от k . Вычислите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
 (е) С помощью MATLAB проверьте результат п. (д), используя метод разложения на простые дроби.

- 11.10. Дано разностное уравнение

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k),$$

где $x(-2) = x(-1) = 0$ и

$$e(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1 \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

- (а) Определите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, используя рекуррентный метод.
 (б) Модифицируйте программу MATLAB, приведенную после примера 11.6, с целью проверки результата п. (а).
 (в) Определите $X(z)$.
 (г) Определите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, используя метод разложения в степенной ряд.
 (д) Определите $x(k)$ как функцию от k . Вычислите $x(k)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

- 11.11. Определите конечное значение следующих функций по их z -преобразованию. Если это возможно, примените теорему о конечном значении.

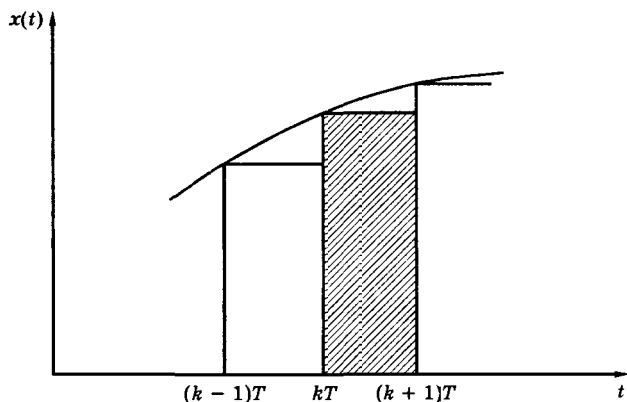
(а) $E(z) = \frac{0,1z}{z-1,2};$

(б) $E(z) = \frac{0,1z}{z-0,8};$

(в) $E(z) = \frac{0,1z}{z^2-1,7z+0,7};$

(г) $E(z) = \frac{0,1z}{z^2-1,7z+1}.$

Рис. 11.12 (3)



11.12. На рис. 11.12 (3) проиллюстрирована процедура численного интегрирования по методу прямоугольников. Согласно этому методу, интеграл функции $x(t)$, обозначенный как $y(t)$, аппроксимируется суммой площадей прямоугольников, как показано на рисунке.

(а) Запишите разностное уравнение, связывающее значения $y(kT)$, $y[(k+1)T]$ и $x(kT)$ для этого интегратора.

(б) Покажите, что передаточная функция этого интегратора имеет выражение

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{z-1}.$$

(в) Определите $y(t)$ для

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau$$

и вычислите $y(1)$.

(г) Интеграл в п. (в) подлежит вычислению по методу прямоугольников. Определите $X(z) = \mathcal{Z}[e^{-t}]$ при $T = 0,1$ с. Затем определите $y(kT)$ в п. (б) для $kT = 1$, т.е. вычислите значение интеграла в п. (в) при $t = 1$ с, используя метод прямоугольников.

(д) Сравните точное значение интеграла, полученное в п. (в), с его значением из п. (г).

(е) Повторите пп. (г) и (д) для случая $T = 0,01$ с и обратите внимание, насколько увеличилась точность вычислений.

(ж) Используя MATLAB, запрограммируйте разностное уравнение из п. (а) и проверьте результаты пп. (г) и (е).

11.13. На рис. 11.13 (3) проиллюстрирована процедура численного интегрирования по методу трапеций. Согласно этому методу, интеграл функции $x(t)$, обозначенный как $y(t)$, аппроксимируется суммой площадей трапеций, как показано на рисунке.

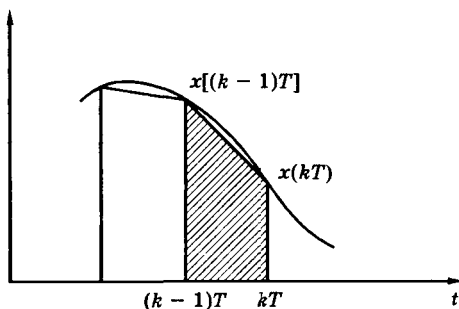


Рис. 11.13 (3)

(а) Запишите разностное уравнение, связывающее значения $y[(k-1)T]$, $y(kT)$, $x[(k-1)T]$ и $x(kT)$ для этого интегратора.

(б) Покажите, что передаточная функция этого интегратора имеет выражение

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(T/2)(z+1)}{z-1}.$$

(в) Повторите пп. (г) и (д) задачи 11.12 для интегрирования по методу трапеций.

11.14. Передаточная функция аналогового дифференциатора, s , обратна передаточной функции аналогового интегратора, $1/s$. Кажется вполне разумным, что это должно быть справедливо и для операций численного дифференцирования и интегрирования. Выражение, обратное передаточной функции интегратора по методу прямоугольников из задачи 11.12, дает:

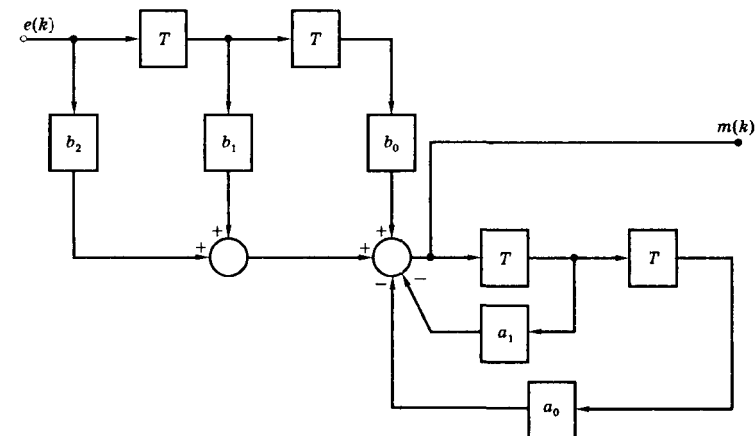
$$\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{T}.$$

(а) Считая, что $W(z)$ есть выход дифференциатора, а $X(z)$ — его вход, запишите разностное уравнение этого дифференциатора.

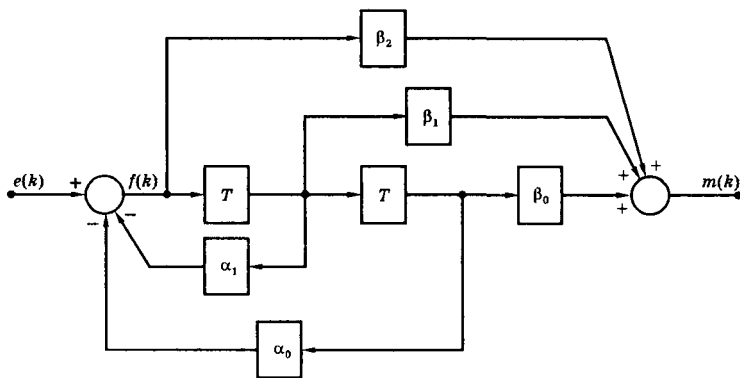
(б) Проиллюстрируйте графически процедуру численного дифференцирования наподобие рис. 11.12 (3).

11.15. На рис. 11.15 (3) приведены две разные схемы моделирования цифрового фильтра второго порядка.

(а) Запишите разностные уравнения для реализаций этих двух фильтров, основываясь на схемах моделирования. Каноническая форма программирования требует записи двух разностных уравнений.



(а)



(б)

Рис. 11.15 (3)

- (б) Определите, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты, чтобы оба фильтра имели одинаковую передаточную функцию.

11.16. Запишите разностные уравнения для каждой из приведенных ниже передаточных функций цифровых фильтров.

$$(a) \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0,1z}{z - 0,9}; \quad (б) \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0,333(z^2 - 1,7z + 0,9)}{z^2 - 1,8z + 0,9}.$$

11.17. Дана программа MATLAB, которая решает разностное уравнение цифрового фильтра:

```
s = 0;
e = 1;
for k = 0 : 4
    f = e - 0.7 * s;
    m = 0.8 * f + 0.4 * s;
    [k, m]
    s = f;
end
```

- (а) Изобразите схему моделирования этого фильтра и обозначьте на ней все переменные.
 (б) Определите передаточную функцию фильтра.
 (в) Найдите z -преобразование выходной переменной фильтра.
 (г) Используя обратное z -преобразование, определите выходную переменную.
 (д) Выполните программу MATLAB и проверьте результат п. (г).

11.18. Дискретная система описывается разностным уравнением

$$m(k+1) - 0,8m(k) = 1,3e(k+1) - 0,9e(k),$$

где $e(k)$ — вход, $m(k)$ — выход системы.

- (а) Изобразите схему моделирования системы.
 (б) Используя схему из п. (а), получите модель системы в переменных состояния.
 (в) По формуле (11-41) определите передаточную функцию системы.
 (г) Проверьте результат п. (в), определив передаточную функцию непосредственно по разностному уравнению.
 (д) Проверьте результат п. (в), применив к схеме моделирования формулу Мейсона.
 (е) Проверьте результат п. (в) с помощью MATLAB.

11.19. Дискретная система описывается разностным уравнением

$$y(k+2) - 1,2y(k+1) + 0,6y(k) = 0,035u(k+1) + 0,03u(k),$$

где $u(k)$ — вход, а $y(k)$ — выход системы.

- (а) Изобразите схему моделирования системы.
 (б) Используя схему из п. (а), получите модель системы в переменных состояния.
 (в) По формуле (11-41) определите передаточную функцию системы.
 (г) Проверьте результат п. (в), определив передаточную функцию непосредственно по разностному уравнению.
 (д) Проверьте результат п. (в), применив к схеме моделирования формулу Мейсона.
 (е) Проверьте результат п. (в) с помощью MATLAB.

11.20. Получите модели в переменных состояния для следующих систем, заданных своими передаточными функциями:

$$(a) \frac{z + 0,8}{(z - 1)^2}; \quad (б) \frac{0,02z^2 + 0,5z + 0,025}{z^3 - 2,6z^2 + 1,9z - 0,4};$$

$$(в) \frac{z + 0,95}{z^2 - 1,9z + 0,93}; \quad (г) \frac{0,5z^2}{(z - 1)^2}.$$

- (д) Проверьте правильность моделей, вычислив передаточные функции с помощью MATLAB.

11.21. Дискретная система описывается уравнениями состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,03 & 0,4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(k).$$

- (а) Полагая $x_1(0) = x_2(0) = 0$ и $u(k) = 1, k \geq 0$, получите решение для $y(k), k = 0, 1, 2, 3$, непосредственно по уравнениям состояния.
 (б) Получите решение для $y(k)$, применив к уравнениям состояния z -преобразование, и проверьте результат п.(а).
 (в) С помощью MATLAB проверьте результат п. (б).
 (г) Определите передаточную функцию $Y(z)/U(z)$.
 (д) По передаточной функции из п. (г) запишите разностное уравнение системы.
 (е) С помощью MATLAB проверьте передаточную функцию, полученную в п. (г).

11.22. Дискретная система описывается разностными уравнениями:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).$$

- (а) Определите матрицу перехода системы $\mathbf{A}^k$, используя выражение

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{z}^{-1} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}.$$

- (б) Проверьте результат п. (а) путем вычисления $\mathbf{A}^k$ для $k = 0, 1, 2, 3$ на основании исходной матрицы $\mathbf{A}$.
 (в) С помощью MATLAB проверьте результаты п. (б).

11.23. Дано разностное уравнение свободного движения дискретной системы:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).$$

- (а) Определите матрицу перехода системы $\Phi(k)$ как функцию от k .
 (б) Полагая $\mathbf{x}^T(0) = [1 \quad -2]$, вычислите $\mathbf{x}(3)$ непосредственно по разностному уравнению.
 (в) Определите $\mathbf{x}(3)$, воспользовавшись результатом п. (а), т.е. $\mathbf{x}(3) = \Phi(3)\mathbf{x}(0)$.
 (г) Определите $\mathbf{x}(3)$ с помощью MATLAB.

12. Импульсные системы

В главе 11 было дано математическое определение дискретной системы. Согласно этому определению, дискретная система — это система, которая описывается (моделируется) разностным уравнением. Сигнал в любой точке такой системы представляет собой числовую последовательность, например, $\{e(k)\}$. Во многих системах, таких как цифровые системы управления, некоторые из этих числовых последовательностей получаются в результате квантования непрерывного сигнала. Чтобы понять, как работают такие системы, необходимо изучить эффекты, связанные с квантованием непрерывного сигнала. Этому вопросу посвящена часть данной главы. Поняв эти эффекты, можно будет разработать математические модели цифровых систем управления, необходимые для их анализа и синтеза.

12.1. Представление данных в импульсной форме

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 12.1. В этой системе сигнал $e(t)$ подвергается квантованию. Такое квантование может происходить по многим причинам. Например, система на рис. 12.1 может представлять собой систему радиолокационного слежения, в которой ошибка становится известной только когда к антенне возвращается отраженный от цели электромагнитный сигнал. Другим примером является случай, когда ошибка измеряется датчиком, на выходе которого в дискретные моменты времени появляется двоичный код. Далее мы будем считать, что в системе на рис. 12.1 нет никаких цифровых устройств, поэтому она является непрерывной, за исключением единственной операции квантования по времени. Системы, которые являются непрерывными, за исключением одной или нескольких операций квантования по времени, называются *импульсными системами*.

Рис. 12.1
Импульсная
система управления



Очевидно, что при квантовании непрерывного сигнала происходит потеря информации, т.к. значения этого сигнала становятся известными не для любого момента времени, а только для дискретных моментов. Для того чтобы уменьшить потерю информации, в систему непосредственно после операции квантования вводится устройство восстановления данных, называемое фиксатором. Его назначение сводится к тому, чтобы преобразовать квантованный сигнал в форму, близкую исходному непрерывному сигналу. Простей-

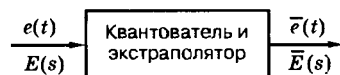
шим и наиболее распространенным устройством восстановления данных является фиксатор (экстраполятор) нулевого порядка. Принцип действия цепи из последовательно соединенных квантователя и экстраполятора нулевого порядка проиллюстрирован на рис. 12.2, где T есть *период квантования*. Выходной сигнал экстраполятора нулевого порядка в течение всего периода квантования сохраняет постоянное значение, равное значению исходного непрерывного сигнала в момент квантования.

Рис. 12.2

Входной и выходной сигналы цепи квантователь/фиксатор

**Рис. 12.3**

Квантователь и экстраполятор нулевого порядка



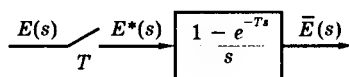
Квантователь и экстраполятор нулевого порядка можно объединить в один блок, как показано на рис. 12.3. Сигнал $\bar{e}(t)$ на рис. 12.2 можно описать следующим математическим выражением:

$$\begin{aligned} \bar{e}(t) = & e(0)[u(t) - u(t - T)] + e(T)[u(t - T) - u(t - 2T)] + \\ & + e(2T)[u(t - 2T) - u(t - 3T)] + \dots \end{aligned} \quad (12-1)$$

Используя теорему запаздывания из приложения Б, найдем преобразование Лапласа для сигнала $\bar{e}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{E}(s) = & e(0)\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}\right] + e(T)\left[\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s}\right] + e(2T)\left[\frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s}\right] + \dots = \\ = & \frac{1 - e^{-Ts}}{s} [e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} \right]. \end{aligned} \quad (12-2)$$

Как видим, второй сомножитель в выражении (12-2) является функцией входного сигнала $e(t)$ и периода квантования T . Первый сомножитель не зависит от $e(t)$. Поэтому первый сомножитель можно рассматривать как передаточную функцию; в результате операцию квантования и фиксации можно представить в виде рис. 12.4, где функция $E^*(s)$, называемая *преобразованием со звездочкой*, определяется выражением

**Рис. 12.4.** Изображение квантователя и фиксатора

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs}. \quad (12-3)$$

Таким образом, рис. 12.4 полностью отражает соотношение (12-2). Элемент, изображенный на рис. 12.4 в виде ключа, описывается уравнением (12-3) и называется идеальным квантователем, а блок, содержащий передаточную функцию, соответствует фиксатору. Необходимо заметить, что в *реальной системе сигнала* $E^*(s)$ не существует, он появляется

лишь в результате математических операций в выражении (12-2). Квантователь (ключ) на рис. 12.4 не является моделью реального квантователя, а блок с передаточной функцией не является моделью реального фиксатора. Однако комбинация этих элементов точно отражает соотношение между входом и выходом реального устройства выборки/хранения, как это было показано выше.

12.2. Идеальный квантователь

Хотя $E^*(s)$ в выражении (12-3) не соответствует реальному физическому сигналу, мы, тем не менее, определим его характеристики. Позже мы увидим, что этот сигнал очень удобно использовать при анализе и синтезе систем управления. Обратное преобразование Лапласа для (12-3) дает:

$$e^*(t) = L^{-1}[E^*(s)] = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t - T) + e(2T)\delta(t - 2T) + \dots, \quad (12-4)$$

где $\delta(t - t_0)$ есть единичная импульсная функция (дельта-функция Дирака), существующая в момент $t = t_0$. Тогда $e^*(t)$ можно представить как последовательность δ -функций с весами, равными значениям исходного непрерывного сигнала в моменты квантования. Это условно показано на рис. 12.5, т.к. δ -функция имеет бесконечную амплитуду в момент, когда она появляется.

Квантователь, изображенный в эквивалентной схеме устройства выборки/хранения (рис. 12.4), обычно называют *идеальным*, т.к. на его выходе появляются сигналы, не имеющие физического смысла (δ -функции). Еще раз подчеркнем, что идеальный квантователь не соответствует реальному элементу, он появляется в эквивалентной схеме лишь в результате математических действий.

Чтобы соблюсти математическую строгость, мы *определим* выходной сигнал идеального квантователя следующим образом:

выходной сигнал идеального квантователя определяется как сигнал, изображение которого по Лапласу равно

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}, \quad (12-5)$$

где $e(t)$ — входной сигнал квантователя. Если $e(t)$ в момент $t = kT$, где k — положительное целое число, претерпевает разрыв, то в качестве $e(kT)$ следует брать $e(kT^+)$. Обозначение $e(kT^+)$ указывает на то значение $e(t)$, которое соответствует моменту t , стремящемуся к kT справа.

Операция квантования, определяемая выражением (12-5), совместно с передаточной функцией экстраполятора нулевого порядка

$$G_{h0} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

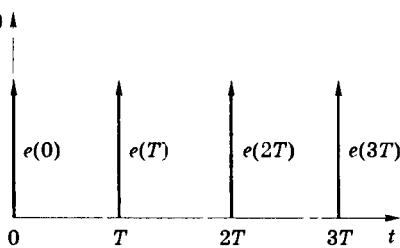


Рис. 12.5. Представление сигнала $e^*(t)$

дают точное математическое описание работы устройства выборки/хранения. Однако идеальный квантователь и экстраполятор нулевого порядка, рассматриваемые по отдельности, не могут служить моделями реального квантователя и реального фиксатора. Единственным входным сигналом, «разрешенным» для $G_{\text{кв}}(s)$, является последовательность δ -функций (12-4). Идеальный квантователь не может появиться в системе, если за ним не следует $G_{\text{кв}}(s)$, и $G_{\text{кв}}(s)$ не может появиться в системе, если ей не предшествует идеальный квантователь. Теперь рассмотрим пример определения $E^*(s)$.

Пример 12.1

Найдем $E^*(s)$ для сигнала $e(t) = u(t)$, где $u(t)$ — единичная ступенчатая функция. В данном случае $e(nT) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда согласно (12-5):

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} = e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots,$$

или

$$E^*(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

Как было показано в разделе 11.2,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Следовательно,

$$E^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}, \quad |e^{-Ts}| < 1.$$

Читатель, возможно, заметил сходство преобразования со звездочкой, $E^*(s)$, и z -преобразования, $E(z)$. Преобразование со звездочкой имеет вид

$$E^*(s) = e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots,$$

а z -преобразование определяется как

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + \dots$$

Если числовую последовательность $\{e(k)\}$ рассматривать как результат квантования функции времени $e(t)$ с периодом T секунд, то можно видеть, что

$$E^*(s) = E(z)_{z=e^{Ts}}. \quad (12-7)$$

По этой причине мы не приводим таблицу преобразований со звездочкой непрерывных сигналов; вместо этого мы будем пользоваться таблицей z -преобразований и учитывать (12-7).

Пример 12.2

В примере 12.1 было получено преобразование со звездочкой для единичной ступенчатой функции. Тот же результат можно получить, воспользовавшись таблицей z -преобразований из приложения В. По таблице мы находим z -преобразование для единичной ступенчатой функции:

$$E(z) = \mathfrak{z}[u(t)] = \frac{z}{z-1}.$$

Затем, согласно (12-7),

$$E^*(s) = E(z)|_{z=e^{Ts}} = \frac{e^{Ts}}{e^{Ts} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}},$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 12.1.

В последнем примере обозначение $\mathcal{Z}\{e(t)\}$ указывает на то, что сигнал $e(t)$ квантуется каждые T секунд, т.е. тем самым предполагается, что в действительности мы находим z -преобразование числовой последовательности $[e(kT)]$.

Выражение (12-5), определяющее преобразование со звездочкой, можно представить и в других формах. Мы рассмотрим одну из этих форм; читатель, желающий познакомиться с тем, как было получено это выражение, может обратиться к источнику [1]. Итак, одно из альтернативных представлений $E^*(s)$ имеет вид:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s) + \frac{e(0^+)}{2}, \quad (12-8)$$

или, приводя несколько первых членов ряда,

$$E^*(s) = \frac{1}{T} [E(s) + E(s + j\omega_s) + E(s + j2\omega_s) + \dots + E(s - j\omega_s) + E(s - j2\omega_s) + \dots] + \frac{e(0^+)}{2}.$$

В этом выражении ω_s есть частота квантования в рад/с, т.е. $\omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s$, где $f_s = 1/T$ — частота квантования в герцах. Ниже будет показано, что такая форма представления преобразования со звездочкой очень полезна для получения и объяснения некоторых результатов.

Пример 12.3

В примерах 12.1 и 12.2 было получено преобразование со звездочкой для единичной ступенчатой функции. Согласно (12-8),

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s) + \frac{e(0^+)}{2}.$$

Поскольку $E(s) = 1/s$, то

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s + j\omega_s} + \frac{1}{s + j2\omega_s} + \dots + \frac{1}{s - j\omega_s} + \frac{1}{s - j2\omega_s} + \dots \right] + \frac{1}{2}.$$

Далеко не очевидно, что это выражение для $E^*(s)$ можно привести к виду, полученному в примере 12.1; однако в [2] показано, что это действительно можно сделать.

Заметим, что в последнем примере некоторые слагаемые можно объединить следующим образом:

$$\frac{1}{s + jk\omega_s} + \frac{1}{s - jk\omega_s} = \frac{2s}{s^2 + (k\omega_s)^2}.$$

Тогда $E^*(s)$ примет вид:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{2s}{s^2 + (2\omega_s)^2} + \dots \right] + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, согласно таблице преобразований Лапласа, сигнал $e^*(t)$ содержит гармонические составляющие $2\cos\omega_s t$, $2\cos 2\omega_s t$, $2\cos 3\omega_s t$, ... Так как $e(t)$ есть единичная ступенчатая функция, то мы видим, что при ее квантовании порождаются гармоники с частотами ω_s , $2\omega_s$, $3\omega_s$, ... В следующем разделе мы обсудим этот вопрос подробнее.

12.3. Свойства преобразования со звездочкой

Рассмотрим два важных свойства преобразования со звездочкой. Они помогут нам понять эффекты, связанные с квантованием сигналов в цифровых системах управления.

1. $E^*(s)$ является периодической функцией переменной s с периодом $j\omega_s$, т.е. $E^*(s) = E^*(s + j\omega_s)$.

Это свойство доказывается с помощью определения преобразования со звездочкой (12-5). Согласно этому выражению

$$E^*(s + j\omega_s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nT(s + j\omega_s)}. \quad (12-9)$$

Но поскольку $\omega_s = 2\pi/T$, то

$$e^{-jnT\omega_s} = e^{-jnT2\pi/T} = e^{-jn2\pi} = 1$$

на основании того, что по формуле Эйлера

$$e^{-j2m\pi} = \cos 2m\pi - j \sin 2m\pi.$$

Тогда

$$E^*(s + j\omega_s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} e^{-jnT\omega_s} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} = E^*(s). \quad (12-10)$$

Это свойство говорит о том, что $E^*(s)$ является периодической функцией комплексной переменной s ; иначе говоря, $E^*(s)$ обладает периодичностью на комплексной плоскости.

2. Предположим, что функция $E(s)$ имеет полюс $s = s_1$. Тогда $E^*(s)$ имеет полюсы $s = s_1 + jm\omega_s$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Это свойство может быть доказано с использованием выражения (12-8). Предположим, что $e(0^+) = 0$. Тогда

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} [E(s) + E(s + j\omega_s) + E(s + j2\omega_s) + \dots + E(s - j\omega_s) + E(s - j2\omega_s) + \dots]. \quad (12-11)$$

Если $E(s)$ имеет полюс $s = s_1$, то каждое слагаемое в (12-11) вида $E(s - jm\omega_s)$ вносит полюс $s = s_1 + jm\omega_s$, поскольку $E(s - jm\omega_s)$, вычисленное при $s = s_1 + jm\omega_s$, равно $E(s_1)$. Это свойство проиллюстрировано в примере 12.3, где (12-11) вычислено для сигнала $e(t)$ в виде единичной ступенчатой функции.

Что касается нулей функции $E^*(s)$, то данное свойство здесь не применимо, т.е. положение нулей $E(s)$ неоднозначно определяет положение нулей $E^*(s)$. Эти положения зависят как от нулей и полюсов $E(s)$, так и от периода квантования T . Однако справедливо то, что положение нулей $E^*(s)$ обладает периодичностью с периодом $j\omega_s$, на что указывает первое свойство $E^*(s)$.

Пример 12.4

В примере 12.1 было показано, что преобразование со звездочкой для единичной ступенчатой функции равно $E^*(s) = 1/(1 - e^{-Ts})$. Тогда, согласно первому из приведенных выше свойств,

$$E^*(s + j\omega_s) = \frac{1}{1 - e^{-T(s + j\omega_s)}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts} e^{-jT2\pi/T}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts} e^{-j2\pi}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} = E^*(s).$$

Кроме того, полюсы $E^*(s)$ соответствуют тем значениям s , при которых знаменатель $E^*(s)$ обращается в нуль. Следовательно, эти значения s должны удовлетворять условию

$$e^{-Ts} = 1 = \cos 2m\pi - j \sin 2m\pi = e^{-j2m\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

или

$$Ts = j2m\pi.$$

Отсюда

$$s = \frac{j2m\pi}{T} = jm\omega_s, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

чем подтверждается второе из приведенных выше свойств. На комплексной плоскости полюсы $E^*(s)$ располагаются периодически, с периодом $j\omega_s$, относительно полюса $s = 0$ соответствующего функции $E(s)$. Это отражено на рис. 12.6.

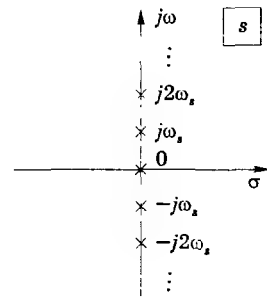


Рис. 12.6
Расположение полюсов к примеру 12.4

Более сложный пример расположения полюсов и нулей функции $E^*(s)$ приведен на рис. 12.7. Основная полоса на s -плоскости определяется как полоса, для которой $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$, как показано на рис. 12.7. Если известно расположение полюсов и нулей $E^*(s)$ в основной полосе, то оно повторяется и во всех дополнительных полосах s -плоскости.

Рис. 12.7
Расположение полюсов и нулей функции $E^*(s)$

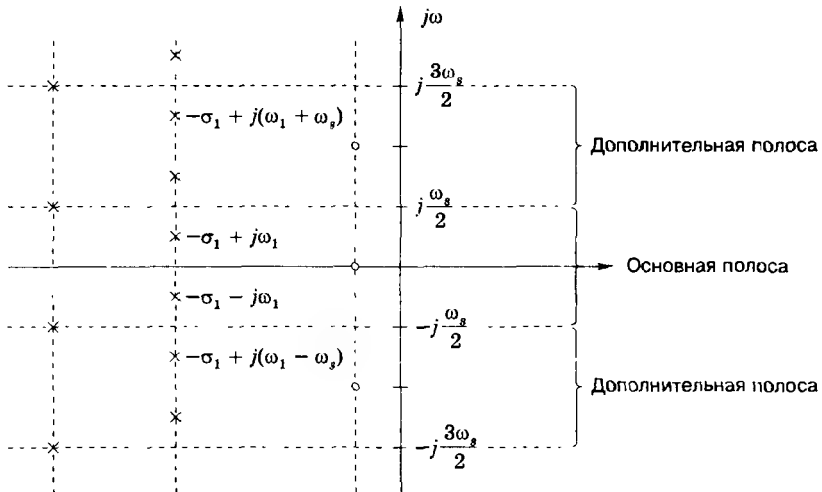
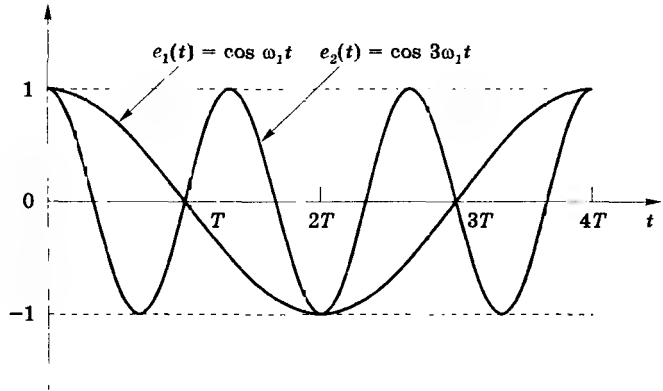


Рис. 12.7 показывает, что если $E(s)$ имеет полюс $-\sigma_1 + j\omega_1$, то в результате квантования, в соответствии со свойством 2, $E^*(s)$ будет иметь полюс $-\sigma_1 + j(\omega_1 + \omega_s)$. И наоборот, если $E(s)$ имеет полюс $-\sigma_1 + j(\omega_1 + \omega_s)$, то при квантовании появится полюс $-\sigma_1 + j\omega_1$. В действительности полюс $E(s)$, расположенный в точке $-\sigma_1 + j(\omega_1 + k\omega_s)$, где k — целое число, обусловит появление идентичных полюсов $E^*(s)$ независимо от значения k . Это можно продемонстрировать с помощью рис. 12.8. Заметим, что оба сигнала, $e_1(t)$ и $e_2(t)$, имеют одинаковое преобразование со звездочкой, т.к. в каждый момент квантования их значения равны. Мы видим, что $\omega_s = 4\omega_1$, поскольку сигнал $e_1(t)$ подвергается квантованию четыре раза за период. Следовательно, один полюс $E_1(s)$ расположен в точке $s = j\omega_1 = j\omega_s/4$, а второй — в точке $s = -j\omega_1 = -j\omega_s/4$. Соответственно, один полюс $E_2(s)$ расположен в точке $s = -j3\omega_1 = j(\omega_1 - \omega_s)$, а второй — в точке $s = j3\omega_1 = -j(\omega_1 - \omega_s)$.

Рис. 12.8

Для сигнала, имеющего одинаковое преобразование со звездочкой

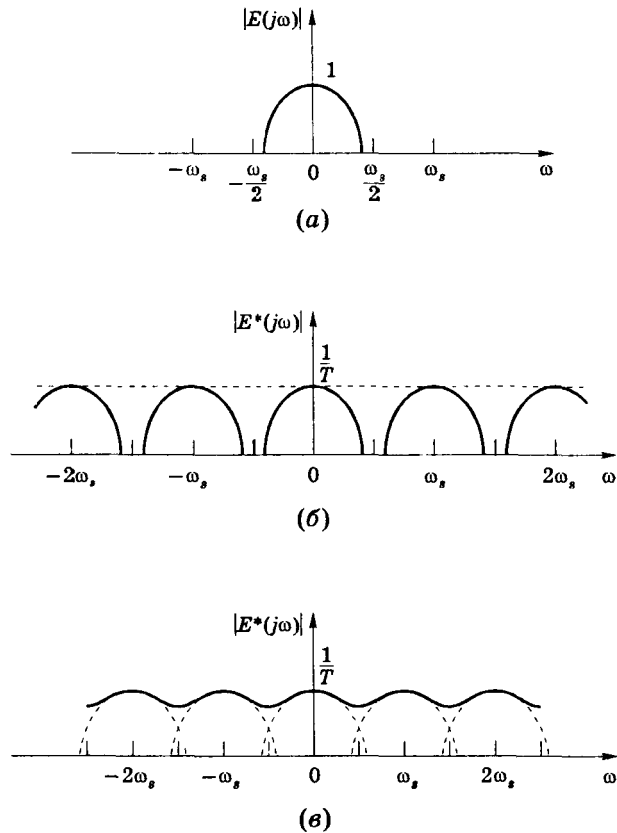


Предположим, что сигнал $e(t)$ с амплитудным спектром, изображенным на рис. 12.9 (а), подвергается квантованию. Тогда амплитудный спектр $E^*(j\omega)$ будет иметь вид, приведенный на рис. 12.9 (б). Это можно видеть из выражения (12-8) при $s = j\omega$:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} [E(j\omega) + E(j\omega + j\omega_s) + E(j\omega + j2\omega_s) + \dots + E(j\omega - j\omega_s) + E(j\omega - j2\omega_s) + \dots]. \quad (12-12)$$

Рис. 12.9

Частотные спектры $E(j\omega)$ и $E^*(j\omega)$



Следовательно, эффект идеального квантования сводится к копированию исходного спектра на частотах $\omega_s, 2\omega_s, -\omega_s, -2\omega_s$ и т.д.

Идеальный фильтр — это фильтр с единичным коэффициентом усиления в полосе пропускания и нулевым коэффициентом усиления за пределами этой полосы. Очевидно, что такой фильтр не является физически реализуемым [3]. Но из рис. 12.9 видно, что идеальный фильтр низких частот мог бы полностью восстановить сигнал $e(t)$ со спектром $E(j\omega)$, если полоса пропускания фильтра равна $\omega_s/2$, а высшие частоты, присутствующие в спектре сигнала $e(t)$, не превосходят $\omega_s/2$. Это положение является сутью импульсной теоремы Шеннона [4].

Теперь предположим, что частота ω_s на рис. 12.9 (а) стала меньше, так что высшие частотные составляющие в спектре $E(j\omega)$ превышают $\omega_s/2$. Тогда амплитудный спектр $E^*(j\omega)$ будет иметь вид, приведенный на рис. 12.9 (в); в этом случае никакой фильтр, даже идеальный, не сможет восстановить сигнал $e(t)$. Поэтому при выборе частоты квантования в системе управления надо руководствоваться тем, чтобы она была по крайней мере в два раза больше верхней граничной частоты спектра квантуемого сигнала. Как мы увидим позже, исходя из других соображений частота квантования должна быть значительно выше.

Напомним еще раз, что идеальный квантователь не является физическим устройством, поэтому частотный спектр, изображенный на рис. 12.9, не есть спектр сигнала в реальной системе. Отсюда вытекает необходимость распространить приведенные выше теоретические положения применительно к сигналам, имеющим место в реальных физических системах. Мы это сделаем после того как изучим характеристики фиксатора (экстраполятора). Однако сначала приведем один пример.

Пример 12.5

Предположим, что сигнал $e(t) = \cos \omega_1 t$, где $\omega_1 = 3 \text{ с}^{-1}$, квантуется с частотой $\omega_s = 8 \text{ с}^{-1}$. Так как $E(s)$ имеет полюсы $s = \pm j3$, то $E^*(s)$ будет иметь полюсы (на основании свойства 2):

$$\begin{aligned} \pm j\omega_1 &= \pm j3, \\ \pm j\omega_1 \pm j\omega_s &= \pm j3 \pm j8 = \pm j5, \pm j11, \\ \pm j\omega_1 \pm j2\omega_s &= \pm j3 \pm j16 = \pm j13, \pm j19, \\ \pm j\omega_1 \pm j3\omega_s &= \pm j3 \pm j24 = \pm j21, \pm j27, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Каждая пара сопряженных чисто мнимых полюсов соответствует синусоиде. Мы видим, что при квантовании сигнала $e(t) = \cos 3\omega t$ с частотой 8 с^{-1} возникает сумма гармоник с частотами $3 \text{ с}^{-1}, 5 \text{ с}^{-1}, 11 \text{ с}^{-1}, 13 \text{ с}^{-1}, 19 \text{ с}^{-1}$ и т.д. В общем случае при квантовании гармонического сигнала частоты ω_1 с частотой ω_s порождается сумма гармоник с частотами ω_1 и $k\omega_s \pm \omega_1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$

12.4. Восстановление данных

На рис. 12.10 еще раз приводится математическая модель устройства, состоящего из квантователя и фиксатора (ранее она была изображена на рис. 12.4). Напомним, что ни один из двух элементов на рис. 12.10 не является моделью реального устройства, но их комбинация точно отра-

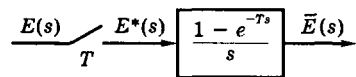


Рис. 12.10. Изображение квантователя и фиксатора

жает связь между входом и выходом реального устройства выборки/хранения. Предполагается, что квантователь на рис. 12.10 является идеальным, и следующий за ним блок представляет модель экстраполятора нулевого порядка с передаточной функцией

$$G_{h0} = \frac{1 - e^{Ts}}{s}. \quad (12-13)$$

В предыдущем разделе были исследованы характеристики идеального квантователя; теперь мы рассмотрим характеристики экстраполятора нулевого порядка, после чего станут очевидны свойства комбинации этих элементов.

Получим частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка, придав им наиболее удобную форму. На основании (12-13) имеем:

$$\begin{aligned} G_{h0}(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} e^{j\omega T/2} e^{-j\omega T/2} = \\ &= \frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega} \left[\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right] = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}. \end{aligned} \quad (12-14)$$

Поскольку

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi\omega}{\omega_s}, \quad (12-15)$$

то (12-14) можно записать в виде:

$$G_{h0}(j\omega) = T \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-j\pi\omega/\omega_s}.$$

Таким образом,

$$|G_{h0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right| \quad (12-16)$$

и

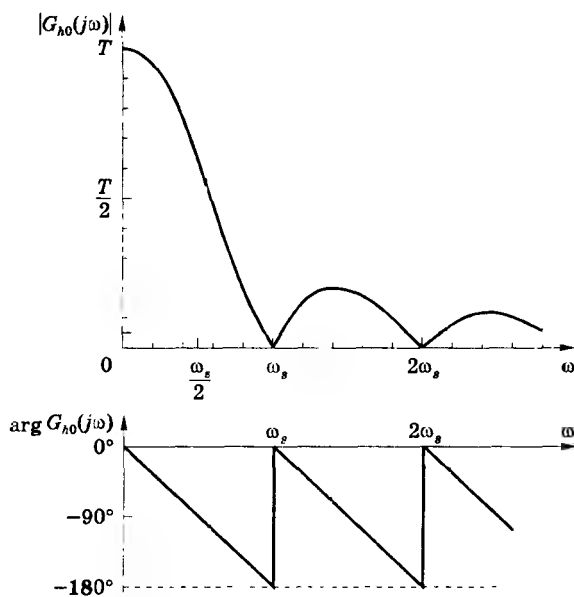
$$\arg G_{h0}(j\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \theta, \quad \text{где } \theta = \begin{cases} 0, & \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s} > 0 \\ \pi, & \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s} < 0. \end{cases} \quad (12-17)$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка изображены на рис. 12.11.

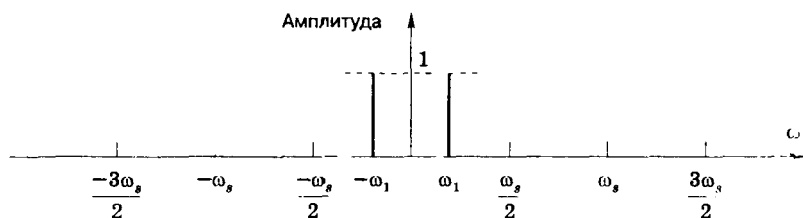
Интерпретацию частотных характеристик экстраполятора необходимо сопроводить некоторыми комментариями. Во-первых, следует напомнить, что *экстраполятору обязан предшествовать идеальный квантователь*. Предположим, что на вход идеального квантователя подана синусоида с частотой ω_1 , причем $\omega_1 < \omega_s/2$. На выходе квантователя появятся гармоники с частотами, указанными на рис. 12.12 (б) (см. пример 12.5). Спектр выходного сигнала экстраполятора можно определить, воспользовавшись его частотными характеристиками. Этот спектр изображен на рис. 12.12 (в). Заметим, что он будет иметь такой вид, если входной сигнал представляет собой синусоиду с любой частотой, удовлетворяющей условию $\omega = k\omega_s \pm \omega_1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Заметим также, что сигнал, спектр которого приведен на рис. 12.12 (в), будет иметь форму ступенчатой функции, как показано на рис. 12.13.

Рис. 12.11

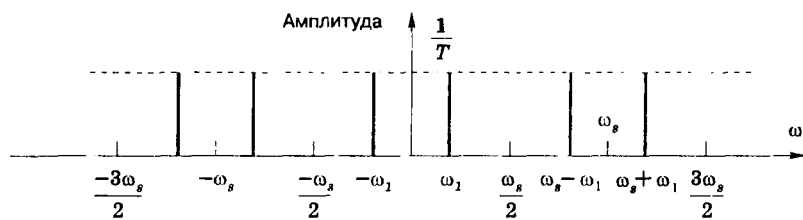
Частотные характеристики
экстраполятора нулевого порядка

**Рис. 12.12**

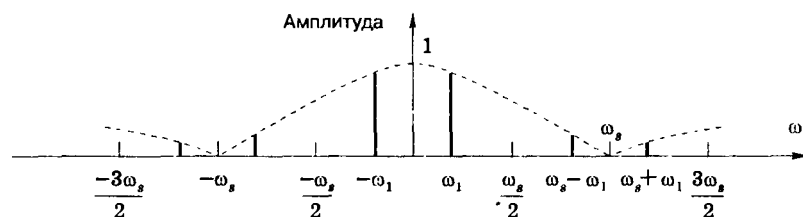
Реакция
квантователя и
экстраполятора
нулевого порядка
на
синусоидальный
входной сигнал



(а) Спектр сигнала на входе идеального квантователя



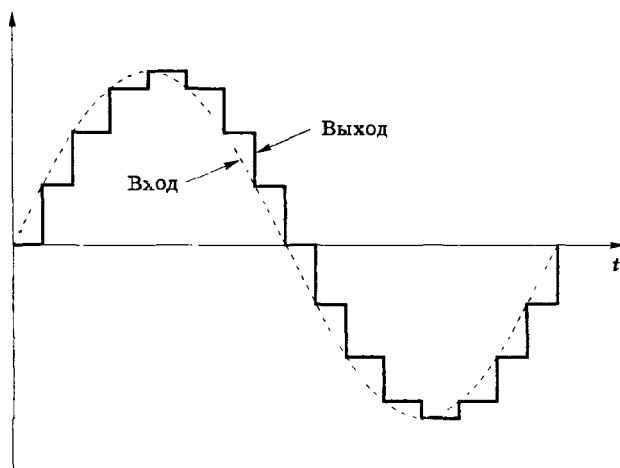
(б) Спектр сигнала на выходе идеального квантователя



(в) Спектр сигнала на выходе экстраполятора нулевого порядка

Рис. 12.13

Входной и выходной сигналы
квантователя/фиксатора



Экстраполиатор предназначен для восстановления формы сигнала на входе квантователя. Могут быть реализованы и более сложные модификации экстраполиаторов по сравнению с рассмотренным, однако на практике они используются крайне редко. Почти во всех цифровых системах управления применяется экстраполиатор нулевого порядка. Читатель, желающий познакомиться с более сложными экстраполиаторами, может обратиться к источникам [1] и [2].

12.5. Импульсная передаточная функция

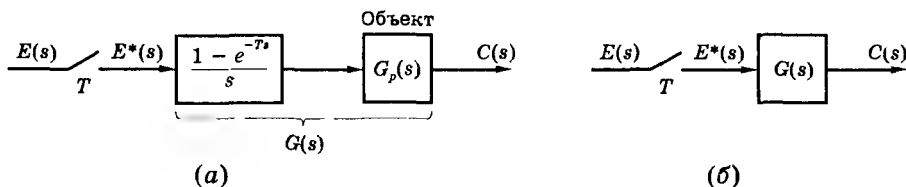
В этом разделе мы введем понятие передаточной функции разомкнутой импульсной системы. С этой целью рассмотрим систему, изображенную на рис. 12.14 (а), где $G_p(s)$ есть передаточная функция объекта. Как показано на этом рисунке, общую передаточную функцию объекта и экстраполиатора нулевого порядка мы обозначим как $G(s)$, т.е.

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s).$$

Заметим, что если система представлена в виде рис. 12.14 (б), то $G(s)$ *должна* включать в себя передаточную функцию экстраполиатора. В общем случае на структурных схемах экстраполиатор не изображают отдельным блоком, а просто объединяют его с передаточной функцией той части системы, которая следует после него.

Согласно рис. 12.14 (б),

$$C(s) = G(s) E^*(s). \quad (12-18)$$

**Рис. 12.14.** Разомкнутая импульсная система

Тогда, согласно (12-18) и (12-8), полагая $c(0) = 0$, получим:

$$C^*(s) = [G(s)E^*(s)]^* = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s), \quad (12-19)$$

где через $[\cdot]^*$ обозначено преобразование со звездочкой функции в квадратных скобках. Тогда из (12-18) и (12-19) будем иметь:

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) E^*(s + jn\omega_s). \quad (12-20)$$

Поскольку $E^*(s)$ является периодической функцией, т.е., согласно (12-10),

$$E^*(s + jn\omega_s) = E^*(s),$$

то (12-20) приобретает вид:

$$C^*(s) = E^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) = E^*(s) G^*(s). \quad (12-21)$$

Если в этом уравнении заменить e^{Ts} на z , т.е. представить все функции в виде z -преобразований [см. (12-7)], то получим:

$$C(z) = E(z)G(z). \quad (12-22)$$

Теперь мы можем назвать $G(z)$ *импульсной передаточной функцией*; она связывает значения входного и выходного сигналов в моменты квантования. Заметим, что импульсная передаточная функция не позволяет получить информацию о характере изменения выходного сигнала $c(t)$ в промежутках между моментами квантования. Этой информации не содержат ни (12-21), ни (12-22).

Выражение (12-22) имеет общий характер, т.е. если имеется *любая* функция, которую можно представить как

$$A(s) = B(s) F^*(s), \quad (12-23)$$

где $F^*(s)$ имеет вид

$$F^*(s) = f_0 + f_1 e^{-Ts} + f_2 e^{-2Ts} + \dots, \quad (12-24)$$

то на основании предыдущих операций

$$A^*(s) = B^*(s) F^*(s) \quad (12-25)$$

и

$$A(z) = B(z)F(z). \quad (12-26)$$

В уравнении (12-26)

$$B(z) = \mathfrak{z}[B(s)] \text{ и } F(z) = F^*(s)|_{e^{Ts}=z}. \quad (12-27)$$

Эти соотношения имеют общий характер, т.е. если некоторая функция задана в виде (12-23), то ее z -преобразование определяется выражениями (12-26) и (12-27).

Ранее, в (12-19), предполагалось, что $c(0) = 0$. Это допущение не является обязательным, но делает более простым получение выражения (12-22). Таким образом, (12-22) применимо к любой системе, имеющей конфигурацию рис. 12.14, а (12-26) применимо к любой функции вида (12-23). Проиллюстрируем полученные результаты двумя примерами.

Пример 12.6

Найдем z -преобразование функции

$$A(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)} (1 - e^{-Ts}).$$

Как видим, $A(s)$ представлено в форме (12-23), где $B(s)$ и $F^*(s)$ определяются выражениями:

$$B(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad F^*(s) = 1 - e^{-Ts}.$$

Тогда по таблице z -преобразований:

$$B(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

и

$$F(z) = 1 - e^{-Ts} \Big|_{s=z} = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}.$$

В результате, согласно (12-26), получим:

$$A(z) = B(z)F(z) = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})} \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.$$

Пример 12.7

Получим выражение $C(z)$ для системы, изображенной на рис. 12.15, считая, что вход $e(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию. Согласно (12-18),

$$C(s) = G(s)E^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} E^*(s),$$

а в соответствии с (12-22)

$$C(z) = G(z)E(z).$$

Импульсная передаточная функция системы равна (см. пример 12.6):

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.$$

$E(z)$ найдем по таблице z -преобразований:

$$E(z) = \mathcal{Z}[u(t)] = \frac{z}{z-1}.$$

Тогда

$$C(z) = G(z)E(z) = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - e^{-T})(z-1)}.$$

С помощью обратного z -преобразования можно найти реакцию системы $c(nT)$. Воспользуемся методом разложения на простые дроби:

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1 - e^{-T}}{(z - e^{-T})(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-T}}$$

и

$$C(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

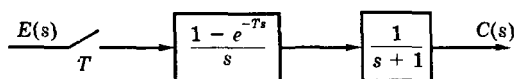


Рис. 12.15. Импульсная система

Теперь мы исследуем разомкнутую систему на рис. 12.18 (а). Эта система

$$(e^{-T})^n = 1 - e^{-nT}$$

ой в моменты квантования нарастают по экспонен-
 , равному единице, как показано на рис. 12.16. Под-
 ляет определить реакцию системы *только* в момент-
 ть полную картину изменения выходной перемен-
 в этом случае прибегают к имитационному модели-

Следовательно,

Заметим, что значения выходной перемен-
 те, стремясь к установившемуся значению,
 черкнем также, что z-преобразование позвол-
 ты квантования. Если необходимо получить
 ной (на практике обычно так и бывает), то
 рованию системы.

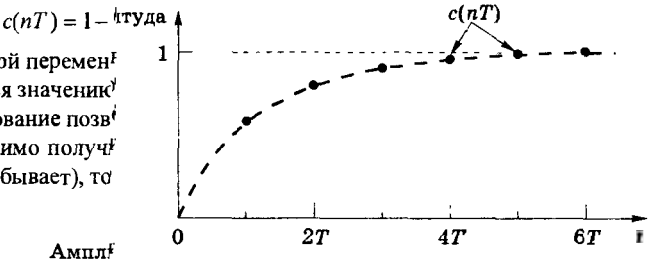


Рис. 12.16
 Реакция системы
 к примеру 12.7

ульсную передаточную функцию $G(z)$ по $G_p(s)$ при
 1];

Программа MATLAB, вычисляющая имит-
 $T = 1$ с, имеет вид:
 $Gpnum = [0 \ 1]; Gpden = [1$
 $Gp = tf(Gpnum, Gpden);$
 $Gz = c2d(Gp, 1)$

наличие экстраполятора нулевого порядка.

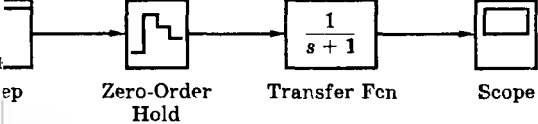


Рис. 12.17. Модель SIMULINK для примера
 12.7

Заметим, что функция $c2d$ предполагает
 На рис. 12.17 приведена схема модели-
 рования данной системы в про-
 грамме SIMULINK. Обратите вни-
 мание, что идеальный квантователь
 на схеме явно не представлен, но он
 объединен в одном блоке с экстрапо-
 лятором нулевого порядка.

ть некоторыми комментариями. Прежде всего
 м примере имеет вид единичной ступенчатой
 но точно восстанавливает постоянный сигнал.
 та входе квантователя, комбинация из кванто-
 никакого влияния на работу системы и ее при-
 . Тогда в этом примере

$$\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Последний пример можно сопровод-
 заметим, что выход экстраполятора в эт-
 функции; то есть, экстраполятор абсолют-
 Следовательно, при постоянном сигнале $i = 1 - e^{-t}$.

изования к анализу системы из последнего при-
 , то мы можем найти $c(nT)$, заменив t на nT . Од-
 олучено $c(nT)$, то в общем случае обратной заме-
 ражение для $c(t)$.

$$C(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

системы иной конфигурации. Сначала рассмот-
 содержит две непрерывных передаточных фун-

$$c(t)$$

Отсюда следует, что применение z-преобр-

кции, и обе они, $G_1(s)$ и $G_2(s)$, включают в себя передаточные функции экстраполяторов. Для этой системы

$$C(s) = G_2(s) A^*(s) \quad (12-28)$$

и, следовательно,

$$C(z) = G_2(z)A(z). \quad (12-29)$$

Точно так же,

$$A(s) = G_1(s) E^*(s) \quad (12-30)$$

и

$$A(z) = G_1(z)E(z). \quad (12-31)$$

Тогда из (12-29) и (12-31) получим:

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z), \quad (12-32)$$

т.е. общая передаточная функция системы равна произведению импульсных передаточных функций.

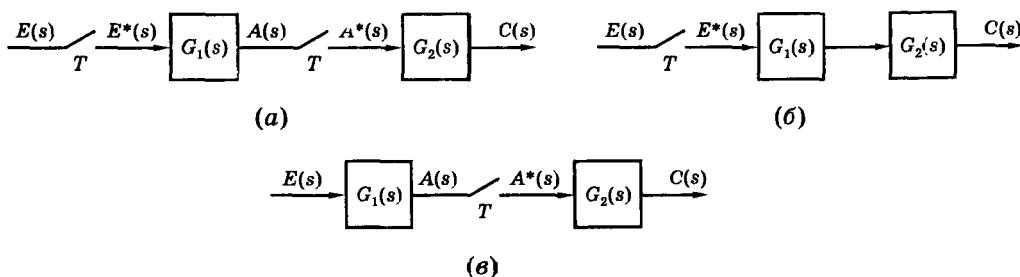


Рис. 12.18. Некоторые структуры импульсных систем

Далее рассмотрим систему на рис. 12.18 (б). Она отличается от системы на рис. 12.18 (а) тем, что квантователь между $G_1(s)$ и $G_2(s)$ отсутствует. Конечно, в этом случае $G_2(s)$ не включает в себя передаточную функцию экстраполятора. Тогда

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s) \quad (12-33)$$

и

$$C(z) = \overline{G_1 G_2}(z)E(z), \quad (12-34)$$

где

$$\overline{G_1 G_2}(z) = \mathfrak{H}[G_1(s)G_2(s)] \quad (12-35)$$

Черта над произведением указывает на то, что перед тем, как применять z -преобразование, необходимо перемножить две непрерывные передаточные функции. Заметим, что

$$\overline{G_1 G_2}(z) \neq G_1(z)G_2(z), \quad (12-36)$$

т.е. z -преобразование произведения функций не равно произведению их z -преобразований.

Для системы, изображенной на рис. 12.18 (в),

$$C(s) = G_2(s)A^*(s) = G_2(s)\overline{G_1 E^*}(s) \quad (12-37)$$

и

$$C(z) = G_2(z)\overline{G_1 E}(z). \quad (12-38)$$

В данном случае передаточной функции не существует, т.к. $E(z)$ нельзя выделить из $G_1 E(z)$. В общем случае, если входной сигнал прикладывается к непрерывному элементу системы до того как происходит квантование, то передаточную функцию записать нельзя. Эта особенность вытекает из того, что если входной сигнал системы $e(t)$ не квантуется, то выходной сигнал должен зависеть от $e(t)$ во все моменты времени, а не только в моменты квантования. Но поскольку $E(z)$ не содержит информации о сигнале $e(t)$ в промежутках между моментами квантования, выходной сигнал не может быть выражен как функция от $E(z)$. В системах, для которых нельзя записать передаточную функцию, всегда можно выход выразить в виде функции от входа. Как будет показано ниже, системы такого типа в большинстве случаев не вызывают особых трудностей при их анализе или синтезе.

12.6. Разомкнутые системы, содержащие цифровые фильтры

В предыдущем разделе был рассмотрен способ описания разомкнутых импульсных систем передаточными функциями. Здесь мы дадим этому способу дальнейшее развитие, охватив случай, когда разомкнутая импульсная система содержит цифровой регулятор.

Начнем с рассмотрения системы на рис. 12.19. АЦП на входе регулятора преобразует непрерывный сигнал $e(t)$ в числовую последовательность $\{e(kT)\}$. Цифровой регулятор обрабатывает эту последовательность и вычисляет выходную числовую последовательность $\{m(kT)\}$, которая затем с помощью ЦАП преобразуется в непрерывный сигнал $\bar{m}(t)$.

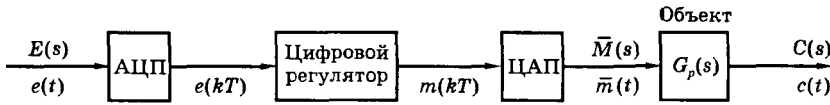


Рис. 12.19. Разомкнутая система с цифровым регулятором

Как было показано в главе 11, цифровой регулятор (фильтр) можно представить передаточной функцией $D(z)$, так что

$$M(z) = D(z)E(z), \quad (12-39)$$

или после замены $z = e^{sT}$,

$$M^*(s) = D^*(s) E^*(s). \quad (12-40)$$

Таким образом, регулятор и связанные с ним АЦП и ЦАП можно в структурной схеме представить так, как показано на рис. 12.20. Если объект имеет передаточную функцию $G_p(s)$, то

$$C(s) = G_p(s) \bar{M}(s) = G_p(s) \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right] M^*(s). \quad (12-41)$$

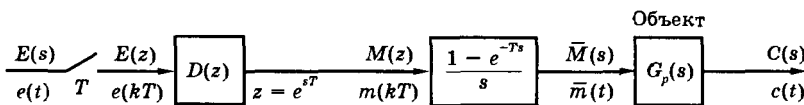


Рис. 12.20. Модель разомкнутой системы

Тогда

$$\begin{aligned} C(z) &= \mathfrak{L} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right] M(z) = \\ &= \mathfrak{L} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right] D(z) E(z) = G(z) D(z) E(z). \end{aligned} \quad (12-42)$$

Пример 12.8

Определим переходную функцию системы, структура которой имеет вид рис. 12.20. Предположим, что регулятор описывается разностным уравнением

$$m(kT) = 2e(kT) - e[(k-1)T].$$

В разделе 13.14 будет показано, что оно соответствует дискретному ПД-регулятору. Передаточная функция регулятора

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2 - z^{-1} = \frac{2z-1}{z}.$$

Предположим также, что

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Тогда, используя результат примера 12.7,

$$G(z) = \mathfrak{L} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.$$

Поскольку $E(z) = z/(z-1)$, то по выражению (12-42) находим:

$$C(z) = D(z)G(z)E(z) = \frac{2z-1}{z} \cdot \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}.$$

Следуя рассуждениям из раздела 11.5, запишем:

$$C(z) = z^{-1}zC(z) = z^{-1}F(z) = z^{-1} \frac{z(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}.$$

Разложение на простые дроби дает

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} = \frac{1}{z-1} + \frac{1 - 2e^{-T}}{z - e^{-T}}; \\ F(z) &= \frac{z}{z-1} + \frac{(1 - 2e^{-T})z}{z - e^{-T}}. \end{aligned}$$

Переходя к обратному z -преобразованию, получим:

$$f(k) = 1 + (1 - 2e^{-T})e^{kT}.$$

Следовательно,

$$c(k) = f(k-1)u(k-1) = [1 + (1 - 2e^{-T})e^{-(k-1)T}]u(k-1).$$

Заметим, что значение $c(0) = 0$ очевидно из выражения для $C(z)$, т.к. порядок числителя $C(z)$ меньше порядка знаменателя (см. задачу 11.5).

12.7. Замкнутые импульсные системы

В предыдущих разделах был рассмотрен метод определения передаточных функций разомкнутых импульсных систем. Для этого потребовались специальные процедуры, поскольку идеальный квантователь нельзя описать с помощью передаточной функции. Выход идеального квантователя $E^*(s)$ невозможно представить как произведение некоторой передаточной функции на вход $E(s)$, чтобы при этом передаточная функция не зависела от $E(s)$.

В следующем разделе будет представлен метод определения передаточной функции замкнутых импульсных систем. Для этой цели могут быть использованы и другие методы [5]; однако нам кажется, что метод, который излагается в данной книге, является наиболее простым и легким для запоминания. Этот метод будет представлен после следующих предварительных рассуждений.

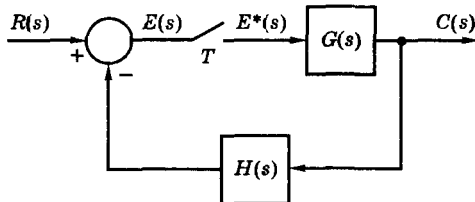


Рис. 12.21. Замкнутая импульсная система

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 12.21. Для этой системы

$$C(s) = G(s) E^*(s), \quad (12-43)$$

где $G(s)$ включает в себя передаточную функцию экстраполятора, и

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s). \quad (12-44)$$

Подставляя (12-43) в (12-44), получим:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s) E^*(s) \quad (12-45)$$

и, следовательно,

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s) E^*(s). \quad (12-46)$$

Отсюда можно выразить $E^*(s)$:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}, \quad E(z) = \frac{R(z)}{1 + \overline{GH}(z)}. \quad (12-47)$$

Из (12-43) и (12-47) имеем:

$$C(z) = G(z)E(z) = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)} R(z) \quad (12-48)$$

и

$$C(s) = \frac{G(s)R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}. \quad (12-49)$$

Уравнение (12-48) описывает реакцию системы в моменты квантования, а уравнение (12-49) — во все моменты времени. При анализе систем мы обычно пользуемся z -преобразованием, поскольку уравнение (12-49) представляет сложности при переходе к оригиналу, хотя оно и описывает поведение системы во все моменты времени.

При определении передаточной функции замкнутой системы могут возникнуть проблемы. Одну из них можно проиллюстрировать следующим образом. Предположим, что мы нашли преобразование со звездочкой для (12-44) и подставили его в (12-43). Тогда

$$C(s) = G(s)R^*(s) - G(s)\overline{HC}^*(s) \quad (12-50)$$

и далее

$$C^*(s) = G^*(s)R^*(s) - G^*(s)\overline{HC}^*(s). \quad (12-51)$$

Как видим, $C^*(s)$ нельзя выделить из $\overline{HC}^*(s)$, поэтому (12-51) не может быть решено относительно $C^*(s)$.

Чтобы избежать описанной выше проблемы, не следует применять к уравнению преобразования со звездочкой, если при этом внутренняя переменная системы пропадает как множитель. Если система имеет более сложную структуру по сравнению с рис. 12.21, то решение ее уравнений с помощью рассмотренной выше процедуры может оказаться очень затруднительным. В следующем разделе описывается более рациональный метод анализа.

12.8. Передаточные функции замкнутых систем

Определение передаточной функции замкнутой импульсной системы осложняется тем, что квантователь не имеет передаточной функции. Рассмотрим еще раз систему на рис. 12.21 (она же — на рис. 12.22 (а)). Граф этой системы изображен на рис. 12.22 (б). Однако поскольку квантователь не имеет передаточной функции, он показан на графе пунктиром. Для систем такого вида выражения для квантованного выходного сигнала $C(z)$ и для непрерывного выходного сигнала $C(s)$ можно получить путем следующей процедуры.

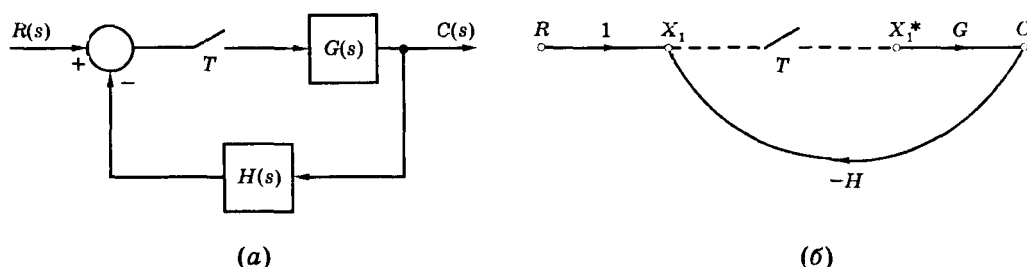


Рис. 12.22. Импульсная система управления

1. Построить граф наподобие рис. 12.22 (б), обозначив на нем все квантователи пунктирными линиями.
2. Входу каждого квантователя присвоить соответствующую переменную. Тогда выходом квантователя будет эта же переменная со звездочкой.
3. Полностью удалить из графа все квантователи. Однако эффект квантования на графе присутствует благодаря выбору переменных на этапе 2.
4. Рассматривая выход каждого квантователя как источник, выразить входы квантователей и выход системы через выходы квантователей и вход системы. Для системы на рис. 12.22 это будут уравнения:

$$X_1 = R - GHX_1^*, \quad (12-52)$$

$$C = GX_1^*, \quad (12-53)$$

где $X_1 = X_1(s)$ и т.д. Зависимость всех функций от s для удобства опущена. Заметим, что эти уравнения имеют тот же вид, что и (12-43) и (12-45), только вместо $E(s)$ в них фигурирует $X_1(s)$.

5. Найти z -преобразование этих уравнений и любым приемлемым способом выразить из них искомую функцию. Например, из (12-52) и (12-53):

$$X_1(z) = R(z) - \overline{GH}(z)X_1(z), \quad (12-54)$$

$$C(z) = G(z)X_1(z). \quad (12-55)$$

Решение (12-54) относительно $X_1(z)$ дает:

$$X_1(z) = \frac{R(z)}{1 + \overline{GH}(z)}. \quad (12-56)$$

Подставляя это выражение в (12-55), получим:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)} R(z). \quad (12-57)$$

Если необходимо получить выражение для непрерывного выхода $C(s)$, то (12-56) можно представить в виде преобразования со звездочкой и подставить его в (12-53). Однако, как было сказано выше, эта функция обычно не представляет интереса. Рассмотренная процедура иллюстрируется приводимыми ниже тремя примерами.

Пример 12.9

Рассмотрим одноконтурную цифровую систему управления, изображенную на рис. 12.23. Функциональная схема системы приведена в части (а) рисунка, а ее структурная схема — в части (б) (см. раздел 12.6). На основании части (б) построен граф, приведенный в части (в). Система описывается следующими уравнениями:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)D^*(s)E^*(s),$$

$$C(s) = G(s)D^*(s)E^*(s).$$

Применяя к $E(s)$ преобразование со звездочкой и выражая из полученного уравнения $E^*(s)$, имеем:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + D^*(s)\overline{GH}^*(s)}.$$

Применяя к уравнению для $C(s)$ z -преобразование и подставляя в него $E(z)[E^*(s)]$, получим:

$$C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)\overline{GH}(z)} R(z).$$

Таким образом, замкнутая одноконтурная цифровая система управления на рис. 12.23 имеет передаточную функцию

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)\overline{GH}(z)}.$$

При синтезе цифровых систем управления, который будет рассмотрен в следующей главе, обычно предполагается, что система имеет передаточную функцию. Сравнивая выражение для $C(z)$ с выражением для $C(s)$ в непрерывной системе (см. главы 7 и 9),

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s),$$

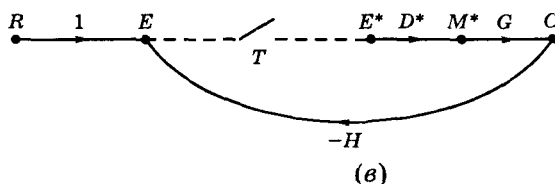
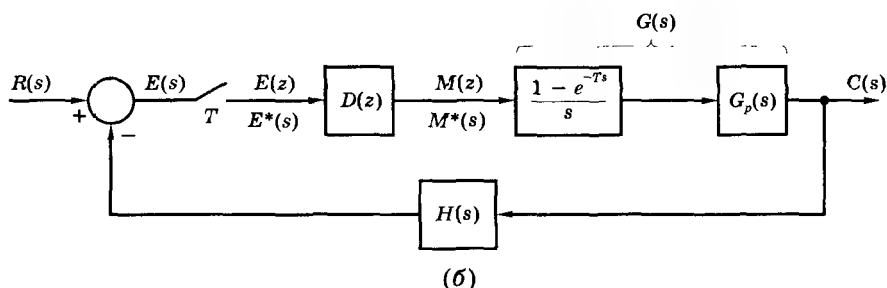
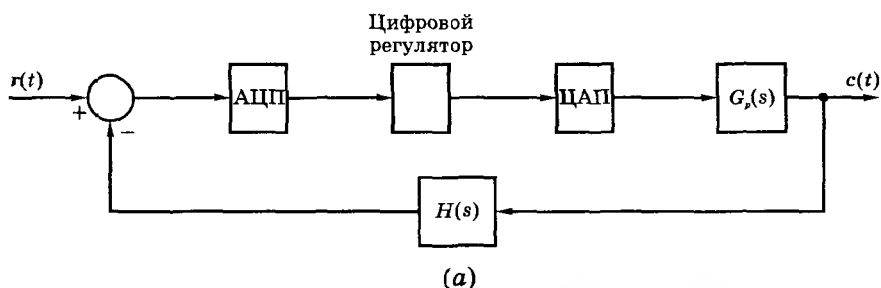


Рис 12.23. Цифровая система управления

мы видим, что передаточная функция регулятора входит в передаточную функцию замкнутой системы совершенно одинаковым образом как в цифровой, так и в непрерывной системе управления. В следующей главе мы обнаружим еще большее сходство между непрерывными и цифровыми системами управления.

Пример 12.10

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 12.24 (а). Граф этой системы приведен на рис. 12.24 (б). В соответствии с этапом 4 нашей процедуры система описывается следующими уравнениями:

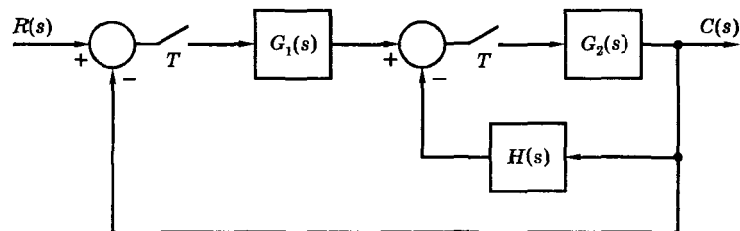
$$\begin{aligned} X_1 &= R - G_2 X_2^*, \\ X_2 &= G_1 X_1^* - G_2 H X_2^*, \\ C &= G_2 X_2^*. \end{aligned}$$

Применяя к этим уравнениям преобразование со звездочкой, получим:

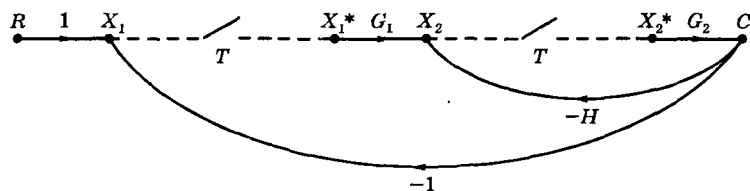
$$\begin{aligned} X_1^* &= R^* - G_2^* X_2^*, \\ X_2^* &= G_1^* X_1^* - \overline{G_2 H}^* X_2^*, \\ C^* &= G_2^* X_2^*. \end{aligned}$$

Рис. 12.24

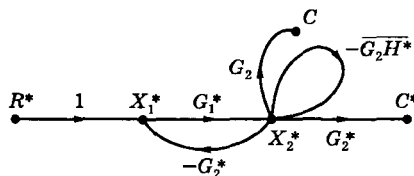
Система
к примеру 12.10



(a)



(б)



(в)

Мы имеем три уравнения с тремя неизвестными; их можно решить любым приемлемым способом. В данном примере мы построим граф, отражающий последние уравнения, и применим к нему формулу Мейсона. Согласно первому уравнению мы создадим узел для X_1^* , второе используем для узла X_2^* , и третье — для C^* . Полученный граф приведен на рис. 12.24 (в). Последнее из предыдущих уравнений мы используем также для создания узла для $C(s)$, т.е. непрерывного выхода. По данному графу можно записать:

$$C^* = \frac{G_1^* G_2^*}{1 + G_1^* G_2^* + G_2^* H^*} R^*.$$

или

$$C(z) = \frac{G_1(z) G_2(z)}{1 + G_1(z) G_2(z) + G_2(z) H(z)} R(z),$$

а для непрерывного выхода

$$C(s) = \frac{G_2(s) G_1^*(s)}{1 + G_1^*(s) G_2^*(s) + G_2^*(s) H^*(s)} R^*(s).$$

Мы получили уравнения для непрерывной выходной переменной, хотя обычно и не используем его.

Пример 12.11

В качестве последнего примера замкнутых цифровых систем управления рассмотрим систему на рис. 12.25. В этой системе цифровой регулятор находится в цепи обратной связи и, кроме того, имеется один аналоговый контур, т.е. контур, в котором отсутствует операция квантования. Граф системы приведен в части (б) рисунка, и по этому графу можно записать:

$$C(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H_1(s)} - \frac{G(s)H_2(s)}{1 + G(s)H_1(s)} D^*(s)C^*(s).$$

Знаменатель в этом уравнении обусловлен наличием аналогового контура. Таким образом,

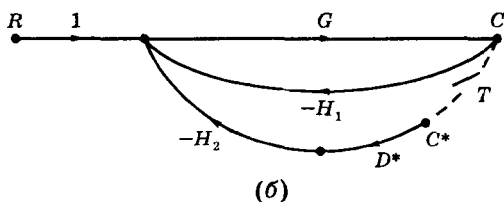
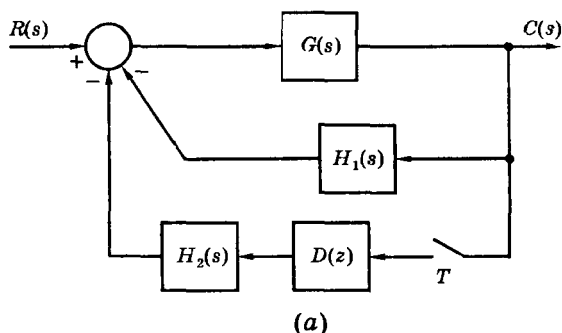
$$C(z) = \left[\frac{GR}{1 + GH_1} \right] (z) - \left[\frac{GH_2}{1 + GH_1} \right] (z) D(z) C(z),$$

где квадратные скобки использованы, чтобы показать, что произведение функций и деление должны быть выполнены в области переменной s до применения z -преобразования. То есть, в данном случае квадратные скобки имеют тот же смысл, что и черта над произведением G_2H в выражении для $C(z)$ из предыдущего примера. Наконец, решение последнего уравнения относительно $C(z)$ дает результат:

$$C(z) = \frac{\left[\frac{GR}{1 + GH_1} \right] (z)}{1 + \left[\frac{GH_2}{1 + GH_1} \right] (z) D(z)}.$$

Рис. 12.25

Система к примеру 12.11



Заметим, что для системы из последнего примера передаточную функцию записать нельзя, т.к. $R(z)$ не подлежит выделению в виде сомножителя из уравнения для $C(z)$. Этому есть еще одно объяснение: входной сигнал прикладывается к непрерывной части системы $[G(s)]$ не будучи проквантованным, поэтому выход системы должен быть функцией от t во все моменты времени, а не только в моменты квантования.

12.9. Переменные состояния в импульсных системах

В разделе 11.7 были рассмотрены модели в переменных состояния для дискретных систем. Согласно (11-32), модель в переменных состояния для линейной стационарной дискретной системы имеет общий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (12-58)$$

Для системы с одним входом и одним выходом $u(k)$ и $y(k)$ являются скалярными переменными, и в соответствии с (11-41) мы можем записать передаточную функцию:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}. \quad (12-59)$$

Как было показано в разделе 11.7, по заданной передаточной функции $G(z)$ всегда можно получить модель системы в переменных состояния. Первый этап этой процедуры состоит в построении схемы моделирования системы. Затем выход каждого элемента задержки принимается за переменную состояния. И, наконец, записываются уравнения для входа каждого элемента задержки и для выхода системы, в результате чего получаются уравнения состояния вида (12-58).

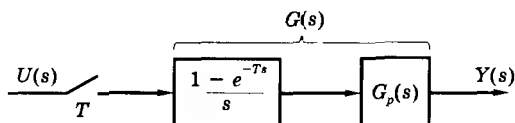
Теперь рассмотрим импульсную систему, изображенную на рис. 12.26. Из предыдущих разделов известно, что эта система имеет передаточную функцию

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right]. \quad (12-60)$$

Следовательно, для определения модели системы в переменных состояния может быть использована описанная выше процедура. Поясним это на примере.

Рис. 12.26

Импульсная система



Пример 12.12

Предположим, что объект на рис. 12.26 имеет передаточную функцию $G_p(s) = 1/(s+1)$, а период квантования $T = 1$ с. Импульсная передаточная функция равна

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right].$$

По таблице z -преобразований в приложении В:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]_{T=1} = \frac{z[(1-1+e^{-1})z + (1-e^{-1}-e^{-1})]}{(z-1)^2(z-e^{-1})}.$$

Тогда

$$G(z) = \frac{0,368z + 0,264}{(z-1)(z-0,368)} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368} = \frac{0,368z^{-1} + 0,264z^{-2}}{1 - 1,368z^{-1} + 0,368z^{-2}}.$$

Схема моделирования данной системы изображена на рис. 12.27. Уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,368 & 1,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,264 & 0,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Конечно, для данной системы могут быть получены и другие схемы моделирования; каждой из них будут соответствовать свои уравнения состояния. Передаточная функция $G(z)$ может быть вычислена с помощью программы MATLAB из примера 12.7.

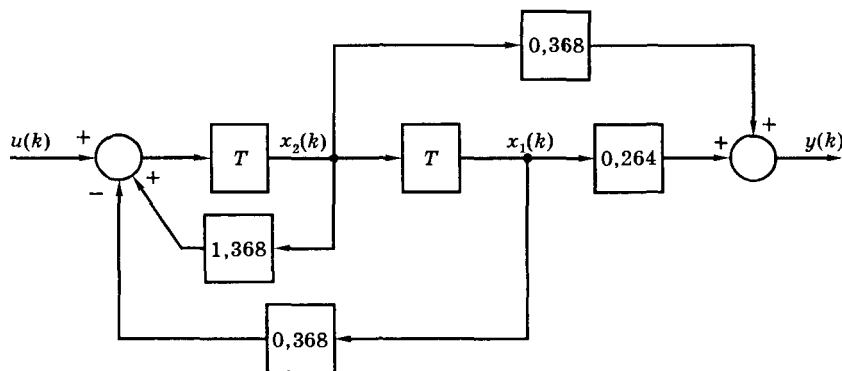


Рис. 12.27. Схема моделирования к примеру 12.12

Предположим, что в предыдущем примере непрерывная передаточная функция $G_p(s)$ соответствует двигателю постоянного тока (см. раздел 2.7). Тогда выходом объекта $y(t)$ является угловое положение вала двигателя. В дискретной модели, разработанной в примере, выход $y(k)$ является линейной комбинацией двух переменных состояния, причем ни одна из них не представляет собой физическую величину — положение вала. Кроме того, ни одна из них не соответствует и скорости вращения вала. В общем случае желательно, чтобы переменные состояния совпадали, насколько это возможно, с реальными физическими переменными. Это, однако, не может быть выполнено, если модель в переменных состояния получена на основании схемы моделирования, разработанной в соответствии с описанной выше процедурой. Мы рассмотрим метод получения модели в переменных состояния импульсной системы, который позволит правильно выбрать все переменные состояния [1, 6].

Этот метод основан на использовании модели объекта в непрерывных переменных состояния. Как было показано в главе 3, модель объекта в переменных состояния можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_c \bar{\mathbf{m}}(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (12-61)$$

Вектор состояния непрерывного объекта мы обозначаем как $\mathbf{v}(t)$, а вектор состояния его дискретной модели как $\mathbf{x}(k)$. Матрицы в непрерывных уравнениях состояния имеют индекс c , а матрицы дискретной модели индексов не имеют. Теперь мы разработаем процедуру получения дискретной модели объекта в виде (12-58) непосредственно по его аналоговой модели (12-61), в то же время сохранив физический смысл непрерывных переменных состояния, только придав им дискретную форму.

Решение аналоговых уравнений состояния (12-61) [см. (3-23)] имеет вид:

$$v(t) + \Phi_c(t)v(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B_c \bar{m}(\tau) d\tau, \quad (12-62)$$

где, согласно (3-21) и (3-32), переходная матрица состояния $\Phi_c(t)$ определяется выражением

$$\Phi_c(t) = L^{-1}[(sI - A_c)^{-1}] = I + A_c t + A_c^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (12-63)$$

Заметим, что поскольку $\bar{m}(t)$ есть выход экстраполятора нулевого порядка, то на интервале $0 \leq t < T$ $\bar{m}(t)$ сохраняет постоянное значение $\bar{m}(0) = u(0)$. Вычисляя (12-62) при $t = T$, получим:

$$v(T) = \Phi_c(T)v(0) + \left[\int_0^T \Phi_c(T-\tau) d\tau \right] B_c u(0). \quad (12-64)$$

Сравним это выражение с решением (12-58), полученным для случая дискретных переменных состояния и вычисленным при $k = 0$:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0). \quad (12-65)$$

Теперь, в наших обозначениях, $x(1) = x(T)$. Тогда, если мы произведем в (12-65) замены

$$\begin{aligned} x &= v, \\ A &= \Phi_c(T), \\ B &= \left[\int_0^T \Phi_c(T-\tau) d\tau \right] B_c, \end{aligned} \quad (12-66)$$

то (12-65) превратится в (12-64). Следовательно, если мы выберем дискретные переменные состояния совпадающими по смыслу с непрерывными переменными состояния и если вычислим матрицы A и B в соответствии с (12-66), то получим полноценную модель дискретной системы. Согласно (12-61),

$$y(kT) = C_c v(kT)$$

и, сравнивая это уравнение с (12-58), мы видим, что матрица C равна матрице C_c .

Подведем итоги. Если заданы непрерывные уравнения состояния объекта (12-61) импульсной системы на рис. 12.26, то дискретная модель в переменных состояния вида (12-58) для этой системы вычисляется с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} A &= \Phi_c(T) = L^{-1}[(sI - A_c)^{-1}]_{t=T} = I + A_c T + A_c^2 \frac{T^2}{2!} + \dots, \\ B &= \left[\int_0^T \Phi_c(T-\tau) d\tau \right] B_c = \left[IT + A_c \frac{T^2}{2!} + A_c^2 \frac{T^3}{3!} + \dots \right] B_c, \\ C &= C_c. \end{aligned} \quad (12-67)$$

В случае использования этих матриц переменные состояния дискретной модели имеют тот же физический смысл, что и переменные состояния аналоговой модели. Матрица A в виде бесконечного ряда получается на основании выражения (12-63), а аналогичное представление матрицы B может быть получено путем интегрирования ряда для функции $\Phi_c(t)$. Представление A и B в виде ряда особенно полезно при вычислении матриц дискретной модели на компьютере при условии ограничения числа членов ряда [6].

Пример 12.13

Разработаем дискретную модель спутника (см. раздел 2.6). На рис. 12.28 (а) изображена структура системы, а ее модель в непрерывных переменных состояния может быть получена по графу, представленному на рис. 12.28 (б). Из графа следует:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{m}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_c \bar{m}(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{v}(t).$$

Тогда

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

и

$$\Phi_c(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

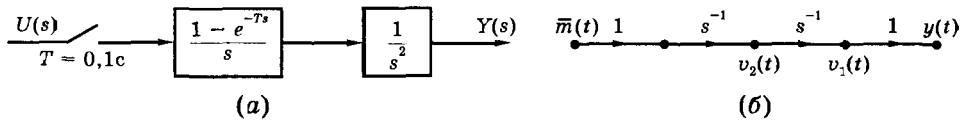


Рис. 12.28. Система к примеру 12.13

Матрица $\mathbf{A}$ для дискретной модели тогда принимает вид:

$$\mathbf{A} = \Phi_c(T)|_{t=0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее,

$$\int_0^T \Phi_c(T-\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^T d\tau & \int_0^T (T-\tau) d\tau \\ 0 & \int_0^T d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

и, поскольку $T = 0,1$ с,

$$\mathbf{B} = \left[\int_0^T \Phi_c(T-\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,005 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c = [1 \ 0].$$

Модель спутника в дискретных переменных состояния принимает вид:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [1 \ 0] \mathbf{x}(k).$$

Вычисления, выполненные в данном примере, можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
Ac = [0 1; 0 0]; Bc = [0; 1]; Cc = [1 0];
[A, B] = c2d(Ac, Bc, 0.1)
```

На рис. 12.29 (а) приведена схема моделирования спутника из последнего примера в непрерывных переменных состояния, а на рис. 12.29 (б) — модель спутника в дискретных переменных состояния. Заметим, что на этих двух схемах

$$x_1(k) = v_1(t)|_{t=kT},$$

$$x_2(k) = v_2(t)|_{t=kT}.$$

Хотя в двух схемах моделирования переменные состояния, вход и выход в моменты квантования равны, схемы все же совершенно не похожи. Это является общим правилом при переходе от непрерывных переменных состояния к дискретным с сохранением их физического смысла.

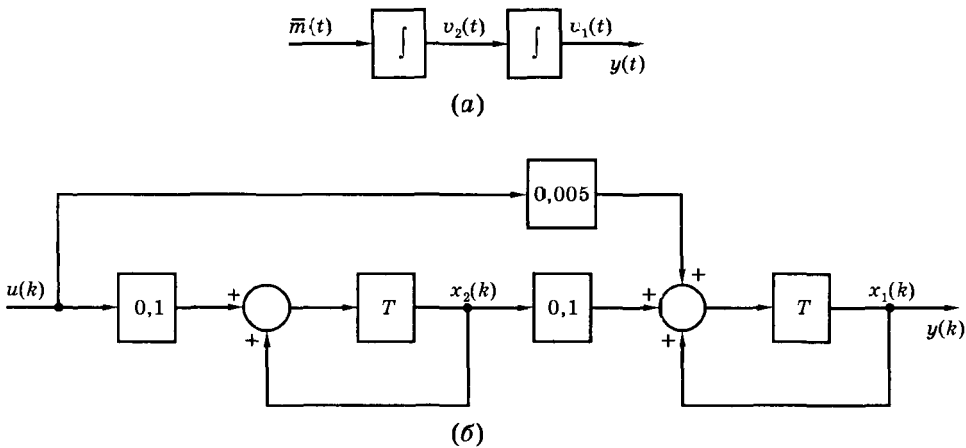


Рис. 12.29. Схемы моделирования спутника

12.10. Заключение

В этой главе были рассмотрены вопросы, связанные с квантованием сигналов, получением импульсной передаточной функции и выбором переменных состояния в импульсных системах. Было введено понятие идеального квантования и показано, как с помощью идеального квантователя и фиксатора можно получить модель реального устройства выборки/хранения. Рассмотрено также преобразование Лапласа применительно к выходному сигналу идеального квантователя, называемое преобразованием со звездочкой. Подробно были разобраны эффекты, связанные с квантованием, и было показано, что для минимизации этих эффектов частота квантования должна быть значительно больше верхней граничной частоты спектра квантуемого сигнала. Были исследованы характеристики наиболее распространенного устройства восстановления данных — экстраполятора нулевого порядка.

Принципиальная проблема, связанная с определением передаточной функции импульсной системы, заключается в том, что идеальный квантователь не может быть описан передаточной функцией. Поэтому методы определения передаточной функции импульсной системы коренным образом отличаются от соответствующих методов, используемых при анализе непрерывных систем. Один из таких методов был описан в данной главе. Было показано, что если непрерывный входной сигнал прикладывается к аналоговой ча-

сти системы, не будучи проквантованным, то передаточную функцию системы записать нельзя. Однако в этом случае можно получить уравнение относительно выходной переменной системы.

Были рассмотрены два метода определения модели импульсной системы в дискретных переменных состояния. Первый метод основан на использовании импульсной передаточной функции, а второй — на использовании модели системы в непрерывных переменных состояния. Преимущество второго метода в том, что все переменные состояния соответствуют реальным физическим переменным, а также в том, что этот метод может быть легко реализован в виде компьютерной программы. Поэтому почти во всех практических ситуациях используется именно второй метод.

Литература

1. C.L.Phillips and H.T.Nagle, Jr. *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
2. B.C.Kuo. *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1963.
3. C.L.Phillips and J.M.Parr. *Signals, Systems, and Transforms*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
4. R.M.Oliver, J.R.Pierce, and C.E.Shannon. "The Philosophy of Pulse Code Modulation", *Proc. IRE*, 36, no. 11 (November 1948): 1324-1331.
5. M.Sedlar and G.A.Bekey. "Signal Flow Graphs of Sampled Data Systems: A New Formulation", *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-12, no. 2 (October 1967): 606-608.
6. G.F.Franklin, J.D.Powell, and M.Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.

Задачи

- 12.1. Определите $E^*(s)$ для каждой из приведенных ниже функций.
- (a) $e(t) = e^{-3t}$.
 - (б) $E(s) = e^{-Ts}/(s + 3)$.
 - (в) $e(t) = 1 - e^{-2t}$.
 - (г) $E(s) = (s + 3)/[s(s + 2)]$.
- 12.2. Выразите преобразование со звездочкой для $e(t - kT)u(t - kT)$, где k — положительное целое число, в функции от преобразования со звездочкой для $e(t)$.
- 12.3. Полагая $T = 0,1$ с, сравните положение полюсов и нулей $E^*(s)$ и $E(s)$ на s -плоскости для функций из задачи 12.1.
- 12.4. (а) При $T = 0,2$ с определите $E^*(s)$ для каждой из приведенных ниже функций.
- (1) $e_1(t) = \cos 4\pi t$.
 - (2) $e_2(t) = \cos 14\pi t$.
- (б) Почему эти два преобразования равны?
 - (в) Приведите еще один синусоидальный сигнал, который имел бы такое же преобразование со звездочкой, как в п. (а).

- 12.5. (а) Синусоида с частотой 3 Гц подана на вход цепи, состоящей из квантователя и экстраполятора нулевого порядка. Частота квантования равна 12 Гц. Укажите все частоты, присутствующие в спектре выходного сигнала экстраполятора и не превышающие 40 Гц.
- (б) Повторите п. (а), если частота входной синусоиды равна 9 Гц.
- (в) Почему результаты пп. (а) и (б) одинаковы?
- (г) Приведите еще 4 частоты, которые дадут тот же самый результат, что и в пп. (а) и (б).
- 12.6. Сигнал $e(t)$ квантуется идеальным квантователем [см.(12-5)].
- (а) Сформулируйте условия, при которых $e(t)$ полностью может быть восстановлен по $e^*(t)$, т.е. условия, при которых в процессе квантования не будет происходить потери информации.
- (б) Укажите, какое из условий, перечисленных в п. (б), может быть реализовано в физической системе. При этом не забывайте, что операция квантования как таковая не является физически реализуемой.
- (в) На основании ответов, данных в п. (б), объясните, почему мы с успехом применяем системы, в которых используется операция квантования.
- 12.7. Система является линейной, если к ней применим принцип суперпозиции. Является ли линейным устройство выборки/хранения? Поясните ваш ответ.
- 12.8. Задано $E^*(s) = [e(t)]^* = e^{-3Ts}$, $T = 0,5$ с.
- (а) Определите $e(kT)$ для всех k .
- (б) Можно ли найти $e(t)$ по всей доступной информации? Поясните ваш ответ.
- (в) Изобразите две разных функции времени, удовлетворяющие п. (а).
- 12.9. Выход цепи из квантователя и экстраполятора нулевого порядка задан выражением $E(s) = (e^{-2Ts} - e^{-3Ts})/s$ при $T = 1$ с.
- (а) Представьте графически сигнал $\bar{e}(t)$.
- (б) Определите $e(kT)$ для всех k .
- (в) Можно ли найти $e(t)$ по всей доступной информации? Поясните ваш ответ.
- (г) Изобразите две разных функции времени, удовлетворяющие п. (а).
- 12.10. Сигнал $e(t) = 5\sin 2t$ подается на вход цепи из квантователя и экстраполятора нулевого порядка. Период квантования $T = \pi/6$ с. Таким образом, сигнал на выходе цепи имеет форму как на рис. 12.3.
- (а) Выходной сигнал содержит компоненту с частотой $\omega = 2$ рад/с. Определите амплитуду и фазу этой компоненты.
- (б) Повторите п. (а), если выходной сигнал содержит компоненты с частотой 14 рад/с и 26 рад/с.
- 12.11. Рассмотрите импульсную систему, изображенную на рис. 12.11 (3).
- (а) Определите реакцию системы в моменты квантования на единичное ступенчатое воздействие.
- (б) Проверьте результат п. (а), определив сигнал $m(t)$ на входе объекта и вычислив $c(t)$ методами теории непрерывных систем.
- (в) Каков эффект от присутствия в системе квантователя и экстраполятора нулевого порядка, если сигнал на входе квантователя сохраняет постоянное значение? Почему?
- 12.12. (а) Повторите задачу 12.11 при условии, что объект имеет передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 2)}.$$

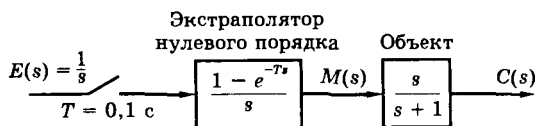


Рис. 12.11 (3)

(б) Проверьте результат с помощью MATLAB, воспользовавшись методом разложения на простые дроби.

12.13. (а) Для системы на рис. 12.13 (3) определите ее реакцию в моменты квантования на единичное ступенчатое воздействие. Представьте $c(kT)$ в виде графика.

(б) С помощью SIMULINK промоделируйте систему и проверьте график $c(kT)$ из п. (а).

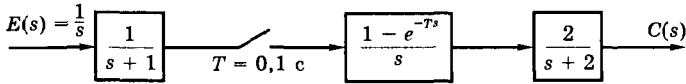


Рис. 12.13 (3)

12.14. (а) Определите передаточную функцию $C(z)/E(z)$ для системы, изображенной на рис. 12.14 (3).

(б) Для этой системы выразите $C(z)$ как функцию от входного сигнала в случае, если квантователь перед $G_1(s)$ отсутствует.

(в) Определите передаточную функцию $C(z)/E(z)$ в случае, если квантователь перед $G_3(s)$ отсутствует.

(г) Для систем из пп. (а), (б) и (в) укажите передаточные функции, которые в качестве множителя содержат передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка.

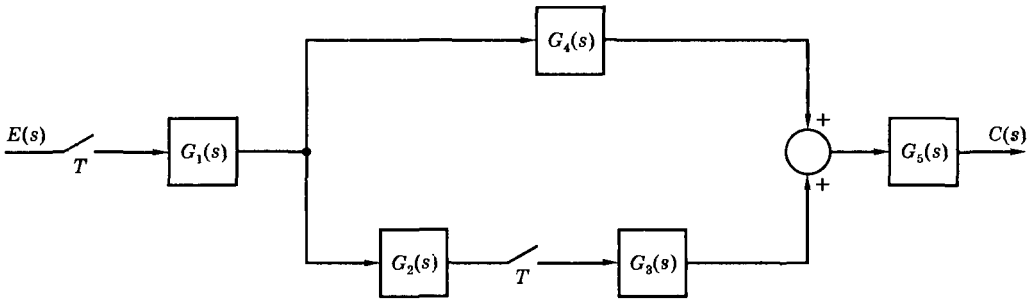


Рис. 12.14 (3)

12.15. (а) В системе на рис. 12.15 (3) цифровой регулятор описывается разностным уравнением $m(k+1) = m(k) + 0,5 e(k)$, где $e(k)$ есть вход регулятора, а $m(k)$ — его выход. Определите передаточную функцию $C(z)/E(z)$, если частота квантования равна 5 Гц.

(б) Используя результат п. (а), получите модель системы в переменных состояния. Модель имеет второй порядок.

(в) Убедитесь, что модель из п. (б) имеет правильную передаточную функцию.

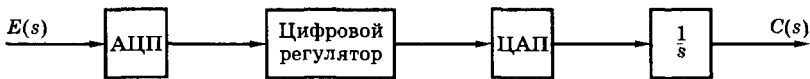


Рис. 12.15 (3)

12.16. Для каждой из систем на рис. 12.16 (3) выразите $C(z)$ как функцию от входного сигнала.

12.17. На рис. 12.17 (3) изображена система управления положением жесткого спутника. Модель спутника была получена в разделе 2.6. В данной системе реализована цифровая коррекция, а период квантования равен 0,1 с.

(а) Определите импульсную передаточную функцию спутника.

(б) Считая, что $D(z) = 1$, определите передаточную функцию замкнутой системы.

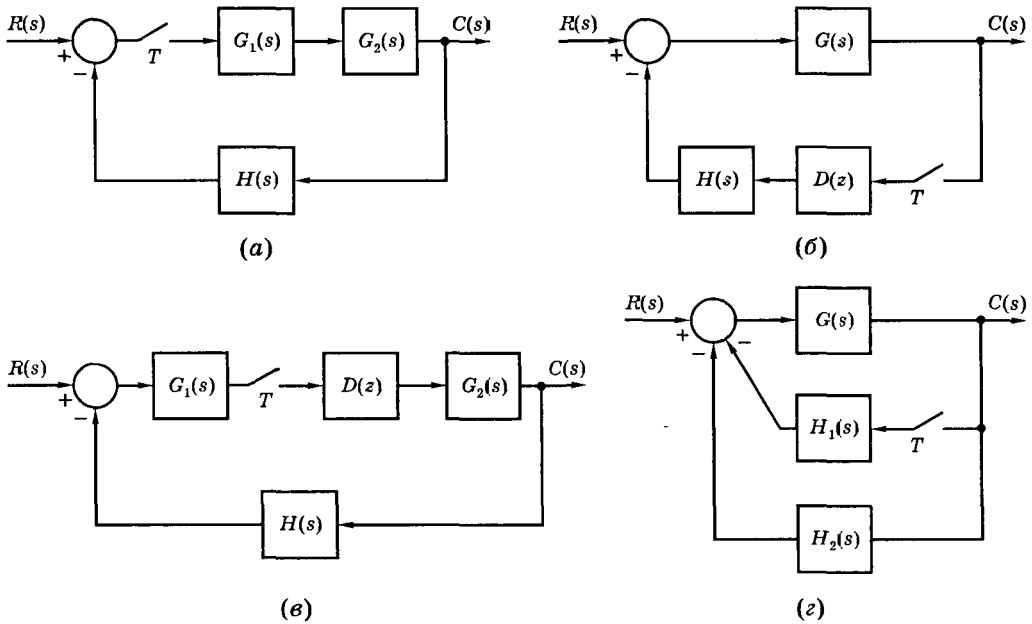


Рис. 12.16 (3)

(в) Предположим, что цифровой регулятор имеет передаточную функцию

$$D(z) = 1,2 + \frac{z-1}{z}.$$

В главе 13 будет показано, что эта передаточная функция соответствует ПД-регулятору. Определите передаточную функцию замкнутой системы.

(г) Проверьте передаточную функцию, полученную в п. (а), модифицировав программу MATLAB из примера 12.7.

12.18. Обратитесь еще раз к системе управления положением жесткого спутника из задачи 12.17.

(а) Получите модель объекта в дискретных переменных состояния, считая что одна из них соответствует угловому положению спутника, а другая — угловой скорости.

(б) Проверьте результат п. (а) с помощью MATLAB.

(в) Считая, что $D(z) = 1$, используйте результат п. (а) для построения модели замкнутой системы в переменных состояния.

(г) В предположении, что цифровой регулятор имеет передаточную функцию

$$D(z) = 1,2 + \frac{z-1}{z},$$

изобразите модель замкнутой системы в переменных состояния. Для этого используйте результаты п. (а) и учтите, что модель имеет третий порядок.

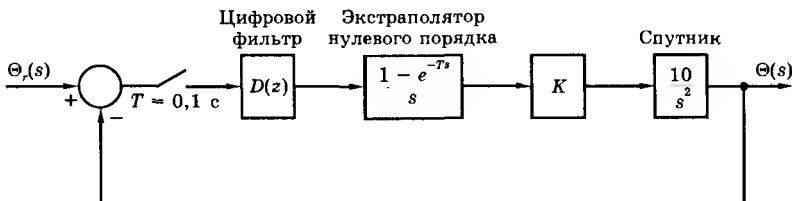


Рис. 12.17 (3)

- (д) С помощью MATLAB определите передаточную функцию замкнутой системы, используя результат п. (г) при $K = 1$. Тем самым будут проверены результаты задачи 12.17, п. (в) в случае, когда $K = 1$.

12.19. Рассмотрите систему регулирования температуры в комнате для температурных испытаний [рис. 12.19 (3)]. В данной задаче считайте, что возмущение отсутствует.

- (а) Определите передаточную функцию объекта $G(z)$.
- (б) С помощью MATLAB проверьте определение $G(z)$.
- (в) Используя выражение $G(z)$, изобразите схему моделирования объекта, считая что $x(k) = y(k)$.
- (г) По результату п. (в) запишите уравнения состояния для объекта.
- (д) Проверьте результат п. (г), вычислив передаточную функцию объекта по его уравнениям состояния.
- (е) Проверьте результат п. (д) с помощью MATLAB.

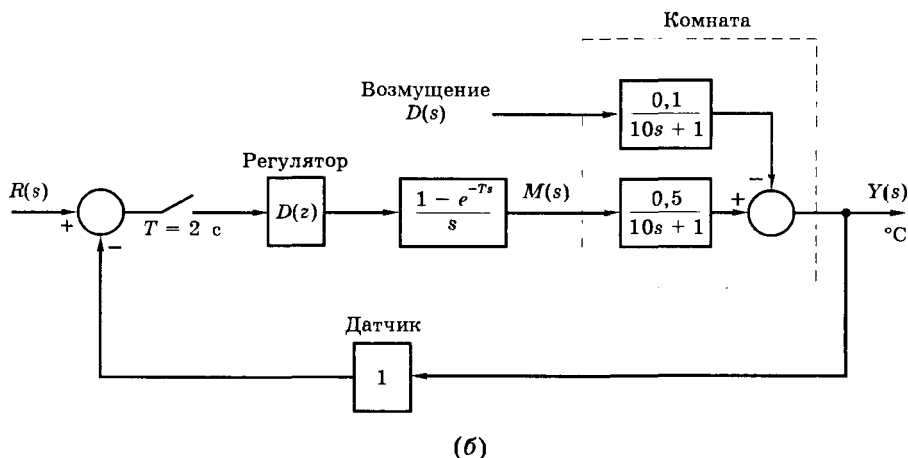
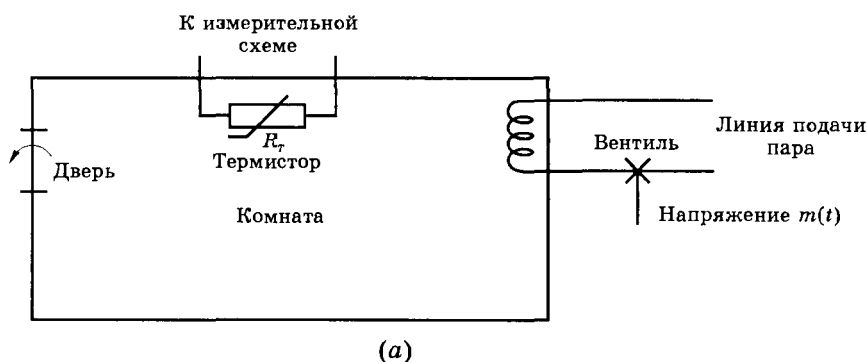


Рис. 12.19 (3)

12.20. Рассмотрите систему управления звеном руки робота, представленную на рис. 12.20 (3). Эта система была описана ранее в разд. 2.12. Передаточная функция объекта имеет вид:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = G_p(s) = \frac{0,15}{s(s+1)(s+5)}.$$

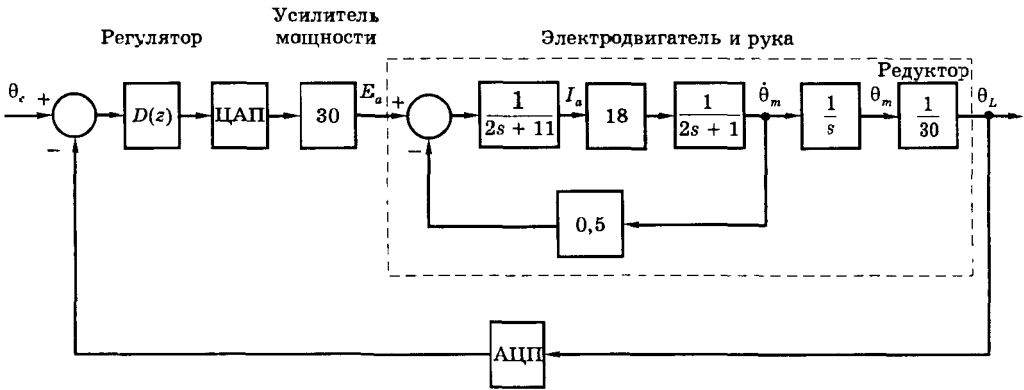


Рис. 12.20 (3)

- Без определения передаточной функции $G(z)$ укажите только положение полюсов $G(z)$, если $T = 0,02$ с.
- На основании п. (а) вычислите полином третьего порядка, соответствующий знаменателю передаточной функции объекта.
- С помощью MATLAB определите импульсную передаточную функцию объекта $G(z)$. Знаменатель этой функции должен иметь вид полинома, найденного в п. (б).
- С помощью программы MATLAB из примера 12.7 определите модель объекта в дискретных переменных состояния.

12.21. На рис. 12.21 (3) приведена структурная схема системы управления содержанием углекислого газа в камере для испытания роста растений. Запоздыванием в измерительной цепи в данном случае мы пренебрегаем.

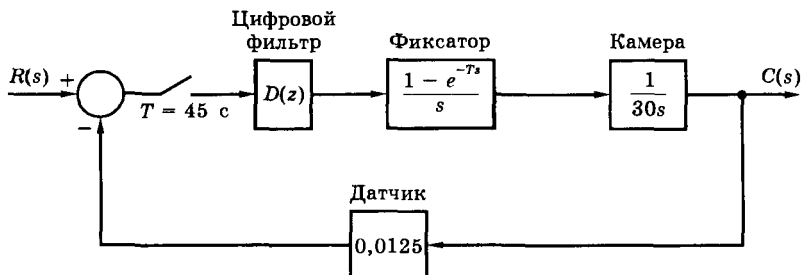
- Изобразите модель объекта (камеры) в переменных состояния.
- Используя результат п. (а), изобразите модель объекта в дискретных переменных состояния.
- Определите модель замкнутой системы в дискретных переменных состояния, считая что $D(z) = 1$. Сохраните тот же физический смысл переменных состояния, что и в п. (б).
- Предположим, что цифровой фильтр имеет передаточную функцию

$$D(z) = K_p + \frac{K_I T z}{z-1},$$

соответствующую дискретному ПИ-регулятору. Таким образом, замкнутая система имеет второй порядок. Получите модель системы в дискретных переменных состояния, сохраняя условия п. (в).

12.22. Рассмотрите модель в переменных состояния для спутника из примера 12.13.

Рис. 12.21 (3)



- (а) С помощью MATLAB проверьте правильность получения модели в переменных состояния.
- (б) С помощью MATLAB определите передаточную функцию объекта $G(z)$ по его уравнениям состояния.
- (в) С помощью MATLAB получите другой вид модели объекта в переменных состояния.
- (г) С помощью MATLAB проверьте передаточную функцию объекта, полученную на основании модели в переменных состояния из п. (в).

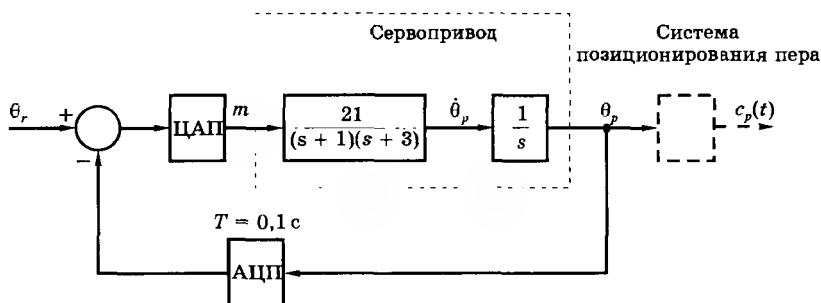
12.23. На рис. 12.23 (3) приведена структура следящей системы управления положением пера плоттера.

- (а) Определите положение полюсов передаточной функции $G(z)$.
- (б) На основании п. (а) запишите полином третьего порядка, соответствующий знаменателю $G(z)$.
- (в) С помощью MATLAB найдите импульсную передаточную функцию объекта $G(z)$. Знаменатель передаточной функции должен совпадать с полиномом из п. (б).
- (г) Получите модель объекта в непрерывных переменных состояния, являющихся компонентами вектора

$$\mathbf{x}^T(t) = [\theta_p(t) \quad \dot{\theta}_p(t) \quad \ddot{\theta}_p(t)].$$

- (д) С помощью MATLAB получите модель в дискретных переменных состояния на основе модели в непрерывных переменных состояния из п. (г).
- (е) С помощью MATLAB проверьте передаточную функцию $G(z)$, полученную на основании модели из п. (д).

Рис. 12.23 (3)



12.24. Все пункты этой задачи требуют вычислений на компьютере. Рассмотрите систему управления звеном руки робота из задачи 12.20.

- (а) Используя передаточную функцию объекта $G_p(s)$, заданную в задаче 12.20, с помощью MATLAB получите модель объекта в непрерывных переменных состояния.
- (б) С помощью MATLAB убедитесь, что модель, полученная в п. (а), дает правильную передаточную функцию.
- (в) Используя результат п. (а), с помощью MATLAB получите модель объекта в дискретных переменных состояния.
- (г) С помощью MATLAB, на основании результата п. (в) вычислите импульсную передаточную функцию объекта.
- (д) По передаточной функции, полученной в п. (г), с помощью MATLAB определите иную конфигурацию модели объекта в переменных состояния.
- (е) С помощью MATLAB убедитесь, что модель объекта из п. (д) имеет правильную передаточную функцию.

13. Анализ и синтез цифровых систем управления

В главе 12 был рассмотрен метод получения уравнения относительно выходной переменной линейной стационарной дискретной системы. Затем было показано, как этот метод может быть применен к цифровым системам управления. В настоящей главе мы прежде всего займемся исследованием временных характеристик дискретных систем. После этого рассмотрим критерий устойчивости этих систем и его применение, что непосредственно приведет к установлению связи между расположением корней характеристического уравнения системы и ее переходной функцией. Далее будет показано, что метод корневого годографа, разработанный для анализа непрерывных систем, может быть также применен и к дискретным системам.

Мы покажем также, что к дискретным системам применимы и классические частотные методы, основанные на использовании критерия Найквиста, диаграмм Боде и амплитудно-фазовых характеристик. Дополнительно будет показано, что с помощью определенного преобразования устойчивость дискретных систем можно исследовать по известному критерию Рауса-Гурвица. В заключение будет рассмотрена проблема синтеза дискретных систем. При этом предполагается, что читатель знаком с рассмотренными ранее методами синтеза непрерывных систем (главы 4-9).

13.1. Два примера

Временные характеристики дискретных систем мы введем с помощью двух примеров.

Пример 13.1

Рассмотрим систему первого порядка, изображенную на рис. 13.1, и найдем ее переходную функцию. В разделе 12.7 было показано, что в такой системе выражение для $C(s)$ имеет вид:

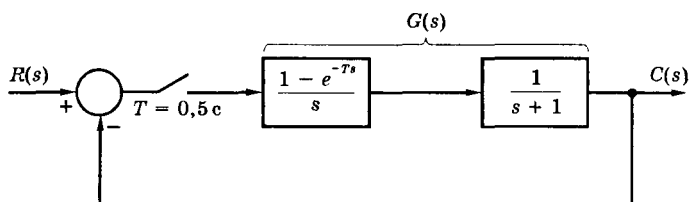
$$C(s) = \frac{G(s)R^*(s)}{1 + G^*(s)} \quad (13-1)$$

и далее

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} R(z). \quad (13-2)$$

Рис. 13.1

Система к примеру 13.1



По таблице z -преобразований находим

$$G(z) = \mathfrak{z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = (1 - e^{-Ts}) \Big|_{e^{-Ts}=z} \mathfrak{z} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right],$$

или

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \right]_{T=0,5} = \frac{0,393}{z-0,607}.$$

Таким образом, замкнутая система имеет передаточную функцию

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0,393}{z-0,214}. \quad (13-3)$$

Поскольку входом системы является единичная ступенчатая функция, то $R(z) = z/(z-1)$ и из (13-2) имеем:

$$C(z) = \frac{0,393}{z-0,214} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0,393z}{(z-1)(z-0,214)}.$$

Далее,

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{0,393}{(z-1)(z-0,214)} = \frac{0,5}{z-1} - \frac{0,5}{z-0,214}.$$

Умножая каждую простую дробь на z , нетрудно видеть, что обратное z -преобразование имеет вид:

$$c(nT) = 0,5[1 - (0,214)^n].$$

Эта зависимость представлена точками на рис. 13.2, где также изображена непрерывная переходная функция $c(t)$, полученная путем моделирования. Читателю предоставляется возможность вычислить $C(s)$ по выражению (13-1), после чего станет ясно, почему для определения $c(t)$ мы обычно используем метод имитационного моделирования.

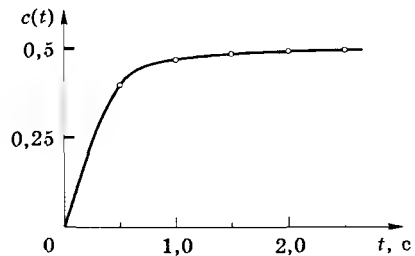


Рис. 13.2. Переходная функция системы

Пример 13.2

В качестве второго примера рассмотрим систему управления звеном руки робота (рис. 13.3). Эта система была подробно описана в разделе 2.12. Если пренебречь индуктивностью обмотки якоря сервопривода (см. раздел 2.7), то структурная схема системы управления примет вид рис. 13.4. Выходом $c(t)$ является угол поворота звена. Как видим, система имеет структуру, аналогичную рассмотренной в предыдущем примере. Поэтому [см. (13-2)]

$$C(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z),$$

где

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathfrak{z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right] = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)^2(z-e^{-T})} \right]_{T=1} \\ &= \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368}. \end{aligned} \quad (13-4)$$

Тогда

$$\frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368 + 0,368z + 0,264} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}. \quad (13-5)$$

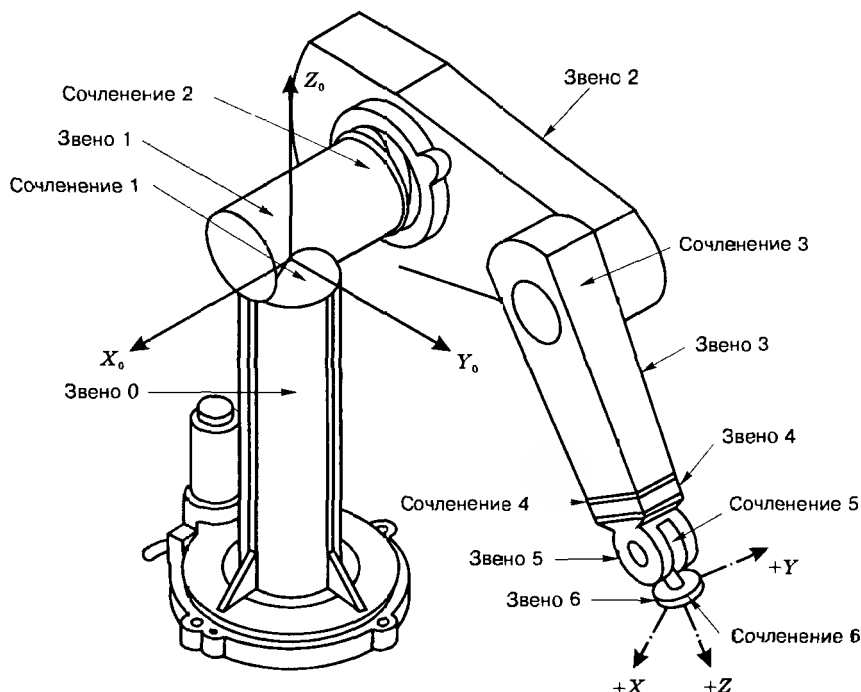


Рис. 13.3. Промышленный робот

Поскольку входной сигнал представляет собой единичную ступенчатую функцию, то $R(z) = z/(z - 1)$ и

$$C(z) = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632} \cdot \frac{z}{z - 1} = 0,368z^{-1} + 1,00z^{-2} + 1,40z^{-3} + 1,40z^{-4} + 1,15z^{-5} + \\ + 0,90z^{-6} + 0,80z^{-7} + 0,87z^{-8} + 0,99z^{-9} + 1,08z^{-10} + 1,08z^{-11} + 1,00z^{-12} + 0,98z^{-13} + \dots$$

Так как полюсы функции $C(z)$ являются комплексными, то не существует простой процедуры определения обратного z -преобразования. Поэтому значения $c(nT)$ получены путем разложения $C(z)$ в бесконечный ряд. Заметим, что конечное значение $c(nT)$ равно

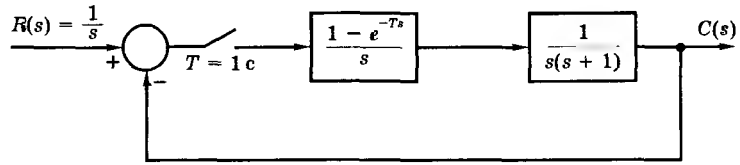
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)C(z) = \frac{0,632}{0,632} = 1$$

Проверить выражения $G(z)$ и передаточной функции замкнутой системы, а также найти переходную функцию можно с помощью программы MATLAB:

```
Gpnum = [0 0 1]; Gpden = [1 1 0];
[Ac, Bc, Cc, Dc] = tf2ss(Gpnum, Gpden);
[A, B] = c2d(Ac, Bc, 1);
[Gznum, Gzden] = ss2tf(A, B, Cc, Dc)
pause
Tznum = Gznum, Tzden = Gznum + Gzden
pause
[A, B, C, D] = tf2ss(Tznum, Tzden);
sys = ss(A, B, C, D, 1)
[c, t] = step(sys, 0 : 1 : 10)
```

Рис. 13.4

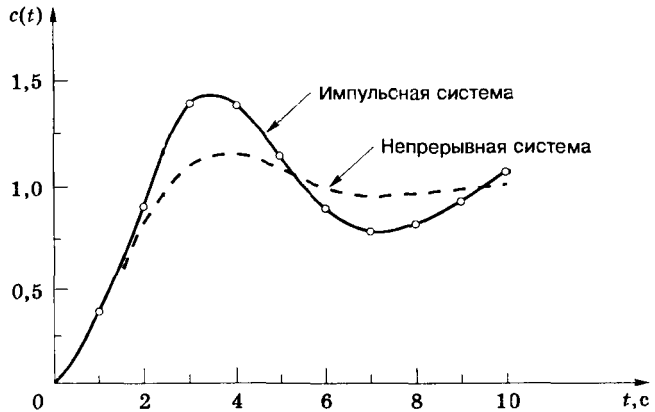
Система
к примеру 13.2



Переходная функция системы изображена на рис. 13.5. Ее вид в промежутках между моментами квантования получен в результате моделирования. Переходная функция той же системы, но без квантователя и экстраполятора нулевого порядка (непрерывная система), также приведена на рис. 13.5. Скорее всего, такая реакция является неприемлемой для звена руки робота. Заметим, что квантование оказывает дестабилизирующее влияние на систему. Этот эффект мы подробно рассмотрим ниже.

Рис. 13.5

Переходные функции
системы из примера 13.2



Переходную функцию системы из последнего примера можно найти, воспользовавшись ее разностным уравнением. Из (13-5) имеем:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,368z^{-1} + 0,264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,632z^{-2}}, \quad (13-6)$$

или

$$C(z)[1 - z^{-1} + 0,632z^{-2}] = R(z)[0,368z^{-1} + 0,264z^{-2}].$$

Применяя обратное z -преобразование и перегруппируя члены, получим разностное уравнение:

$$c(kT) = 0,368r[(k-1)T] + 0,264r[(k-2)T] + c[(k-1)T] - 0,632c[(k-2)T]. \quad (13-7)$$

Это уравнение решается итерационным методом относительно $c(kT)$, $k \geq 0$, при $r(kT) = 1$, $k \geq 0$. Начальные условия для этого уравнения равны $r(-1) = r(-2) = c(-1) = c(-2) = 0$. Решение разностного уравнения дает те же значения $c(kT)$, которые были получены в примере 13.2.

Уравнение (13-7) может быть запрограммировано для решения на компьютере, но программа будет отлична от той, которая приведена в примере 13.2 (в этом примере программа работает с моделью системы в переменных состояния). Для уравнения (13-7) программа MATLAB имеет вид:

```
rkminus1 = 0; rkminus2 = 0;
ckminus1 = 0; ckminus2 = 0;
rk = 1;
```

```

for k = 0 : 10
    ck = 0.368*rkminus1 + 0.264*rkminus2 + ckminus1 - 0.632*ckmi-
        nus2;
    [k, ck]
    rkminus2 = rkminus1; rkminus1 = rk;
    ckminus2 = ckminus1; ckminus1 = ck;
end

```

В этой программе $rkminus1$ есть $r(k-1)$ и т.д. Данную систему можно также смоделировать на гибридном компьютере, если в качестве квантователя/фиксатора использовать соединенные последовательно АЦП и ЦАП.

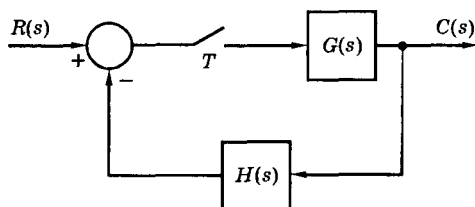
Четвертый метод имитационного моделирования системы основан на численном интегрировании дифференциальных уравнений объекта. В этом случае необходимо предусмотреть логическое устройство, которое обновляло бы вход объекта только в моменты квантования и тем самым точно моделировало выход фиксатора.

Как только что было показано, гораздо проще получить реакцию импульсной системы на входное воздействие путем моделирования, а не с помощью z -преобразования. С увеличением порядка системы моделирование становится еще более предпочтительным; для систем высокого порядка имитационное моделирование является единственным практическим методом получения временных характеристик.

13.2. Устойчивость дискретных систем

Перед тем, как рассматривать проблему устойчивости дискретных систем, рассмотрим импульсную систему, изображенную на рис. 13.6.

Рис. 13.6
Импульсная система



Для этой системы

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} R(z), \quad (13-8)$$

где p_i и z_i есть, соответственно, полюсы и нули передаточной функции замкнутой системы. Используя разложение на простые дроби, мы можем записать $C(z)$ в виде:

$$C(z) = \frac{k_1 z}{z - p_1} + \frac{k_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{k_n z}{z - p_n} + C_R(z), \quad (13-9)$$

где $C_R(z)$ содержит те полюсы $C(z)$, которые обусловлены полюсами $R(z)$. Первые n членов выражения (13-9) определяют *собственное (свободное) движение* системы. Если обратное z -преобразование для этих членов с течением времени стремится к нулю, то система является устойчивой в смысле «ограниченный вход — ограниченный выход». Это понятие

было введено в разделе 5.2. Обратное z -преобразование для i -го члена (13-9) при $t = nT$ имеет вид:

$$\mathfrak{z}^{-1} \left[\frac{k_i z}{z - p_i} \right] = k_i (p_i)^k. \quad (13-10)$$

Следовательно, если $|p_i| < 1$, то эта составляющая стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Тогда система, для которой $C(z)$ определяется выражением (13-8), будет устойчива, если абсолютное значение каждого полюса p_i меньше единицы. Сомножители вида $(z - p_i)$ входят в выражение $[1 + \overline{GH}(z)]$ в (13-8). Поэтому система на рис. 13.6 имеет характеристическое уравнение:

$$1 + \overline{GH}(z) = 0. \quad (13-11)$$

Система является устойчивой, если все корни уравнения (13-11) расположены внутри окружности единичного радиуса на z -плоскости. Уравнение (13-11) можно также привести к виду:

$$1 + \overline{GH}^*(s) = 0. \quad (13-12)$$

Для того, чтобы система была устойчива, все корни уравнения (13-12) должны быть расположены в левой половине s -плоскости. Но поскольку преобразование со звездочкой является функцией e^{Ts} , то корни уравнения (13-12) в общем случае найти очень трудно.

13.3. Критерий Джури

Для непрерывных систем относительно невысокого порядка критерий Рауса-Гурвица является простым и удобным способом определения их устойчивости. Этот критерий предполагает, что характеристическое уравнение системы должно иметь вид алгебраического полинома, поэтому он не может быть применен к импульсным системам с характеристическим уравнением вида (13-12). Кроме того, поскольку граница устойчивости на z -плоскости отличается от соответствующей границы на s -плоскости, то критерий Рауса-Гурвица не может быть применен к системам, характеристическое уравнение которых является функцией переменной z . Аналогом критерия Рауса-Гурвица применительно к импульсным системам является критерий Джури [1].

Пусть характеристическое уравнение импульсной системы имеет следующий вид:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n > 0. \quad (13-13)$$

Чтобы воспользоваться критерием Джури, вычислим коэффициенты, представленные в таблице 13.1. Заметим, что элементы второй строки, четвертой строки и т.д. совпадают с элементами первой строки, третьей строки и т.д., но в обратном порядке. Элементы первых двух строк образуются из коэффициентов характеристического уравнения (13-13), а элементы последующих строк вычисляются как определители

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}.$$

Таблица 13.1. Массив коэффициентов для критерия Джури

z^0	z^1	z^2	...	z^{n-k}	...	z^{n-1}	z^n
a_0	a_1	a_2	...	a_{n-k}	...	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k	...	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-k}	...	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_{k-1}	...	b_0	
c_0	c_1	c_2	...	c_{n-k}	...		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	c_{k-2}	...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
l_0	l_1	l_2	l_3				
l_3	l_2	l_1	l_0				
m_0	m_1	m_2					

Необходимые и достаточные условия того, что $Q(z)$ не имеет корней вне единичной окружности, состоят в следующем:

$$\begin{aligned}
 Q(1) &> 0 & |a_0| &> |a_{n-1}| \\
 (-1)^n Q(-1) &> 0 & \dots & \\
 |a_0| &< a_n \\
 |b_0| &> |b_{n-1}| & |m_0| &> |m_2| \\
 |c_0| &> |c_{n-2}|
 \end{aligned}$$

Заметим, что для системы второго порядка массив содержит только одну строку, поэтому никаких дополнительных вычислений не требуется. При увеличении порядка системы на единицу в массив необходимо добавить еще две строки. Для системы первого порядка единственный корень характеристического уравнения равен $z = -a_0/a_1$ и устойчивость системы очевидна. В заключение заметим, что для системы n -го порядка, где $n > 1$, существуют $n + 1$ ограничений. Далее поясним применение критерия Джури на примере.

Пример 13.3

Рассмотрим еще раз систему управления звеном руки робота (см. рис. 13.4 и пример 13.2). Предположим, что к передаточной функции объекта добавлен коэффициент K и требуется определить значения K , при которых система будет устойчивой. На основании (13-4) и (13-11) характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + KG(z) = 1 + \frac{(0,368z + 0,264)K}{z^2 - 1,368z + 0,368} = 0,$$

или в виде (13-13):

$$Q(z) = z^2 + (0,368K - 1,368)z + (0,368 + 0,264K) = 0.$$

Образует массив Джури:

$$\begin{array}{ccc}
 z^0 & z^1 & z^2 \\
 \hline
 0,368 + 0,264K & 0,368K - 1,368 & 1
 \end{array}$$

Из условия $Q(1) > 0$ получим:

$$Q(1) = 1 + (0,368K - 1,368) + (0,368 + 0,264K) > 0,$$

откуда с необходимостью вытекает $K > 0$. Условие $(-1)^2 Q(-1) > 0$ дает:

$$(-1)^2 Q(-1) = 1 - (0,368K - 1,368) + (0,368 + 0,264K) > 0,$$

откуда следует $K < 2,736/0,104 = 26,3$. Из условия $|a_0| < a_2$ имеем

$$|0,368 + 0,264K| < 1,$$

откуда $K < 0,632/0,264 = 2,39$. Таким образом, система устойчива при $0 < K < 2,39$. Результат можно проверить с помощью следующей программы MATLAB:

```
K = [1 2.39 3];
for k = 1 : 3
    q = [1 (0.368*K(k) - 1.368) (0.264*K(k) + 0.368)];
    r = roots(q);
    rootmag = sqrt((real(r(1)))^2 + (imag(r(1)))^2)
end
results: rootmag = 0.7950 0.9995 1.0770
```

Вычисленные корни характеристического уравнения говорят о том, что при $K = 1$ система устойчива, при $K = 2,39$ она находится на границе устойчивости, а при $K = 3$ является неустойчивой.

13.4. Отображение s -плоскости на z -плоскость

При изучении временных характеристик непрерывных систем (раздел 5.6) мы связали вид этих характеристик с расположением полюсов замкнутой системы (корней характеристического уравнения). То же самое мы сделаем и для импульсных систем.

Предварительно рассмотрим функцию $e(t)$, которая подвергается квантованию и дает преобразование со звездочкой $E^*(s)$. В моменты квантования дискретные значения сигнала полностью соответствуют исходному непрерывному сигналу. Например, если $e(t)$ имеет вид экспоненты, то квантованный сигнал в моменты квантования также является экспонентой с той же постоянной времени. Если $e(t) = e^{-at}$, то

$$E(s) = \frac{1}{s+a}, \quad E^*(s) = \frac{e^{Ts}}{e^{Ts} - e^{-aT}}, \quad E(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Таким образом, полюс $s = -a$ переходит на z -плоскости в полюс $z = e^{-aT}$. Из таблиц z -преобразования можно видеть, что полюс функции $E(s)$, расположенный в точке $s = s_1$, отображается на z -плоскости в полюс $E(z)$, расположенный в точке $z = e^{s_1 T}$. Этот факт очевиден также из второго свойства преобразования со звездочкой, приведенного в разделе 12.3. Мы используем это свойство в обратной трактовке. Полюсу на z -плоскости в точке $z = z_1$ соответствует временная характеристика, эквивалентная (в моменты квантования) действию полюса s_1 на s -плоскости, где s_1 и z_1 связаны соотношением $z_1 = e^{s_1 T}$.

Рассмотрим сначала отображение на z -плоскость левой половины основной полосы, как показано на рис. 13.7. Если s находится на мнимой оси, то

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{j\omega T}. \quad (13-14)$$

Следовательно, полюсы, расположенные на единичной окружности на z -плоскости, эквивалентны полюсам, расположенным на мнимой оси на s -плоскости. Это означает, что система находится на границе устойчивости и в ней возникают незатухающие колебания, частота которых согласно (13-14) равна аргументу полюса, деленному на T . Поскольку при $\omega = \omega_s/2$ $\omega T = \pi$, то отрезок мнимой оси, заключенный между $-j\omega_s/2$ и $j\omega_s/2$, отображается на z -плоскости в единичную окружность. В действительности любой отрезок мнимой оси длиной ω_s отображается на z -плоскости в единичную окружность. Правая половина основной полосы отображается в область вне единичной окружности, а левая половина основной

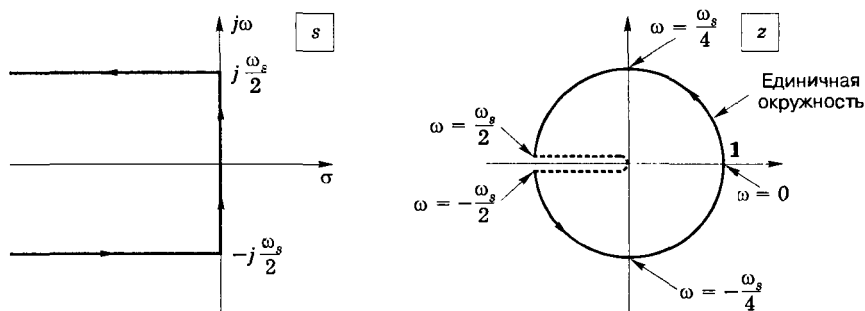


Рис. 13.7. Отображение основной полосы на z -плоскость

полосы — в область внутри единичной окружности. Поскольку областью устойчивости на s -плоскости является ее левая половина, то областью устойчивости на z -плоскости является ее часть, расположенная внутри единичной окружности.

Линии постоянного затухания ($\sigma = \text{const}$) отображаются в окружности, как показано на рис. 13.8. Это очевидно из соотношения

$$z = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega T}.$$

Линии постоянной частоты ($\omega = \text{const}$) отображаются в лучи, как показано на рис. 13.9. Это следует из того же соотношения, если в нем считать $\omega = \text{const}$, а $\sigma = \text{var}$. Для линий постоянного коэффициента затухания σ и ω связаны соотношением

$$\frac{\omega}{\sigma} = \text{tg} \beta$$

Тогда

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\sigma T \text{tg} \beta}. \quad (13-15)$$

Поскольку σ отрицательно во втором и третьем квадрантах s -плоскости, то (13-15) представляет собой уравнение логарифмической спирали, радиус которой уменьшается с ростом абсолютного значения σ . Это показано на рис. 13.10.

Как было отмечено выше, квантованная функция в моменты квантования имеет те же значения, что и исходная непрерывная функция. Поэтому, используя отображения, пред-

Рис. 13.8

Отображение линий
постоянного
затухания
на z -плоскость

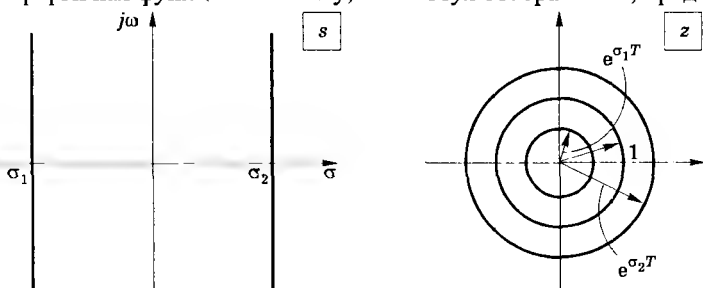


Рис. 13.9

Отображение линий
постоянной частоты
на z -плоскость

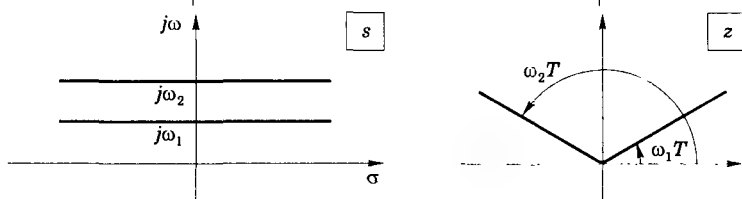
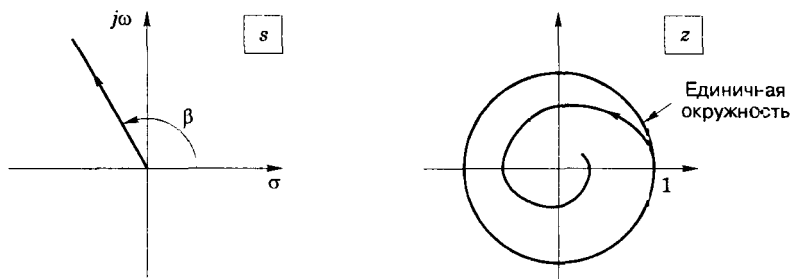


Рис. 13.10
Отображение
линии
постоянного
коэффициента
затухания
на z -плоскость



ставленные на рис. 13.7–13.10, мы можем соотнести временные характеристики системы с расположением на z -плоскости корней ее характеристического уравнения. Это проиллюстрировано несколькими примерами на рис. 13.11. Поскольку

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}, \quad (13-16)$$

то переходные характеристики зависят не только от s , но также от T .

Рассмотрим на рис. 13.11 случай комплексно-сопряженных полюсов $s = \sigma \pm j\omega$. Этим полюсам в переходной характеристике соответствует член вида $k_1 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$. В результате квантования эти полюсы отображаются на z -плоскости в полюсы

$$z = e^{sT} \big|_{s=\sigma \pm j\omega} = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T} = r e^{\pm j\theta}.$$

Поэтому корням характеристического уравнения $z = r e^{\pm j\theta}$ в переходной характеристике будет соответствовать член вида

$$k_1 e^{\sigma k T} \cos(\omega k T + \varphi) = k_1 (r)^k \cos(\theta k + \varphi).$$

Все приведенные выше рассуждения относятся к системам, для которых существует передаточная функция. Рассмотрим теперь систему на рис. 13.12, для которой передаточной функции не существует. Нетрудно показать, используя метод из раздела 12.8, что выход этой системы определяется выражением

$$C(z) = \frac{\overline{GR}(z)}{1 + \overline{GH}(z)}. \quad (13-17)$$

Отсюда видно, что полюсы $C(z)$, определяющие характер свободного движения системы, совпадают с корнями уравнения

$$1 + \overline{GH}(z) = 0. \quad (13-18)$$

Следовательно, (13-18) есть характеристическое уравнение системы, и приведенный выше анализ полностью применим к системам данного типа. Импульсные системы, для которых не существует передаточной функции, не представляют проблем при определении их характеристического уравнения.

Пример 13.4

Обратимся к примеру 13.1, в котором замкнутая система при $T = 0,5$ с имеет передаточную функцию

$$T(z) = \frac{0,393}{z - 0,214}.$$

Полюсу этой функции $z = 0,214$ на s -плоскости соответствует полюс, определяемый из соотношения

$$z = 0,214 = e^{sT} = e^{0,5s}.$$

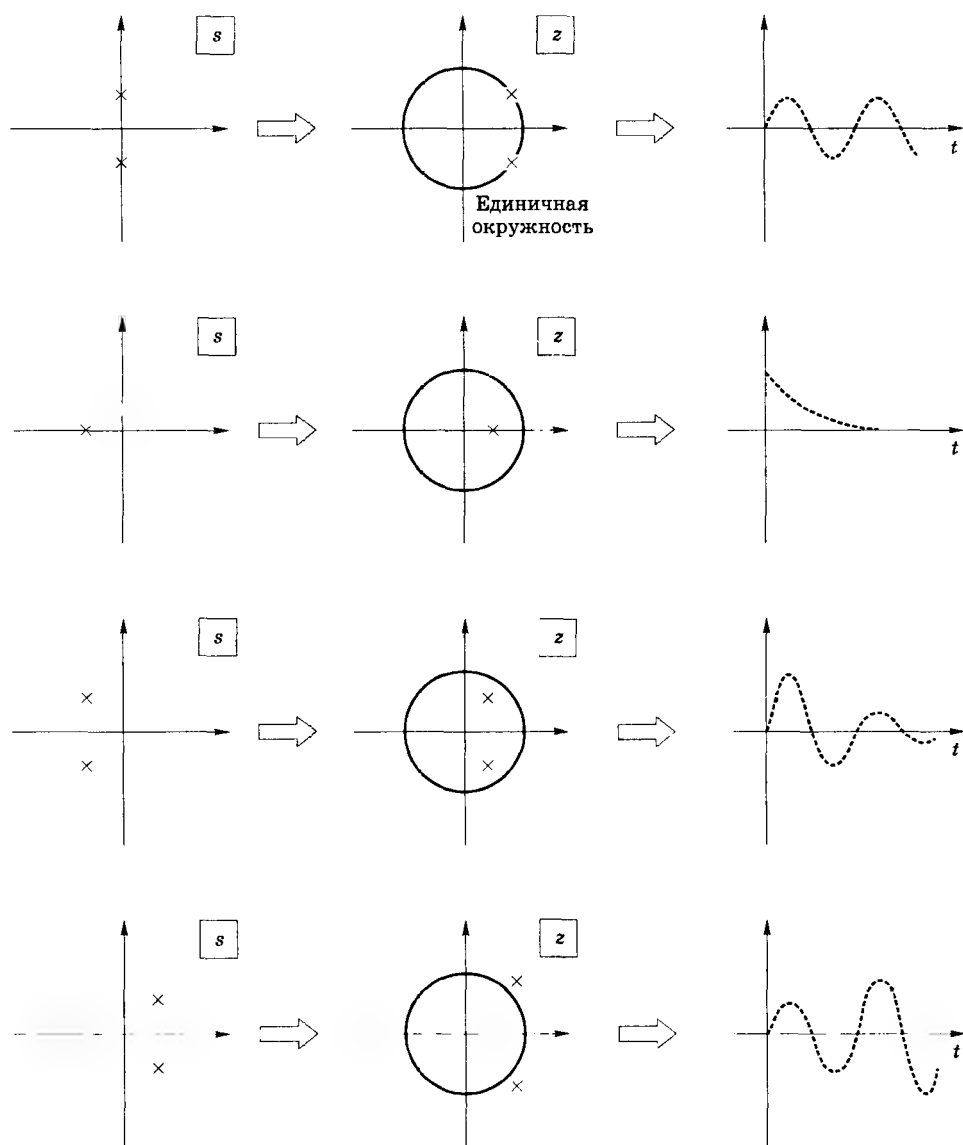
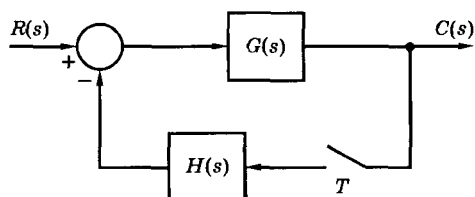


Рис. 13.11. Примеры связи между расположением полюсов и временными характеристиками

Рис. 13.12
Импульсная система



Отсюда находим $s = \ln 0,214/0,5 = -3,08$. Поскольку постоянная времени обратна модулю действительной части полюса на s -плоскости, то для данной системы она равна $\tau = 1/3,08 = 0,325$ с. Эта постоянная времени очевидна из переходной функции системы, изображенной на рис. 13.2. Заметим, что в промежутках между моментами квантования поведение переходной функции не является экспоненциальным.

Рассмотрим теперь систему управления звеном руки робота из примера 13.2. Замкнутая система имеет передаточную функцию

$$T(z) = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}.$$

Полюсы этой передаточной функции являются комплексными и равны $z = 0,5 \pm j0,618 = 0,795e^{\pm j51^\circ} = 0,795e^{\pm j0,890}$. Поскольку

$$z = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T} = 0,795e^{\pm j0,890} \text{ и } T = 1 \text{ с,}$$

то соответствующие полюсы на s -плоскости занимают положение $s = -0,229 \pm j0,890 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ [см. (5-58)]. Выражая отсюда коэффициент затухания ζ и собственную частоту ω_n , получим $\zeta = 0,249$ и $\omega_n = 0,919$. Поскольку постоянная времени системы $\tau = 1/\zeta\omega_n$, то $\tau = 4,37$ с. Согласно рис. 4.8, переходная функция имеет перерегулирование около 45%. Все эти показатели подтверждаются графиком переходной функции на рис. 13.5, причем еще раз подчеркнем, что они имеют силу только в моменты квантования.

13.5. Корневой годограф

Для импульсной системы, изображенной на рис. 13.13, передаточная функция определяется выражением

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KGH(z)}. \quad (13-19)$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + \overline{KGH}(z) = 0. \quad (13-20)$$

По определению, корневой годограф этой системы представляет собой геометрическое место корней уравнения (13-20), образованное на z -плоскости в функции от коэффициента K . Поэтому построение корневого годографа для дискретных систем производится по тем же правилам, которые были разработаны для непрерывных систем. Если полиномы $F(z)$ и $F(s)$ имеют одинаковые коэффициенты, то и корни их будут одинаковыми. Основные правила построения корневого годографа были рассмотрены в главе 7, поэтому здесь мы лишь кратко перечислим их (см. таблицу 13.2).

Однако несмотря на то, что правила построения корневых годографов на s -плоскости и на z -плоскости одинаковы, имеется существенное отличие в их интерпретации. Область устойчивости на z -плоскости расположена внутри единичной окружности. Кроме того, как видно из рис. 13.11, одной и той же временной характеристике системы соответствует различное расположение корней на z -плоскости и на s -плоскости.

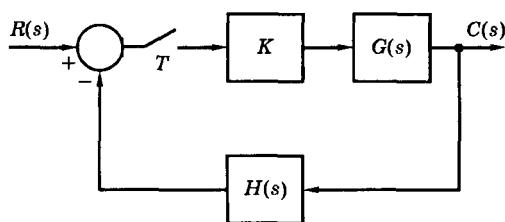


Рис. 13.13. Импульсная система

Если читатель не знаком с построением корневого годографа для непрерывных систем, то ему рекомендуется изучить первые четыре раздела главы 7. По причине сходства процедур построения корневого годографа для непрерывных и для дискретных систем мы их здесь не рассматриваем и переходим сразу к примеру.

Таблица 13.2. Правила построения корневого годографа

1. Корневой годограф симметричен относительно действительной оси.
2. Корневой годограф начинается в полюсах $\overline{GH}(z)$ и заканчивается в нулях $\overline{GH}(z)$, включая нули, расположенные в бесконечности.
3. Количество асимптот корневого годографа равно числу полюсов $\overline{GH}(z)$, n_p , минус число нулей $\overline{GH}(z)$, n_z , а углы, образованные асимптотами с положительным направлением действительной оси, равны

$$\frac{(2k+1)\pi}{n_p - n_z}, \quad k = 0, 1, \dots, (n_p - n_z - 1).$$

Асимптоты пересекают действительную ось в точке σ_a , где

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{полюсов } \overline{GH}(z) - \sum \text{нулей } \overline{GH}(z)}{n_p - n_z}.$$

4. Корневой годограф включает все точки действительной оси, расположенные слева от нечетного числа вещественных полюсов и нулей.
5. Точки отрыва корневого годографа появляются среди корней уравнения

$$\frac{d[\overline{GH}(z)]}{dz} = 0,$$

или, что то же самое,

$$D(z) \frac{dN(z)}{dz} - N(z) \frac{dD(z)}{dz} = 0, \quad \text{где } \overline{GZ}(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

Пример 13.5

Рассмотрим еще раз систему управления звеном руки робота на рис. 13.4 в примере 13.2. Для разомкнутой системы была получена ее передаточная функция:

$$KG(z) = K \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)} \right\} = \frac{K(0,368z + 0,264)}{(z-1)(z-0,368)} = \frac{0,368K(z+0,717)}{(z-1)(z-0,368)}.$$

Таким образом, корневой годограф начинается в точках $z = 1$ и $z = 0,368$ и заканчивается в точках $z = -0,717$ и $z = \infty$. Существует одна асимптота под углом 180° . Точки отрыва определяются корнями уравнения

$$D(z)N'(z) - N(z)D'(z) = (z^2 - 1,368z + 0,368)(0,368) - (0,368z + 0,264)(2z - 1,368) = 0,$$

или

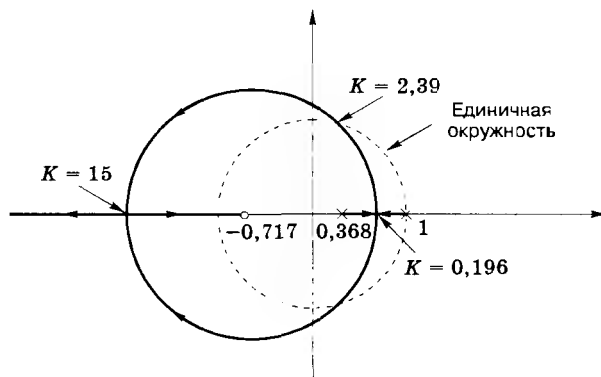
$$-0,368z^2 - 0,528z + 0,497 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $z = 0,648$ при $K = 0,196$ и $z = -2,08$ при $K = 15,0$. Корневой годограф изображен на рис. 13.14.

Точки пересечения корневого годографа с единичной окружностью (соответствующие границы устойчивости) можно найти с помощью критерия Джюри. В примере 13.3 было вычислено

Рис. 13.14

Корневой годограф
к примеру 13.5



значение $K = 2,39$, при котором система находится на границе устойчивости. Характеристическое уравнение системы

$$z^2 + (0,368K - 1,368)z + (0,368 + 0,264K) = 0$$

при $K = 2,39$ принимает вид:

$$z^2 - 0,488z + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $z = 0,244 \pm j0,97 = e^{\pm j75,9^\circ}$. В этих точках корневой годограф пересекает единичную окружность. При этом частота собственных колебаний системы может быть найдена из условия:

$$z = 0,244 \pm j0,97 = e^{\pm j75,9^\circ} = e^{\pm j1,33} = e^{\pm j\omega T}.$$

Поскольку $T = 1$ с, то частота колебаний $\omega = 1,33 \text{ с}^{-1} = 2\pi/T_0$. Период колебаний $T_0 = 2\pi/1,33 = 4,72$ с. Корневой годограф можно построить с помощью программы MATLAB:

```
rlocus([0.368 0.264], [1 -1.368 0.368])
```

Если бы мы провели натурные испытания системы управления звеном руки робота, увеличив коэффициент усиления до значения $K = 2,39$, то обнаружили бы, что рука раскачивается вперед и назад с периодом около 5 с. Однако *всегда* следует проявлять осторожность и не допускать, чтобы система была близка к границе устойчивости, потому что модель системы является несовершенной и трудно предсказать, как поведет себя реальная система.

13.6. Критерий Найквиста

Чтобы сформулировать критерий Найквиста для импульсных систем, рассмотрим две системы, изображенные на рис. 13.15. На рис. 13.15 (б) $G(s)$ включает в себя передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка. Ввиду сложности критерия Найквиста мы сначала напомним его основные положения применительно к непрерывным системам. Подробное изложение этого критерия приведено в главе 8, и читатель, который не знаком с критерием Найквиста, должен изучить главу 8 прежде чем прорабатывать материал данного раздела.

Для непрерывной системы на рис. 13.15 (а) передаточная функция имеет вид:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (13-21)$$

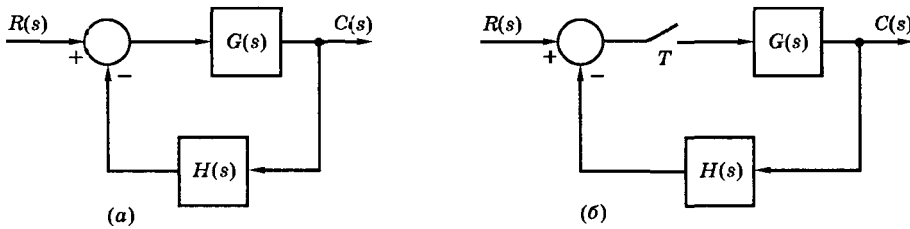


Рис. 13.15. Непрерывная и импульсная системы

а для импульсной системы на рис. 13.15 (б) она равна

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}. \quad (13-22)$$

Таким образом, характеристическое уравнение непрерывной системы имеет вид:

$$1 + G(s)H(s) = 0, \quad (13-23)$$

а для импульсной системы оно выглядит как

$$1 - \overline{GH}^*(s) = 0. \quad (13-24)$$

Производя в (13-24) подстановку $e^{Ts} = z$, получим характеристическое уравнение импульсной системы в функции от переменной z :

$$1 - \overline{GH}(z) = 0. \quad (13-25)$$

Непрерывная система устойчива, если все корни уравнения (13-23) расположены в левой полуплоскости. Импульсная система устойчива, если все корни уравнения (13-24) также расположены в левой полуплоскости или если все корни уравнения (13-25) расположены внутри единичной окружности.

Теперь еще раз напомним критерий Найквиста для непрерывных систем. Контур Найквиста охватывает всю правую полуплоскость, как показано на рис. 13.16. Критерий Найквиста утверждает, что если на комплексной плоскости изобразить кривую для $G(s)H(s)$ при изменении s по контуру Найквиста, то

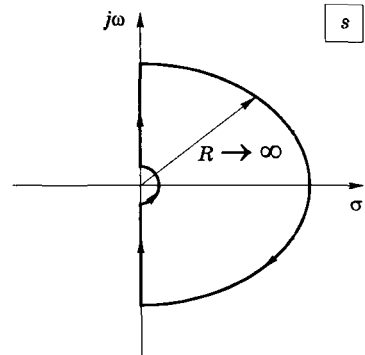
$$N = Z - P, \quad (13-26)$$

или

$$Z = N + P. \quad (13-27)$$

Рис. 13.16

Контур Найквиста на s -плоскости



Здесь Z есть число нулей характеристического уравнения (13-23), охватываемых контуром Найквиста, N — число охватов по часовой стрелке точки -1 кривой $G(s)H(s)$, а P — число полюсов характеристического уравнения, охватываемых контуром Найквиста. График функции $G(s)H(s)$ называется диаграммой Найквиста.

Заметим, что диаграмма Найквиста является отображением на комплексную плоскость контура Найквиста при помощи функции $G(s)H(s)$. В выражении (13-27) P есть число полюсов $G(s)H(s)$, расположенных в правой полуплоскости, и замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда $Z = 0$. Ниже приводится пример на применение критерия Найквиста.

Пример 13.6

Применим критерий Найквиста к системе, изображенной на рис. 13.17. Контур Найквиста и соответствующая диаграмма Найквиста приведены на рис. 13.18. Цифрой I обозначен обход по дуге бесконечно малого радиуса начала координат, поскольку там расположен полюс функции $G(s)$ (см. раздел 8.5). На этом участке $s = \rho e^{j\theta}$, где $\rho \ll 1$. Тогда

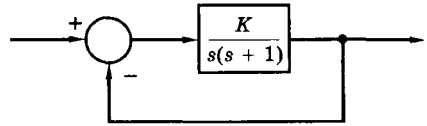


Рис. 13.17. Система к примеру 13.6

$$G(s)|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta}(1 + \rho e^{j\theta})} \approx \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho} e^{-j\theta}.$$

Таким образом, обход начала координат по дуге бесконечно малого радиуса соответствует дуге бесконечно большого радиуса на диаграмме Найквиста. Для участка контура Найквиста, совпадающего с мнимой осью и обозначенного цифрой II на рис. 13.18, имеем:

$$G(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)} = \frac{K}{\omega\sqrt{1 + \omega^2}} e^{j(-90^\circ - \arctg \omega)}.$$

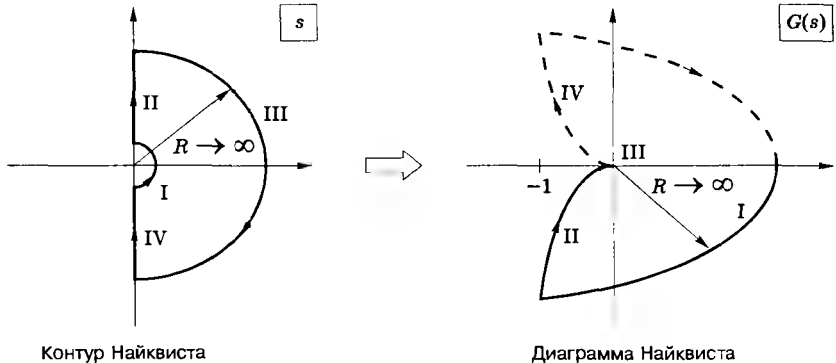
Эта часть диаграммы Найквиста представляет собой частотную функцию $G(s)$, построенную в полярных координатах.

Вдоль дуги бесконечного радиуса на контуре Найквиста, обозначенной на рис. 13.18 цифрой III, $G(s) \approx 0$. На участке IV контура Найквиста $s = -j\omega$, и диаграмма Найквиста симметрична относительно действительной оси ее участку II. Полная диаграмма Найквиста изображена на рис. 13.18, откуда следует, что она не охватывает точку -1 . Поэтому в выражении (13-27) $N = 0$. Функция $G(s)$ имеет полюсы в точках 0 и -1 ; следовательно, в выражении (13-27) $P = 0$. Таким образом,

$$Z = N + P = 0$$

и характеристическое уравнение замкнутой системы не имеет корней в правой полуплоскости, т.е. система является устойчивой.

Рис. 13.18
Диаграмма Найквиста к примеру 13.6



Теперь рассмотрим импульсную систему на рис. 13.15 (б). Характеристическое уравнение системы имеет вид (13-24), а диаграмма Найквиста может быть построена с использованием контура Найквиста на рис. 13.16 аналогично непрерывным системам. Однако напомним (см. главу 12), что $\overline{GH}^*(s)$ является периодической функцией с периодом $j\omega_s$. Поэтому для получения полной диаграммы Найквиста достаточно построить график функции $\overline{GH}^*(j\omega)$ только для $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$. Исходя из (12-8), рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \overline{GH}^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} GH(j\omega + jn\omega_s) = \frac{1}{T} [GH(j\omega) + GH(j\omega + j\omega_s) + \\ + GH(j\omega - j\omega_s) + GH(j\omega + j2\omega_s) + GH(j\omega - j2\omega_s) + \dots]. \end{aligned} \quad (13-28)$$

Поскольку реальная система обычно является фильтром низких частот, то в (13-28) можно ограничиться только несколькими первыми членами. Далее можно написать компьютерную программу для вычисления выражения (13-28) и таким образом получить диаграмму Найквиста, не прибегая к нахождению передаточной функции, зависящей от переменной z . Для систем высокого порядка это очень важно, поскольку вычисление передаточной функции в z -форме может оказаться достаточно сложным.

Диаграмма Найквиста может быть построена непосредственно на z -плоскости. Контур Найквиста в этом случае представляет собой единичную окружность, обход по которой совершается против часовой стрелки, как показано на рис. 13.19. Чтобы проиллюстрировать это, допустим, что Z_i и P_i есть число нулей и полюсов характеристического уравнения, расположенных внутри единичной окружности. Пусть также Z_0 и P_0 есть, соответственно, число нулей и полюсов характеристического уравнения, расположенных вне контура Найквиста. Поскольку контур Найквиста охватывает область внутри единичной окружности, то

$$N = -(Z_i - P_i), \quad (13-29)$$

где N есть число охватов по часовой стрелке диаграммой Найквиста $\overline{GH}(z)$ точки -1 . Знак минус в (13-29) появляется из-за того, что обход по контуру Найквиста совершается против часовой стрелки, а число охватов точки -1 подсчитывается в направлении по часовой стрелке. В общем случае порядок числителя и порядок знаменателя функции $1 + \overline{GH}(z)$ одинаковы. Допустим, что он равен n . Тогда

$$\begin{aligned} Z_0 + Z_i &= n, \\ P_0 + P_i &= n. \end{aligned} \quad (13-30)$$

Выражая отсюда Z_i и P_i и подставляя результат в (13-29), получим:

$$N = Z_0 - P_0. \quad (13-31)$$

Таким образом, критерий Найквиста формулируется в виде уравнения (13-31), если контур Найквиста имеет вид рис. 13.19. Чтобы система была устойчивой, Z_0 должно равняться нулю.

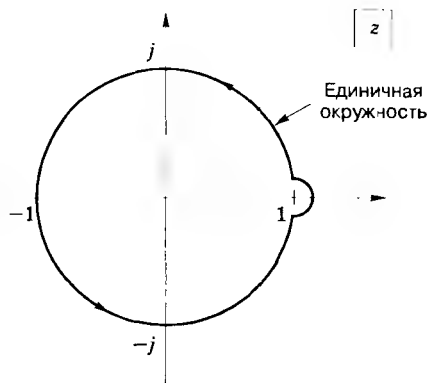


Рис. 13.19. Контур Найквиста на z -плоскости

Диаграмма Найквиста для системы, изображенной на рис. 13.15 (б), может быть построена по выражению $\overline{GH}(z)$ при изменении z вдоль единичной окружности. Тогда, опуская индексы в выражении (13-31),

$$Z = N + P, \quad (13-32)$$

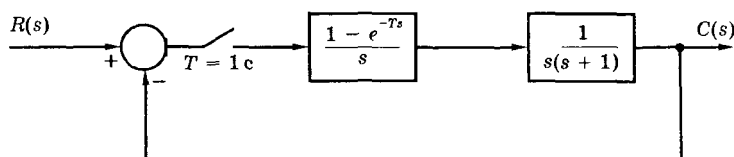
где Z и P есть, соответственно, число нулей и полюсов характеристического уравнения, расположенных вне единичной окружности, а N — число охватов по часовой стрелке диаграммой Найквиста точки -1 .

Пример 13.7

Проиллюстрируем критерий Найквиста на примере системы, изображенной на рис. 13.20. Из примера 13.2 имеем:

$$G(z) = \frac{0,368z + 0,264}{(z-1)(z-0,368)}.$$

Рис. 13.20
Система
к примеру 13.7



Контур Найквиста и диаграмма Найквиста приведены на рис. 13.21. Обход точки $z = 1$ контуром Найквиста необходим, поскольку $G(z)$ имеет полюс в этой точке. На этом участке

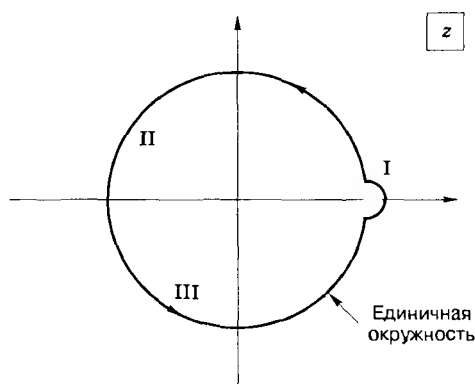
$$z = 1 + \rho e^{j\theta}, \quad \rho \ll 1 \text{ и } -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

В этом случае

$$G(z)|_{z=1+\rho e^{j\theta}} = \frac{0,368(1+\rho e^{j\theta}) + 0,264}{(1+\rho e^{j\theta}-1)(1+\rho e^{j\theta}-0,368)} \approx \frac{0,632}{\rho e^{j\theta}(0,632)} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}.$$

Таким образом, этому обходу соответствует дуга бесконечного радиуса, обозначенная на диаграмме Найквиста цифрой I. При изменении z вдоль единичной окружности

$$G(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{0,368e^{j\omega T} + 0,264}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-0,368)}.$$



Контур Найквиста

(а)

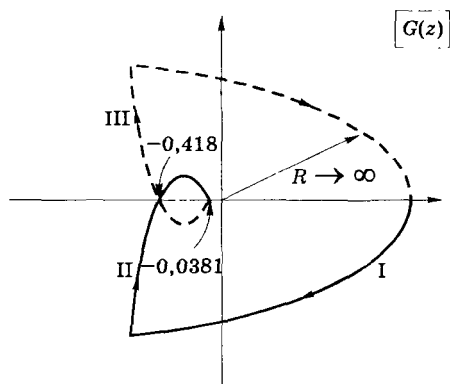


Диаграмма Найквиста

(б)

Рис. 13.21. Контур Найквиста и диаграмма Найквиста к примеру 13.7

В этой функции ω изменяется от $-\omega_s/2$ до $\omega_s/2$. Поскольку значения $G(e^{j\omega T})$ для $-\omega_s/2 < \omega < 0$ являются комплексно-сопряженными значениям $G(e^{j\omega T})$ для $0 < \omega < \omega_s/2$, то можно вычислить $G(e^{j\omega T})$ только для $0 < \omega < \omega_s/2$. В данном примере эти вычисления были выполнены на компьютере, в результате чего был построен участок II диаграммы Найквиста на рис. 13.21. Заметим, что $G(-1) = -0,0381$.

Диаграмма Найквиста на рис. 13.21 не охватывает точку -1 , следовательно, в выражении (13-32) $N = 0$. Кроме того, $G(z)$ не имеет полюсов вне единичной окружности, поэтому $P = 0$. Таким образом, $Z = 0$, и система является устойчивой. Однако, если в систему добавить коэффициент усиления $K = 1/0,418 = 2,39$, то диаграмма Найквиста пройдет через точку -1 и система окажется на границе устойчивости. Тот же самый вывод вытекает из критерия Джюри в примере 13.3 и из корневого годографа в примере 13.5. Ниже приводится программа MATLAB, вычисляющая модуль и аргумент $G(z)$, задавая частоту ω так, чтобы получить 20 точек $z = e^{j\omega T}$, расположенных на единичной окружности на одинаковых расстояниях друг от друга в интервале от 0 до π .

```
format short e
Gznum = [0 0.368 0.264]; Gzden = [1 -1.368 0.368];
[Gz, w] = freqz(Gznum, Gzden, 20);
Gzmag = abs(Gz); Gzphase = (180/pi)*angle(Gz);
[w, Gzmag, Gzphase]
```

Система из примера 13.7 может стать неустойчивой при увеличении коэффициента усиления. Однако та же система при отсутствии квантования, как было показано в примере 13.6, является устойчивой при всех положительных значениях коэффициента усиления. Следовательно, эффект квантования оказывает дестабилизирующее влияние на систему. Это можно объяснить, если посмотреть на частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка, который вносит дополнительный отрицательный сдвиг по фазе (см. рис. 12.11). Этот отрицательный сдвиг по фазе смещает диаграмму Найквиста в сторону точки -1 и тем самым ухудшает устойчивость системы.

В этом разделе было показано, что для импульсных систем критерий Найквиста можно применять как на s -плоскости, так и на z -плоскости. В любом случае диаграмма Найквиста имеет один и тот же вид. В следующем разделе будет рассмотрена еще одна, w -плоскость, и будет показано, что критерий Найквиста на этой плоскости дает те же результаты, что и на s -плоскости и на z -плоскости.

13.7. Билинейное преобразование

Многие методы анализа и синтеза непрерывных систем (такие, например, как критерий Рауса-Гурвица и диаграммы Боде) основаны на том, что границей устойчивости на s -плоскости является мнимая ось. Эти методы не могут быть применены к импульсным системам, т.к. для них границей устойчивости на z -плоскости является единичная окружность. Однако с помощью билинейного преобразования, определяемого как

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \quad (13-33)$$

или

$$w = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} \right], \quad (13-34)$$

единичная окружность на z -плоскости отображается в мнимую ось на w -плоскости.

Это отображение можно доказать следующим образом. Единичной окружности на z -плоскости соответствует $z = e^{j\omega T}$, следовательно

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}}.$$

Тогда по формуле Эйлера:

$$w = j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (13-35)$$

При $\omega = 0$ $w = j0$, а при $\omega \rightarrow \omega_s/2$ $\omega T/2 \rightarrow \pi/2$ и $w \rightarrow j\infty$. Следовательно, отрезок $0 \leq j\omega < j\omega_s/2$ на s -плоскости отображается в верхнюю половину единичной окружности на z -плоскости и в верхнюю половину мнимой оси на w -плоскости. Отображения основной полосы s -плоскости на z -плоскость и w -плоскость приведены на рис. 13.22, откуда видно, что область устойчивости на w -плоскости является ее левая половина.

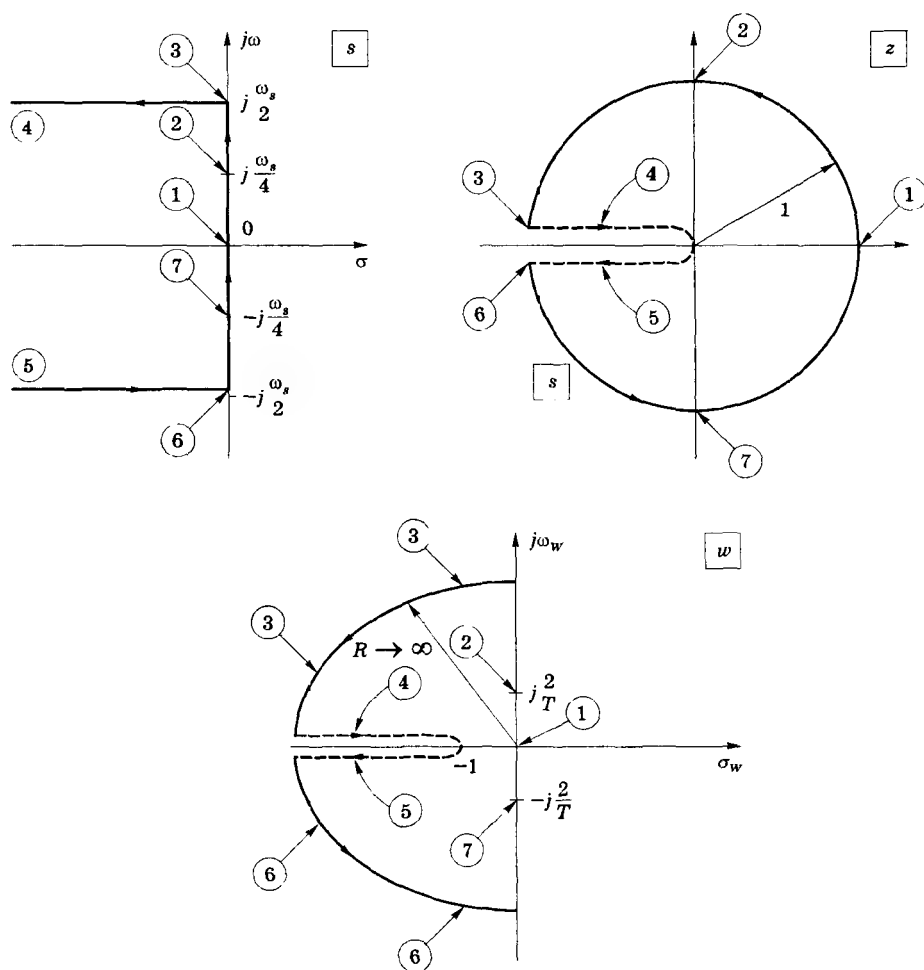


Рис. 13.22. Отображение с s -плоскости на z -плоскость и w -плоскость

Пусть $j\omega_w$ есть мнимая часть переменной w . Мы будем называть ω_w частотой на w -плоскости (псевдочастотой). Тогда (13-35) можно представить в виде:

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right). \quad (13-36)$$

Это выражение устанавливает связь между частотой на s -плоскости и частотой на w -плоскости.

Билинейное преобразование можно использовать для построения диаграммы Найквиста. Поскольку области устойчивости на s -плоскости и w -плоскости совпадают, контур Найквиста на w -плоскости имеет тот же вид, что и на s -плоскости (см. рис. 13.16). Следовательно, можно воспользоваться методами построения диаграммы Найквиста для непрерывных систем, рассмотренными в главе 8.

Пример 13.8

Рассмотрим еще раз систему управления звеном руки робота, с которой мы неоднократно имели дело в примерах данной главы. Согласно примеру 13.7, передаточная функция объекта имеет вид:

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}, \quad T = 1 \text{ с.}$$

Так как $T/2 = 0.5$, то $G(w)$ в соответствии с (13-33) имеет вид:

$$G(w) = \frac{0.368 \left[\frac{1 + 0.5w}{1 - 0.5w} \right] + 0.264}{\left[\frac{1 + 0.5w}{1 - 0.5w} \right]^2 - 1.368 \left[\frac{1 + 0.5w}{1 - 0.5w} \right] + 0.368} = \frac{-0.0381(w-2)(w+12.14)}{w(w+0.924)}.$$

По этой функции можно построить диаграмму Найквиста, считая что w изменяется от $j0$ до $j\infty$. Поскольку $G(w)$ имеет полюс в начале координат, то контур Найквиста должен обойти эту точку. Диаграмма Найквиста, построенная по функции $G(w)$, имеет тот же вид, что и диаграмма, построенная на основании $G(z)$, как показано на рис. 13.21 (б). Читатель может убедиться в этом самостоятельно.

Для построения диаграммы Найквиста можно воспользоваться тремя разными передаточными функциями — $G^*(s)$, $G(z)$ и $G(w)$. В каждом случае диаграмма Найквиста будет иметь один и тот же вид. В таблице 13.3 приведены функции и диапазон изменения переменных, необходимых для построения диаграммы Найквиста. Диапазон изменения переменных дан только для верхней части контура Найквиста. Если в диапазон изменения переменной попадает полюс передаточной функции, то контур Найквиста должен сделать обход соответствующей точки.

Таблица 13.3. Функции для построения диаграммы Найквиста

Функция	Диапазон изменения переменной
$G^*(s)$	$s = j\omega, \quad j0 \leq j\omega \leq j\omega_s/2$
$G(z)$	$z = e^{j\omega T}, \quad 0 \leq \omega T \leq \pi$
$G(w)$	$w = j\omega_w, \quad j0 \leq j\omega_w < j\infty$

По поводу диаграмм Найквиста для импульсных систем необходимо сделать одно важное замечание. Для непрерывных систем диаграмма Найквиста при $\omega \rightarrow \infty$ обычно заканчивается в начале координат. Для импульсных систем конечная точка диаграммы Найквиста соответствует частоте $\omega = \omega_s/2$, а на этой частоте коэффициент усиления разомкнутой системы обычно отличен от нуля. Этой точке соответствует значение переменной $z = -1$, поэтому в ней функция $G(z)$ имеет вещественное значение. Таким образом, диаграмма Найквиста для импульсных систем обычно заканчивается в некоторой точке действительной оси, но не в начале координат (см., например, рис. 13.21).

При малых частотах (на s -плоскости), где ωT имеет малое значение, (13-36) принимает вид:

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega, \quad (13-37)$$

т.е. в этом случае частота на w -плоскости приблизительно равна частоте на s -плоскости. Это справедливо для частот, при которых $\operatorname{tg}(\omega T/2) \approx \omega T/2$. Для

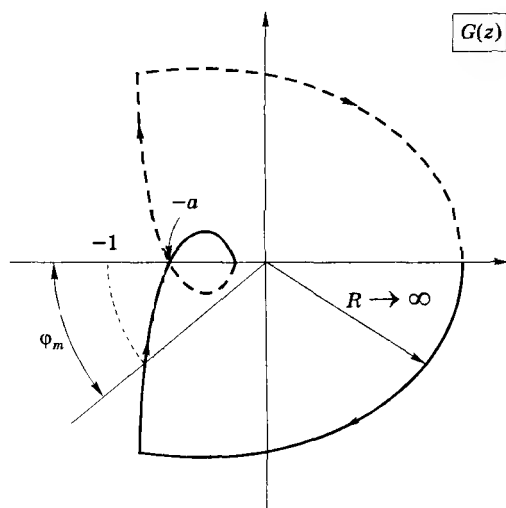
$$\frac{\omega T}{2} \leq \frac{\pi}{10}, \quad \text{или} \quad \omega \leq \frac{2\pi}{10T} = \frac{\omega_s}{10} \quad (13-38)$$

ошибка аппроксимации составляет менее 4%. Поскольку экстраполятор нулевого порядка вносит отрицательный фазовый сдвиг, период квантования T обычно выбирают так, чтобы (13-38) выполнялось в большей части, если не во всей полосе пропускания системы. При $\omega = \omega_s/10$ экстраполятор нулевого порядка вносит сдвиг по фазе, равный -18° (см. рис. 12.11), что достаточно ощутимо.

В непрерывных системах запас по модулю определяется как число, на которое надо умножить коэффициент усиления системы, чтобы достичь границы устойчивости. Запас по фазе определяется как угол, на который необходимо повернуть диаграмму Найквиста, чтобы она прошла через точку -1 (см. раздел 8.6). Точно так же определяются запасы по модулю и по фазе для импульсных систем. Если посмотреть на диаграмму Найквиста на рис. 13.23, то запас по модулю равен $1/a$, а запас по фазе — φ_m .

Рис. 13.23

Иллюстрация запасов устойчивости на примере диаграммы Найквиста



13.8. Критерий Рауса-Гурвица

Критерий Рауса-Гурвица позволяет определить, находятся ли какие-либо корни характеристического уравнения в правой полуплоскости (см. главу 6). Попытка применить этот критерий к характеристическому уравнению дискретной системы, являющемуся функцией переменной z , оказывается безуспешной. Однако, если характеристическое уравнение записано в функции от переменной w , то в этом случае можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Этот критерий был детально рассмотрен в главе 6, поэтому мы непосредственно переходим к примеру.

Пример 13.9

Рассмотрим еще раз систему управления положением звена руки робота из примера 13.7 с той разницей, что теперь к передаточной функции объекта мы добавим коэффициент усиления K . Характеристическое уравнение системы в этом случае имеет вид:

$$1 + KG(w) = 0,$$

где, согласно примеру 13.8,

$$1 + KG(w) = 1 + \frac{-0,0381K(w-2)(w+12,14)}{w(w+0,924)} = \frac{(1-0,0381K)w^2 + (0,924-0,386K)w + 0,924K}{w(w+0,924)}.$$

Поэтому характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$(1 - 0,0381K)w^2 + (0,924 - 0,386K)w + 0,924K = 0.$$

Образует таблицу Рауса:

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & 1-0,0381K & 0,924K \\ w^1 & 0,924-0,386K & \\ w^0 & & 0,924K \end{array}$$

Чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все элементы первого столбца имели один и тот же знак, т.е.

$$K < \frac{1}{0,0381} = 26,2; \quad K < \frac{0,924}{0,386} = 2,39; \quad K > 0.$$

Таким образом, система устойчива при условии $0 < K < 2,39$. Этот результат подтверждает решения, полученные с помощью критерия Джюри в примере 13.3, метода корневого годографа в примере 13.5 и критерия Найквиста в примере 13.7.

13.9. Диаграмма Бode

Изображение частотных характеристик непрерывных систем в виде диаграммы Бode удобно тем, что их можно аппроксимировать прямолинейными отрезками. Независимой переменной в этом случае является $j\omega$. Если передаточную функцию дискретной системы представить в зависимости от переменной w , то для нее тоже можно построить диаграмму Бode, воспользовавшись кусочно-линейной аппроксимацией. Способ построения диаграмм Бode был подробно рассмотрен в главе 8, и здесь мы его повторять не будем, а сразу приведем пример.

Пример 13.10

Еще раз рассмотрим систему управления звеном руки робота из примера 13.9. Для этой системы

$$G(w) = \frac{-0,0381(w-2)(w+12,14)}{w(w+0,924)}$$

и

$$G(j\omega_w) = \frac{-0,0381(j\omega_w-2)(j\omega_w+12,14)}{j\omega_w(j\omega_w+0,924)} = \frac{(1-j\omega_w/2)(1+j\omega_w/12,14)}{j\omega_w(1+j\omega_w/0,924)}$$

Мы видим, что числителю соответствуют частоты излома $\omega_w = 2,0$ и $\omega_w = 12,14$, а знаменателю — $\omega_w = 0$ и $\omega_w = 0,924$. Кусочно-линейная аппроксимация диаграммы Бode для этой системы приведена на рис. 13.24. На диаграмме указаны запасы устойчивости по модулю и по фазе. Заметим, что на диаграмме Найквиста на рис. 13.21 (б) изменение модуля и аргумента функции $G(z)$ полностью согласуется в построенной диаграммой Бode. Для построения можно использовать следующую программу MATLAB:

```
Gnum1 = [1 -2]; Gnum2 = [1 12.14];
Gnum = -0.0381*conv(Gnum1, Gnum2); Gden = [1 0.924 0];
bode(Gnum, Gden)
```

Как замечено в последнем примере, информацию о частотных характеристиках разомкнутой системы содержат как диаграмма Найквиста, так и диаграмма Бode. Эта информация одна и та же, только представлена в различных осях. Третьим способом представления этой информации является амплитудно-фазовая диаграмма, рассмотренная в разде-

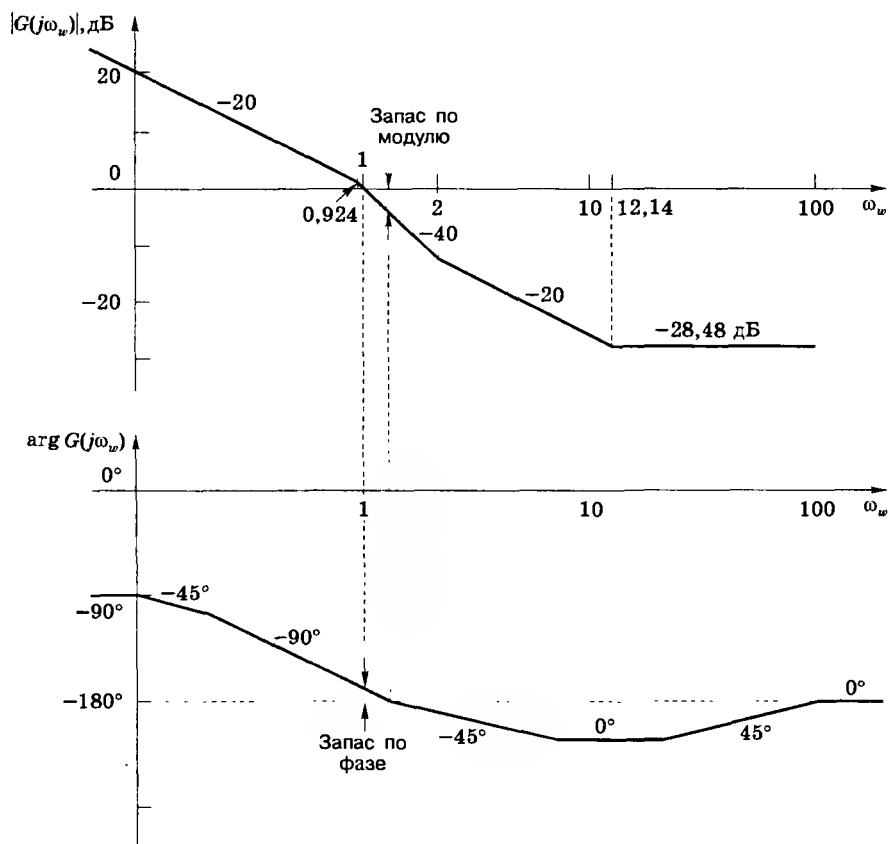
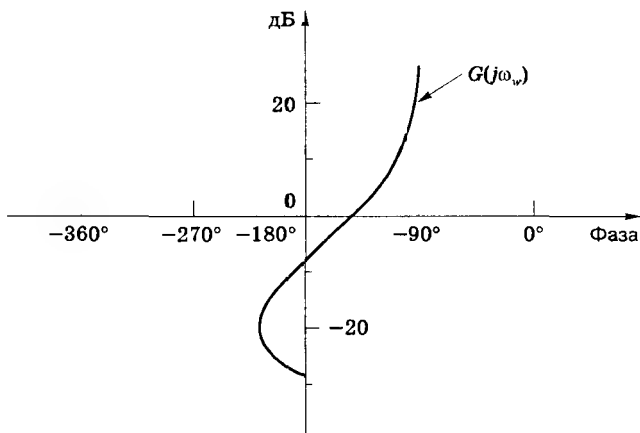


Рис. 13.24. Диаграмма Бode к примеру 13.10

ле 8.6. На этой диаграмме частотные характеристики изображаются в виде зависимости между модулем частотной функции в децибелах и фазовым сдвигом, построенной в прямоугольных координатах. При этом частота является параметром. В качестве иллюстрации на рис. 13.25 изображена амплитудно-фазовая диаграмма системы из примера 13.10. Многие инженеры, анализируя частотные характеристики системы, предпочитают представлять их в виде амплитудно-фазовой диаграммы, а не диаграммы Боде.

Рис. 13.25

Амплитудно-фазовая
диаграмма
к примеру 13.10



Во всех предыдущих разделах мы использовали понятие частотных характеристик применительно к дискретным системам. Нам хорошо известен физический смысл частотных характеристик непрерывных систем (см. раздел 4.4). Можно показать, что и частотные характеристики дискретных систем имеют тот же смысл [2]. Рассмотрим устойчивую дискретную систему, описываемую соотношением

$$C(z) = G(z)E(z).$$

Если $e(t) = \sin \omega t$, то можно показать, что в установившемся режиме [2]

$$c_{ss}(kT) = |G(e^{j\omega T})| \sin(\omega kT + \theta), \quad \theta = \arg G(e^{j\omega T}). \quad (13-39)$$

Таким образом, частотные характеристики дискретной системы при синусоидальном входном воздействии описывают ее установившуюся реакцию в моменты квантования; эта реакция также является синусоидальной. Заметим, что в промежутках между моментами квантования реакция неизвестна; в действительности она не является синусоидальной, а форму ее очень трудно определить, если только не прибегать к моделированию. Если частоту квантования выбрать достаточно большой в сравнении с полосой пропускания системы, то при синусоидальном входном сигнале реакция системы между моментами квантования приблизительно будет синусоидальной.

В примере 13.10 частотные характеристики, необходимые для построения диаграммы Боде, были вычислены после определения передаточной функции $G(w)$. Этот метод приемлем только в случае систем невысокого порядка, т.к. вычисление $G(w)$ — достаточно сложная операция. Вместо этого целесообразно с помощью компьютера и одной из процедур, описанных в разделе 13.6, рассчитать частотные характеристики в зависимости от действительной частоты ω . Затем каждому значению действительной частоты ω можно поставить в соответствие частоту ω_w по выражению (13-36):

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right).$$

После этого нетрудно построить диаграмму Боде, изобразив частотные характеристики в зависимости от ω_w . При этом отпадает необходимость определения $G(w)$, чтобы рассчитать $G(j\omega_w)$.

13.10. Точность в установившемся режиме

Точность непрерывных систем в установившемся режиме была рассмотрена в разделе 5.5. Полученные результаты основаны на теореме о конечном значении из преобразования Лапласа. В этом разделе мы получим аналогичные результаты для импульсных систем на основании теоремы о конечном значении из z -преобразования. Эта теорема (см. раздел 11.3) гласит, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z), \quad (13-40)$$

при условии, что предел в левой части существует. Последнее возможно только тогда, когда все полюсы $E(z)$ расположены внутри единичной окружности, за исключением единственного полюса $z = 1$.

Теперь мы займемся исследованием точности в установившемся режиме для импульсных систем. Ограничимся случаем, когда система является устойчивой и имеет единичную обратную связь. Методы анализа, рассмотренные в главе 5 для случая неединичной обратной связи, полностью применимы к импульсным системам. Ошибку системы, изображенной на рис. 13.26, мы определим как разность между ее входом и выходом в моменты квантования. Следовательно, z -преобразование сигнала ошибки равно

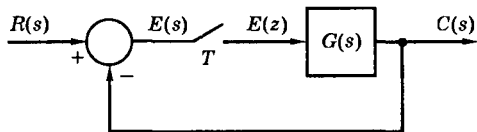


Рис. 13.26. Импульсная система

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}. \quad (13-41)$$

По теореме о конечном значении установившаяся ошибка определяется выражением

$$e_{ss}(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}. \quad (13-42)$$

Рассмотрим сначала установившуюся ошибку, вызванную единичным ступенчатым воздействием. В этом случае $R(z) = Az/(z-1)$, где A — величина ступенчатого воздействия. Тогда

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Az}{1+G(z)} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} G(z)} = \frac{A}{1+K_p}, \quad (13-43)$$

где K_p называется коэффициентом ошибки по положению и определяется из выражения

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z). \quad (13-44)$$

Заметим, что если $G(z)$ имеет по крайней мере один полюс при $z = 1$, то $K_p = \infty$ и установившаяся ошибка при ступенчатом входном сигнале равна нулю. Мы назвали число полюсов передаточной функции разомкнутой системы при $z = 1$ *типом системы*. Поэтому если система имеет тип 1 или выше, то при ступенчатом входном воздействии установившаяся

ошибка равна нулю. В противном случае ошибка отлична от нуля и определяется выражением (13-43).

Если входной сигнал имеет вид линейной функции $r(t) = At$, то $R(z) = ATz/(z-1)^2$. Согласно (13-42), установившаяся ошибка равна

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ATz}{(z-1)^2 + (z-1)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT}{(z-1)G(z)}. \quad (13-45)$$

Определим коэффициент ошибки по скорости как

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1)G(z), \quad (13-46)$$

тогда установившаяся ошибка при линейном входном воздействии будет равна

$$e_{ss}(kT) = \frac{A}{K_v}. \quad (13-47)$$

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет два или более полюсов в точке $z = 1$, то коэффициент K_v равен бесконечности и установившаяся ошибка при линейном входном воздействии будет равна нулю. Иначе говоря, система типа 2 или выше будет отбрасывать воздействие $r(t) = At$ без установившейся ошибки.

Полученные выражения для установившейся ошибки применимы и в случае, когда в системе на рис. 13.26 после квантователя находится цифровой регулятор с передаточной функцией $D(z)$. Тогда в (13-44) и (13-46) надо $G(z)$ заменить на $D(z)G(z)$, после чего непосредственно применить выражения (13-43) и (13-47).

В заключение отметим, что установившаяся ошибка в этом разделе обозначена как $e_{ss}(kT)$, чтобы подчеркнуть, что такое значение она имеет только в моменты квантования. Между моментами квантования установившаяся ошибка неизвестна и не может быть вычислена с помощью z -преобразования, поскольку последнее связывает вход и выход системы только в моменты квантования.

Пример 13.11

Рассмотрим систему первого порядка, изображенную на рис. 13.1, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = \frac{0,393}{z - 0,607}, \quad T = 0,5 \text{ с.}$$

Эта система относится к типу 0, т.к. объект не имеет полюсов в точке $z = 1$; поэтому коэффициент ошибки по положению, согласно (13-44), равен

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{0,393}{1 - 0,607} = 1,0.$$

Установившаяся ошибка при единичном ступенчатом воздействии на входе определяется из (13-43):

$$e_{ss}(kT) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{2}.$$

Это значение установившейся ошибки очевидно из переходной функции системы, изображенной на рис. 13.2.

Поскольку установившаяся ошибка имеет неприемлемо большое значение, мы уменьшим ее путем введения в систему цифрового ПИ-регулятора. Далее в этой главе будет показано, что такой регулятор имеет передаточную функцию

$$D(z) = K_p + \frac{K_I T z}{z-1},$$

где коэффициенты K_p и K_I подлежат определению в процессе синтеза. В результате система примет вид рис. 13.27. В разомкнутом состоянии ее передаточная функция равна

$$D(z)G(z) = \frac{0,393[(K_p + K_I T)z - K_p]}{(z-1)(z-0,607)}.$$

Система относится к типу 1, и если она устойчива, то установившаяся ошибка при ступенчатом входном сигнале будет равна нулю. Коэффициенты K_p и K_I должны быть выбраны так, чтобы (1) система была устойчивой, (2) имела бы приемлемый вид переходного процесса и (3) удовлетворяла бы некоторым другим требованиям, которые могут быть выдвинуты по условиям задачи синтеза. Методы синтеза рассматриваются в оставшейся части этой главы.

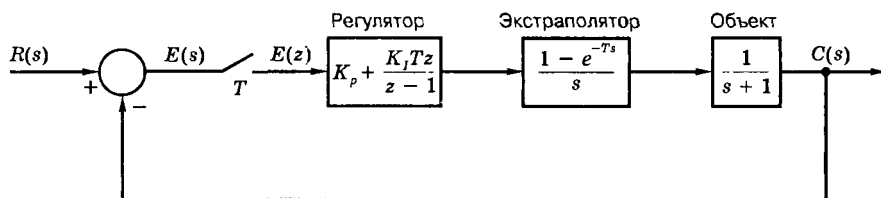


Рис. 13.27. Система к примеру 13.11

13.11. Синтез цифровых систем управления

До сих пор мы имели дело в первую очередь с анализом дискретных систем управления. Предполагалось, что система задана, и в результате анализа необходимо определить запасы устойчивости, временные и частотные характеристики и т.п.

Были рассмотрены несколько простых задач синтеза — например, определение коэффициента усиления исходя из ограничений на величину установившейся ошибки.

В этом и четырех последующих разделах мы рассмотрим общую проблему синтеза: как определить передаточную функцию (или разностное уравнение) цифрового регулятора, которая удовлетворяла бы требованиям, предъявляемым к системе управления. Желательные характеристики, или критерии качества — это обычно точность в установившемся режиме, вид переходного процесса, относительная устойчивость, чувствительность к изменению параметров системы и способность компенсировать возмущения. Эти требования к качеству системы были подробно рассмотрены в разделе 9.1 применительно к непрерывным системам; читатель, не знакомый с перечисленными показателями, должен предварительно изучить материал раздела 9.1.

Выводы относительно синтеза непрерывных систем, полученные в разделе 9.1, непосредственно применимы и к цифровым системам управления. В цифровых системах для улучшения точности в установившемся режиме мы обычно добавляем полюсы в точке $z = 1$ и увеличиваем тем самым тип системы, либо изменяем в большую сторону коэффициент усиления системы. При этом, конечно, необходимо сохранить приемлемые запасы устойчивости. Для повышения быстродействия системы необходимо увеличить ее полосу пропускания, т.к. произведение времени нарастания переходной функции на полосу пропускания приблизительно постоянно. С той же целью полюсы замкнутой системы желательно располагать как можно ближе к началу координат z -плоскости. Чтобы уменьшить

перерегулирование в переходной функции, необходимо увеличивать запасы устойчивости, что эквивалентно увеличению коэффициента затухания ζ , соответствующего доминирующим комплексным полюсам. Увеличение запасов устойчивости также приводит к уменьшению величины пика на амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы.

Соответствующие запасы устойчивости по модулю и по фазе должны обеспечить приемлемый вид переходной функции и гарантировать устойчивость системы в случае малых изменений параметров объекта и возможных нелинейных операций. Повышение петлевого коэффициента усиления снижает чувствительность характеристик системы к изменению параметров объекта, а также ослабляет реакцию системы на возмущения, если только увеличение этого коэффициента не производится в прямой цепи между точкой приложения возмущения и выходом системы.

Вообще всегда желательно иметь систему с высоким петлевым коэффициентом усиления, по крайней мере, на низких частотах. Если же этот высокий коэффициент усиления удастся сохранить и на высоких частотах, то повышается быстродействие системы и уменьшается влияние высокочастотных составляющих спектра возмущающего воздействия. Кроме того, это уменьшает влияние изменения параметров системы. Однако попытки увеличить петлевой коэффициент усиления могут привести к уменьшению запасов устойчивости и, следовательно, к ухудшению качества системы из-за возникновения нелинейных эффектов. Во многих системах управления присутствует высокочастотный шум, что создает определенные проблемы. Чтобы снизить влияние этого шума, необходимо уменьшать петлевой коэффициент усиления, а это создает конфликтную ситуацию в смысле требований к системе. В подобных случаях должен быть найден некий компромисс (на практике это почти всегда необходимо).

Предположим, что синтезируемая система имеет конфигурацию, изображенную на рис. 13.28 (а). Цифровой регулятор обычно реализуется с помощью АЦП, компьютера и ЦАП (см. рис. 12.19). Передаточная функция замкнутой системы на рис. 13.28 (а) равна

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)GH(z)} \quad (13-48)$$

(см. раздел 12.8) и, следовательно, характеристическое уравнение имеет вид:

$$1 + D(z)GH(z) = 0. \quad (13-49)$$

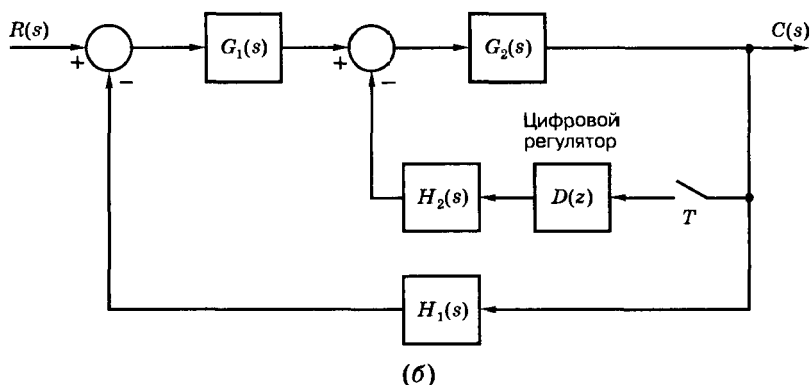
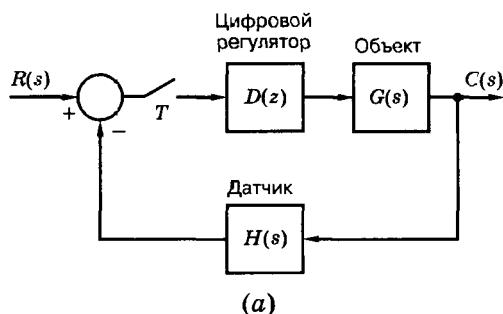
Коррекция, представленная на рис. 13.28 (а), называется последовательной. Влияние ее на свойства системы определяется характеристическим уравнением (13-49).

Иногда бывает выгоднее поместить регулятор во внутренний контур системы, как показано на рис. 13.28 (б). Для этой системы

$$C(z) = \frac{\mathfrak{z} \left[\frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1 G_2 H_1} \right]}{1 + D(z) \mathfrak{z} \left[\frac{G_2 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1} \right]}. \quad (13-50)$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + D(z) \mathfrak{z} \left[\frac{G_2 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1} \right] = 0 \quad (13-51)$$

Рис. 13.28Цифровые
системы
управления

Этот тип коррекции называется коррекцией в цепи местной связи, или параллельной. Влияние этой коррекции на свойства системы определяется характеристическим уравнением (13-51).

В следующих двух разделах мы рассмотрим, в основном, корректирующие устройства первого порядка, т.е. такие, передаточная функция которых имеет вид:

$$D(z) = \frac{K_d(z - z_0)}{z - z_p}. \quad (13-52)$$

Применяя метод корневого годографа, мы определяем нуль, полюс и коэффициент K_d этой передаточной функции. Однако, если использовать частотный метод синтеза, то соответствующие процедуры выполняются не на z -плоскости, а на w -плоскости. Следовательно, передаточная функция регулятора должна быть представлена в зависимости от переменной w . Переход от $D(z)$ к $D(w)$ совершается путем замены переменной:

$$D(w) = D(z)|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}. \quad (13-53)$$

Таким образом, $D(w)$ также имеет первый порядок и может быть записана в виде:

$$D(w) = \frac{1 + w/\omega_{w0}}{1 + w/\omega_{wp}}, \quad (13-54)$$

где $-\omega_{w0}$ и $-\omega_{wp}$ есть, соответственно, положение нуля и полюса функции $D(w)$ на w -плоскости.

Коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте определяется из (13-52) при $z = 1$ или из (13-54) при $w = 0$. Таким образом, в (13-54) предполагается, что регулятор имеет единичный коэффициент усиления. Чтобы получить регулятор с неединичным ко-

эффицентом усиления, надо правую часть (13-54) умножить на число, соответствующее желаемому коэффициенту усиления.

Для реализации регулятора передаточную функцию необходимо выразить в зависимости от переменной z , как в (13-52). Из (13-54) имеем:

$$D(z) = \frac{1 + \frac{w}{\omega_{w0}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}} \bigg|_{w = \frac{2}{T}[(z-1)/(z+1)]} = \frac{\omega_{wp}(2/T + \omega_{w0})}{\omega_{w0}(2/T + \omega_{wp})} \left[\frac{z - \frac{2/T - \omega_{w0}}{2/T + \omega_{w0}}}{z - \frac{2/T - \omega_{wp}}{2/T + \omega_{wp}}} \right]. \quad (13-55)$$

Следовательно, параметры регулятора (13-52) на z -плоскости как функции от параметров на w -плоскости имеют следующие выражения:

$$K_d = \frac{\omega_{wp}(2/T + \omega_{w0})}{\omega_{w0}(2/T + \omega_{wp})}; \quad z_0 = \frac{2/T - \omega_{w0}}{2/T + \omega_{w0}}; \quad z_p = \frac{2/T - \omega_{wp}}{2/T + \omega_{wp}}. \quad (13-56)$$

Как и в случае аналоговых регуляторов, цифровой регулятор (13-54) относится к тому или иному типу, в зависимости от относительного расположения нуля, ω_{w0} , и полюса, ω_{wp} . Если $\omega_{w0} < \omega_{wp}$, регулятор обладает *опережением по фазе*. Если $\omega_{w0} > \omega_{wp}$, то регулятор обладает *отставанием по фазе*. Сначала мы рассмотрим регулятор с отставанием по фазе. Заметим, что если в выражении для $D(z)$ нуль z_0 расположен ближе к точке $z = 1$, чем полюс z_p , то регулятор обладает опережением по фазе; в противном случае он создает отрицательный фазовый сдвиг.

Частотный метод синтеза, представленный в данной главе, аналогичен соответствующему методу для непрерывных систем, рассмотренному в главе 9. Как было показано в разделе 13.7, область устойчивости для дискретных систем на w -плоскости та же самая, что для непрерывных систем на s -плоскости. Однако одинаковое расположение полюсов на w -плоскости и на s -плоскости не дает одинакового вида переходных характеристик. Положение полюса на s -плоскости отображается в положение полюса на w -плоскости преобразованием (13-34), которое мы здесь приведем повторно:

$$w = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} \right]_{z=e^{sT}} = \frac{2}{T} \left[\frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} \right]. \quad (13-57)$$

Однако все процедуры, связанные с частотным методом синтеза, являются одними и теми же как для непрерывных, так и для цифровых систем управления. Поэтому читателю рекомендуется повторить материал главы 9. Здесь мы подчеркнем лишь основные положения, сопроводив их примерами на синтез цифровых систем управления.

Прежде чем переходить непосредственно к синтезу цифровых регуляторов, приведем некоторые их преимущества перед аналоговыми регуляторами [3].

1. Цифровой регулятор обладает большей гибкостью, поскольку для изменения какого-либо его параметра достаточно просто изменить число, записанное в ячейке памяти. Изменение параметра аналогового регулятора обычно требует замены по крайней мере одного элемента схемы.
2. Цифровые сигналы менее чувствительны к шумам и дрейфу параметров оборудования, т.к. данные представляются, генерируются, передаются и обрабатываются в виде двоичных слов.

3. Цифровая обработка сигналов может производиться с высокой скоростью и точностью. Повышение скорости цифровой обработки сигналов может быть достигнуто за счет аппаратных, а не программных средств.
4. Сложные алгоритмы обработки сигналов лучше всего реализовывать с помощью цифровых устройств, т.к. при этом точность параметров ограничена лишь длиной слова цифрового процессора. Параметры же аналоговых процессоров в общем случае зависят от значений резисторов, конденсаторов и т.п.

13.12. Синтез регулятора с отставанием по фазе

Передаточная функция регулятора с отставанием по фазе имеет вид:

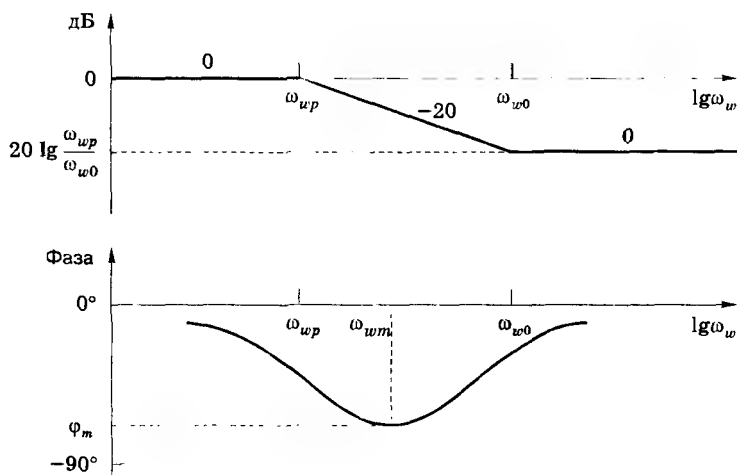
$$D(w) = \frac{1 + w/\omega_{w0}}{1 + w/\omega_{wp}}, \quad (13-58)$$

причем $\omega_{w0} > \omega_{wp}$. Диаграмма Боде для этой функции приведена на рис. 13.29, откуда видно, что она идентична соответствующей диаграмме для аналогового регулятора с отставанием по фазе (см. рис. 9.12), построенной в зависимости от действительной частоты ω . Заметим, что фазовый сдвиг, создаваемый этим регулятором, отрицателен, что отражено в названии регулятора. Коэффициент усиления на нулевой частоте равен единице, а в области высоких частот мы имеем:

$$(\text{усиление на высоких частотах}) \text{ дБ} = 20 \lg \frac{\omega_{wp}}{\omega_{w0}}, \quad (13-59)$$

т.е. модуль частотной функции регулятора на высоких частотах равен отношению ω_{wp}/ω_{w0} , что меньше единицы. Поэтому данный регулятор применяется с целью уменьшения усиления на высоких частотах по сравнению с низкими и увеличения запасов устойчивости без ухудшения свойств системы в области низких частот. Надо сказать, однако, что уменьшение усиления системы на высоких частотах уменьшает также ее полосу пропускания, а следовательно, снижает быстродействие.

Рис. 13.29
Частотные характеристики цифрового фильтра с отставанием по фазе



Синтез регулятора с отставанием по фазе мы рассмотрим применительно к системе, конфигурация которой приведена на рис. 13-30. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$1 + D(z)G(z) = 0, \quad (13-60)$$

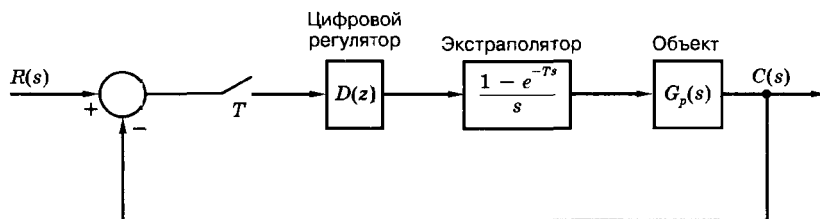
где

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G_p(s) \right]. \quad (13-61)$$

Если система имеет конфигурацию, отличную от рис. 13.30, то за основу берется характеристическое уравнение вида (13-60). Затем определяется передаточная функция, которая является сомножителем для $D(z)$. После этого процедура синтеза выполняется по приводимым ниже правилам.

Рис. 13.30

Цифровая
система
управления



Как было замечено ранее, а также видно из рис. 13.29, регулятор с отставанием по фазе добавляет к частотным характеристикам разомкнутой системы отрицательный фазовый сдвиг и ослабляет усиление на высоких частотах. За счет отрицательного фазового сдвига диаграмма Найквиста поворачивается в сторону точки -1 , что является дестабилизирующим фактором. Поэтому к выбору частот излома ω_{w0} и ω_{wp} нужно подходить очень осторожно, чтобы дополнительный отрицательный фазовый сдвиг не появился в окрестности точки, где частотная характеристика объекта $G(j\omega_w)$ пересекает левую половину действительной оси. Эта характеристика для системы на рис. 13.30 определяется выражениями

$$G(w) = G(z) \Big|_{z=(1+Tw/2)/(1-Tw/2)} \quad (13-62)$$

и

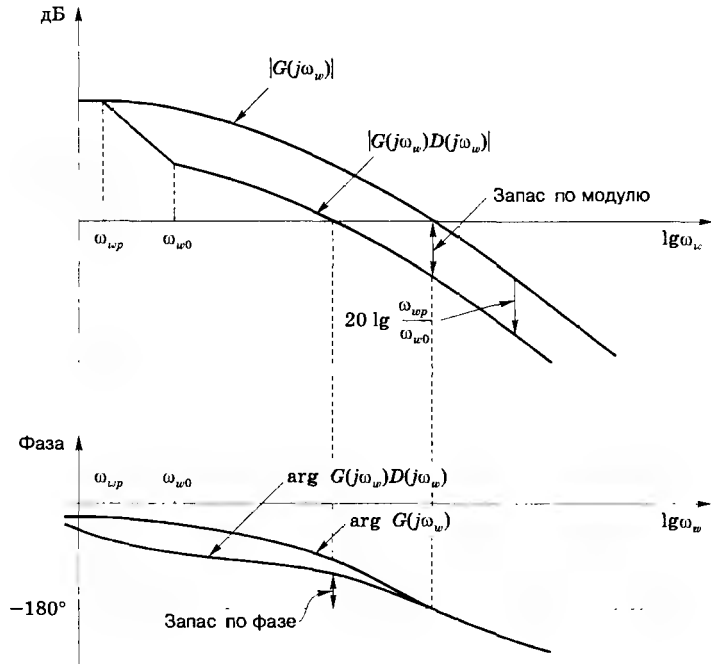
$$G(j\omega_w) = G(w) \Big|_{w=j\omega_w}. \quad (13-63)$$

Вместе с тем, чтобы увеличить запасы устойчивости, регулятор должен уменьшать усиление системы в окрестности точки, где фазовая характеристика объекта близка к -180° . Следовательно, ω_{w0} и ω_{wp} должны быть много меньше частоты, при которой фазовый сдвиг, создаваемый объектом, равен -180° .

Синтез регулятора с отставанием по фазе проиллюстрирован на рис. 13.31. Мы видим, что запасы устойчивости по модулю и по фазе увеличились, и вместе с тем введение регулятора не изменило коэффициент усиления системы на низких частотах и, следовательно, не отразилось на свойствах системы в установившемся режиме. Полоса пропускания замкнутой системы уменьшилась, за счет чего снизилось быстродействие системы.

Теперь мы рассмотрим метод определения ω_{w0} и ω_{wp} , обеспечивающий получение требуемого запаса по фазе. Этот метод аналогичен рассмотренному в разделе 9.4 применительно к аналоговым регуляторам. Процедура синтеза включает следующие этапы:

Рис. 13.31
К синтезу
регулятора
с отставанием
по фазе



1. Исходя из требований к характеристикам системы в области низких частот, ввести в $G(z)$ дополнительный множитель K_c .
2. Определить частоту ω_{w1} , при которой $\arg G(j\omega_w) = -180^\circ + \varphi_m + 5^\circ$, где φ_m — требуемый запас по фазе.
3. Вычислить ω_{w0} по формуле

$$\omega_{w0} = 0,1\omega_{w1}. \quad (13-64)$$

4. Вычислить ω_{wp} по формуле

$$\frac{\omega_{wp}}{\omega_{w0}} = \frac{1}{|G(j\omega_{w1})|}. \quad (13-65)$$

5. Записать передаточную функцию регулятора:

$$D(w) = \frac{K_c (1 + w/\omega_{w0})}{1 + w/\omega_{wp}}, \quad (13-66)$$

где K_c — множитель, полученный на этапе 1.

На этапе 2 слагаемое 5° добавлено в связи с тем, что регулятор на частоте ω_{w1} вносит отрицательный фазовый сдвиг такой величины. Полученная передаточная функция $D(w)$ пересчитывается в $D(z)$ с помощью (13-56), где коэффициент K_d должен быть дополнительно умножен на K_c .

Пример 13.12

Рассмотрим систему радиолокационного сопровождения, для которой в примерах главы 9 проводился синтез аналоговых регуляторов. Передаточная функция объекта имеет вид:

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Конфигурация системы соответствует рис. 13.30. Заметим, что меньшая из постоянных времени объекта равна 0,5 с; период квантования обычно выбирают меньше этого значения, чтобы минимизировать ошибки, связанные с квантованием. Однако в этом примере мы выберем $T = 0,5$ с для того, чтобы из сравнения полученных результатов с характеристиками непрерывных систем из главы 9 стали очевидными ошибки, обусловленные квантованием. Найдем импульсную передаточную функцию объекта:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} \right] = \frac{z-1}{z} \left[\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right] =$$

$$= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{3z}{z-1} + \frac{4z}{z-0,6065} - \frac{z}{z-0,3679} \right] = \frac{0,05824z^2 + 0,1629z + 0,02753}{z^3 - 1,9744z^2 + 1,1975z - 0,2231}.$$

Хотя выражение $G(z)$ было разложено на простые дроби, конечный результат получен с помощью MATLAB. В общем случае при определении $G(z)$ очень остро стоит проблема точности вычислений, т.к. коэффициенты числителя образуются как разность чисел, намного превосходящих их по величине. Частотные характеристики объекта также были вычислены на компьютере, и они приведены в таблице 13.4.

Таблица 13.4. Частотные характеристики к примеру 13.11

$\omega_{\text{к}}$	ω	Модуль	дБ	Фаза
0,0100	0,0100	199,98770	46,02007	-91,00266
0,0200	0,0200	99,97540	39,99786	-92,00517
0,0300	0,0300	66,62981	36,47337	-93,00739
0,0400	0,0400	49,95088	33,97086	-94,00919
0,0500	0,0500	39,93864	32,02786	-95,01043
0,0600	0,0600	33,25977	30,43838	-96,01097
0,0700	0,0700	28,48569	29,09253	-97,01067
0,0800	0,0800	24,90213	27,92473	-98,00938
0,0900	0,0900	22,11226	26,89266	-99,00697
0,1000	0,1000	19,87800	25,96745	-100,00330
0,2000	0,1998	9,76153	19,79036	-109,86910
0,3000	0,2994	6,32192	16,01698	-119,47430
0,4000	0,3987	4,56235	13,18378	-128,72070
0,5000	0,4974	3,48441	10,84260	-137,54000
0,6000	0,5956	2,75491	8,80214	-145,89240
0,7000	0,6930	2,23008	6,96639	-153,76290
0,8000	0,7896	1,83697	5,28203	-161,15450
0,9000	0,8853	1,53411	3,71714	-168,03290
1,0000	0,9799	1,29589	2,25133	-174,57150
2,0000	1,8546	0,36206	-8,82430	-221,18550
3,0000	2,5740	0,16135	-15,84445	-248,18390
4,0000	3,1416	0,09408	-20,52963	-265,76170
5,0000	3,5842	0,06474	-23,77598	-278,22040
6,0000	3,9312	0,04955	-26,09867	-287,60740
7,0000	4,2066	0,04071	-27,80672	-295,00050
8,0000	4,4286	0,03510	-29,09268	-301,01390
9,0000	4,6103	0,03133	-30,08075	-306,02200
10,0000	4,7612	0,02866	-30,85354	-310,26750

Как и в примерах главы 9, зададимся желаемым запасом по фазе 50° . Предполагается, что петлевой коэффициент усиления является достаточным; следовательно, отпадает необходимость изменения данных в табл. 13.4 в соответствии с этапом 1 процедуры синтеза. На этапе 2 находим значение фазового сдвига:

$$-180^\circ + \varphi_m + 5^\circ = -180^\circ + 50^\circ + 5^\circ = -125^\circ.$$

С помощью компьютера было вычислено $G(j0,36) \approx 5,1 e^{-j125^\circ}$. Таким образом, $\omega_{w1} = 0,36$ и на основании (13-64) $\omega_{w0} = 0,1$, $\omega_{w1} = 0,036$. Согласно (13-65),

$$\omega_{wp} = \frac{\omega_{w0}}{|G(j\omega_{w1})|} = \frac{0,036}{5,1} = 0,00706.$$

Тогда передаточная функция регулятора принимает вид:

$$D(w) = \frac{1 + w/0,036}{1 + w/0,00706}.$$

По формулам (13-56) вычисляем параметры передаточной функции $D(z)$:

$$K_d = \frac{\omega_{wp}(2/T + \omega_{w0})}{\omega_{w0}(2/T + \omega_{wp})} = \frac{0,00706(2/0,5 + 0,036)}{0,036(2/0,5 + 0,00706)} = 0,1975,$$

$$z_0 = \frac{2/T - \omega_{w0}}{2/T + \omega_{w0}} = \frac{2/0,5 - 0,036}{2/0,5 + 0,036} = 0,9822,$$

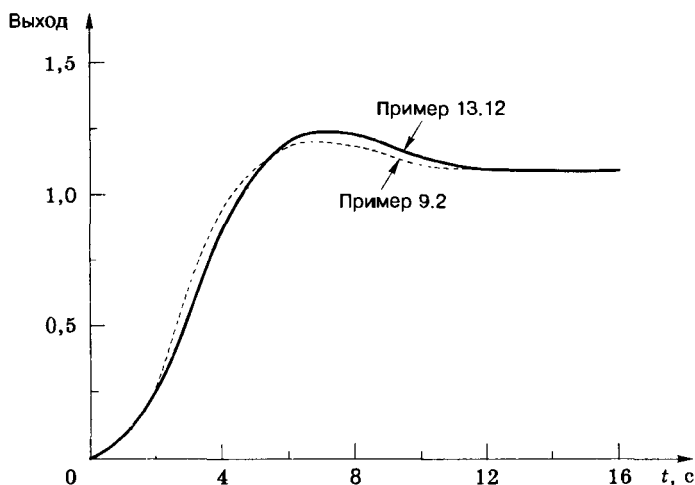
$$z_p = \frac{2/T - \omega_{wp}}{2/T + \omega_{wp}} = \frac{2/0,5 - 0,00706}{2/0,5 + 0,00706} = 0,99648.$$

Тогда передаточная функция регулятора в зависимости от переменной z принимает вид:

$$D(z) = \frac{0,1975(z - 0,9822)}{z - 0,99648} = \frac{0,1975z - 0,1940}{z - 0,99648}.$$

Путем имитационного моделирования системы была получена ее переходная функция. Она изображена на рис 13.32 вместе с переходной функцией непрерывной системы из примера 9.2, причем обе системы были синтезированы исходя из заданного запаса по фазе в 50° . Как видим, процесс квантования оказывает некоторый дестабилизирующий эффект. Если выбрать период квантования больше, чем 0,5 с, то этот эффект проявится еще сильнее, тогда как при $T < 0,5$ с он будет существенно меньше.

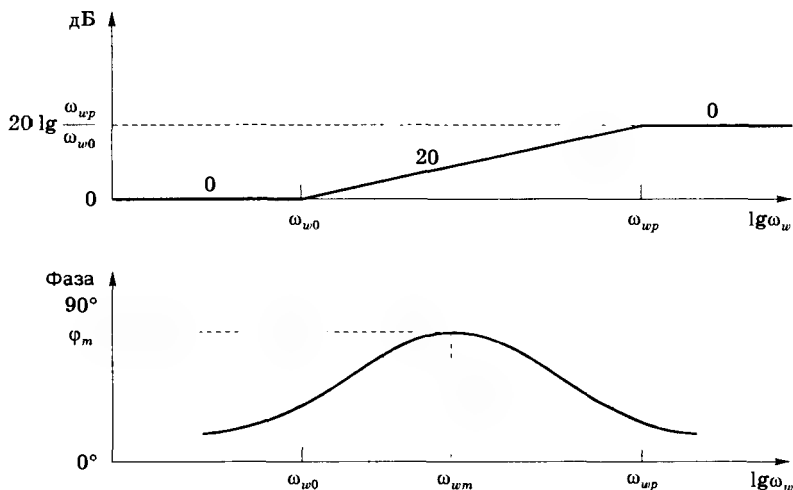
Рис. 13.32
Переходная функция
к примеру 13.12



13.13. Синтез регулятора с опережением по фазе

Теперь мы приступим к синтезу регулятора с опережением по фазе. Для регулятора данного типа в выражении (13-54) $\omega_{w0} < \omega_{wp}$, а соответствующие частотные характеристики изображены на рис. 13.33. Свойства такого регулятора подробно были рассмотрены в разделе 9.5 применительно к непрерывным системам, и все результаты непосредственно могут быть распространены на случай дискретных систем. Однако на рис. 13.33 ось частот соответствует переменной ω_w , которая только при малых значениях соответствует действительной частоте ω . На высоких частотах имеет место существенное различие в значениях ω_w и ω : $\omega_w \rightarrow \infty$ эквивалентно $\omega \rightarrow \omega_s/2$. Поэтому, когда речь заходит о высоких частотах на w -плоскости, эквивалентные частоты на s -плоскости обычно превышают полосу пропускания объекта. Однако эквивалентные частоты на s -плоскости всегда меньше, чем $\omega_s/2$.

Рис. 13.33
Частотные характеристики цифрового фильтра с опережением по фазе



Из рис. 13.33 видно, что регулятор с опережением по фазе увеличивает коэффициент усиления системы на высоких частотах и, следовательно, полосу пропускания замкнутой системы, что ведет к повышению быстродействия системы. Как было показано в разделе 9.5, нуль и полюс функции $D(w)$ регулятора [см. (13-54)] должны быть расположены вблизи от частоты, при которой фазовая частотная характеристика объекта пересекает уровень -180° (см. рис. 9.19). Один из методов синтеза регулятора с опережением по фазе заключается в подборе расположения его нуля и полюса путем последовательных приближений, требующем большого количества итераций. Этот метод был рассмотрен в разделе 9.5.

В данном разделе мы остановимся на аналитической процедуре синтеза, подобной изложенной в разделе 9.6. Эта процедура основана на том, что диаграмма Найквиста скорректированной системы должна пройти через точку $e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}$, где φ_m — требуемое значение запаса по фазе. При этом все уравнения, полученные в разделе 9.6, полностью применимы и к цифровым системам управления. Рассмотрим эту процедуру.

Пусть ω_{w1} есть частота на w -плоскости, на которой обеспечивается заданное значение запаса по фазе. На этой частоте для системы, изображенной на рис. 13.30,

$$D(j\omega_{w1})G(j\omega_{w1}) = e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}, \quad (13-67)$$

где

$$D(w) = \frac{a_1 w + a_0}{b_1 w + 1}. \quad (13-68)$$

Заметим, что это выражение соответствует передаточной функции регулятора с отставанием по фазе вида (13-66), хотя и записано в несколько иной форме. Регулятор с передаточной функцией (13-68) имеет на нулевой частоте коэффициент усиления a_0 . Согласно [4], уравнения синтеза имеют следующий вид:

$$a_1 = \frac{1 - a_0 |G(j\omega_{w1})| \cos \theta}{\omega_{w1} |G(j\omega_{w1})| \sin \theta}, \quad b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G(j\omega_{w1})|}{\omega_{w1} \sin \theta}, \quad (13-69)$$

где, согласно (13-67),

$$\theta = \arg D(j\omega_{w1}) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G(j\omega_{w1}) \quad (13-70)$$

и

$$|D(j\omega_{w1})| = \frac{1}{|G(j\omega_{w1})|}. \quad (13-71)$$

Если параметры регулятора удовлетворяют приведенным выше уравнениям, то диаграмма Найквиста будет проходить через точку $e^{j(-180^\circ + \varphi_m)}$. Если система устойчива, то она имеет требуемый запас по фазе. Однако данная процедура еще не гарантирует, что система будет устойчива. Поэтому после определения коэффициентов a_1 и b_1 необходимо построить диаграмму Боде (или диаграмму Найквиста) и проверить, действительно ли замкнутая система устойчива.

Процедура синтеза предполагает, что должны быть заданы коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте, a_0 , и частота ω_{w1} , на которой обеспечивается запас по фазе. Тогда по выражениям (13-69) можно вычислить параметры регулятора a_1 и b_1 . Коэффициент a_0 определяется на основании требований к точности системы в установившемся режиме. Частоту ω_{w1} приблизительно можно определить следующим образом. Поскольку регулятор должен обладать опережением по фазе, то угол θ положителен (см. рис. 13.33). Тогда из (13-70):

$$\theta = -180^\circ + \varphi_m - \arg G(j\omega_{w1}) > 0^\circ,$$

или

$$\arg G(j\omega_{w1}) < -180^\circ + \varphi_m. \quad (13-72)$$

Поэтому частота ω_{w1} не может быть выбрана произвольно и должна удовлетворять уравнению (13-72). В общем случае, чем больше частота ω_{w1} , тем больше полоса пропускания замкнутой системы (разумеется, если система устойчива). Вопрос о выборе частоты, на которой обеспечивается запас по фазе, подробно был рассмотрен в разделе 9.6.

Пример 13.13

Рассмотрим систему радиолокационного сопровождения из примера 13.12. Напомним, что

$$G(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}, \quad T = 0,5 \text{ с.}$$

Система имеет конфигурацию рис. 13.30. В примере 9.3 был синтезирован аналоговый регулятор с опережением по фазе исходя из требуемого запаса по фазе в 50° . Это же значение мы со-

храним при синтезе цифрового регулятора. В примере 9.3 была выбрана частота, на которой имеет место запас по фазе, $\omega = 1,7 \text{ с}^{-1}$. Согласно (13-36) эквивалентная частота на w -плоскости равна

$$\omega_{w1} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) = \frac{2}{0,5} \operatorname{tg} \left(\frac{1,7 \cdot 0,5}{2} \right) = 1,810.$$

При единичном коэффициенте усиления ($a_0 = 1$) и $\omega_{w1} = 1,810$ применение формул (13-69) дает неустойчивый регулятор. Попытки выбрать другое значение ω_{w1} также приводят к неустойчивому регулятору. Эта неустойчивость обусловлена отрицательным фазовым сдвигом, вносимым экстраполатором нулевого порядка. Поэтому при заданных исходных данных невозможно обеспечить запас по фазе в 50° .

Чтобы уменьшить эффект, связанный с квантованием, период квантования был выбран равным $0,1 \text{ с}$, что соответствует пятикратному увеличению частоты квантования с 2 Гц до 10 Гц . При новом значении периода квантования с помощью компьютера была вычислена импульсная передаточная функция объекта:

$$G(z) = \frac{(0,6189z^2 + 2,2984z + 0,5327) \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,7234z^2 + 2,4644z - 0,7408}.$$

При $T = 0,1 \text{ с}$ действительная частота $\omega = 1,7 \text{ с}^{-1}$ эквивалентна на w -плоскости частоте $\omega_w = 1,704$. Однако уравнения синтеза (13-69) снова приводят к неустойчивому регулятору. Поэтому требуемое значение запаса по фазе было уменьшено до 45° , а частота, на которой он обеспечивается, принята равной $\omega_{w1} = 1,704$. С помощью компьютера, без которого в данном случае не обойтись, было получено:

$$G(j\omega_{w1})|_{\omega_{w1}=1,704} = 0,4540e^{-j194,8^\circ}.$$

Из (13-70) имеем:

$$\theta = \arg D(j\omega_{w1}) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G(j\omega_{w1}) = -180^\circ + 45^\circ + 194,8^\circ = 59,8^\circ.$$

Тогда по (13-69), полагая $a_0 = 1$,

$$a_1 = \frac{1 - a_0 |G(j\omega_{w1})| \cos \theta}{\omega_{w1} |G(j\omega_{w1})| \sin \theta} = \frac{1 - (1)(0,454) \cos(59,8^\circ)}{(1,704)(0,454) \sin(59,8^\circ)} = 1,154,$$

$$b_1 = \frac{\cos \theta - a_0 |G(j\omega_{w1})|}{\omega_{w1} \sin \theta} = \frac{\cos(59,8^\circ) - (1)(0,454)}{(1,704) \sin(59,8^\circ)} = 0,03329.$$

Передаточная функция регулятора приобретает вид:

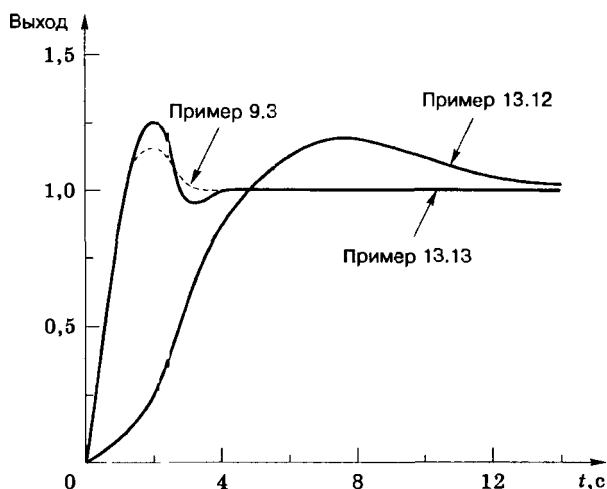
$$D(w) = \frac{1,154w + 1}{0,03329w + 1} = \frac{1 + w/0,8666}{1 + w/30,04}.$$

Переход к переменной z в соответствии с (13-56) дает:

$$D(z) = \frac{14,45(z - 0,9169)}{z + 0,2006} = \frac{14,45z - 13,25}{z + 0,2006}.$$

На рис. 13.34 приведена переходная функция данной системы. Для сравнения здесь же изображена переходная функция системы с аналоговым регулятором из примера 9.3. Поскольку в примере 9.3 запас по фазе был равен 50° , а при решении нашей задачи он был уменьшен до 45° , то естественно, что перерегулирование в системе с цифровым регулятором увеличилось. На рис. 13.34 также приведена переходная функция системы из примера 13.12, где был использован регулятор с отставанием по фазе. Сравнение отчетливо демонстрирует разницу в эффектах от применения регуляторов с опережением и с отставанием по фазе.

Рис. 13.34
Переходная функция
к примеру 13.13



13.14. Цифровые ПИД-регуляторы

В разделах 7.10 и 9.8 был рассмотрен аналоговый ПИД-регулятор. Читатель, не знакомый с этим регулятором, должен предварительно изучить данные разделы, а затем приступить к дальнейшему материалу. Если $e(t)$ и $m(t)$ есть, соответственно, входной и выходной сигналы ПИД-регулятора, то он описывается следующим уравнением:

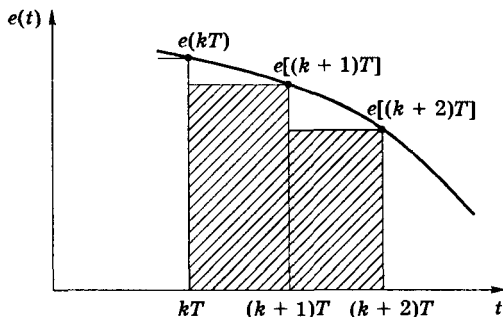
$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (13-73)$$

Синтез регулятора заключается в определении коэффициентов K_p , K_I и K_D . Процедура синтеза аналоговых ПИД-регуляторов описана в главах 7 и 9.

Цифровые ПИД-регуляторы также описываются уравнением (13-73), с той лишь разницей, что операции умножения, интегрирования и дифференцирования выполняются численно с помощью компьютера. Если численное интегрирование и дифференцирование производится с высокой точностью, то характеристики систем с аналоговым регулятором и с цифровым регулятором очень мало будут отличаться друг от друга. Ниже мы рассмотрим некоторые методы численного интегрирования и дифференцирования.

Из множества методов численного интегрирования мы рассмотрим только простейший — так называемый метод Эйлера, или правило прямоугольников. Это правило проиллюстрировано на рис. 13.35. Площадь каждого сегмента под кривой $e(t)$ аппроксимируется площадью заштрихованного прямоугольника. Если $m(t)$ должно быть равно интегра-

Рис. 13.35
Численное интегрирование
по методу Эйлера



лу от $e(t)$, то значение интеграла в момент $t = (k+1)T$ равно его значению при $t = kT$ плюс площадь под кривой $e(t)$ в интервале между kT и $(k+1)T$. Таким образом, по правилу Эйлера

$$m[(k+1)T] = m(kT) + Te[(k+1)T]. \quad (13-74)$$

Применив к этому разностному уравнению z -преобразование, получим:

$$z[M(z) - m(0)] = M(z) + Tz[E(z) - e(0)]. \quad (13-75)$$

Полагая начальные условия нулевыми, можно описать данный интегратор с помощью передаточной функции:

$$M(z) = \frac{Tz}{z-1} E(z). \quad (13-76)$$

Другим методом численного интегрирования соответствуют иные выражения для передаточной функции [2].

Численное дифференцирование можно выполнить по методу, проиллюстрированному на рис. 13.36. Здесь предполагается, что значение производной $e(t)$ в момент $t = (k+1)T$ определяется наклоном прямой линии, проведенной через точки $e(kT)$ и $e[(k+1)T]$. Таким образом, процедура численного дифференцирования описывается разностным уравнением:

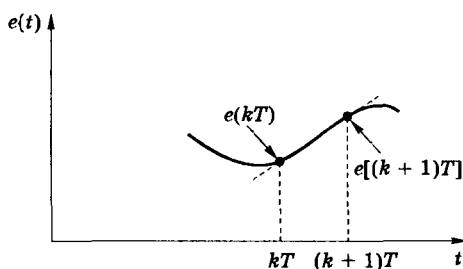


Рис. 13.36. Иллюстрация численного дифференцирования

$$m[(k+1)T] = \frac{e[(k+1)T] - e(kT)}{T}. \quad (13-77)$$

Применив к этому уравнению z -преобразование, получим:

$$M(z) = \frac{z-1}{Tz} E(z), \quad (13-78)$$

откуда видно, что передаточная функция обратна соответствующей передаточной функции интегратора, реализующего алгоритм Эйлера. Можно показать, что выражения, обратные передаточным функциям иных методов численного интегрирования, будут соответствовать различным методам численного дифференцирования.

Существуют два подхода к синтезу цифрового ПИД-регулятора. В одном случае период квантования T , являющийся одновременно шагом численного интегрирования и дифференцирования, может быть выбран настолько малым, что все операции будут выполняться с очень высокой точностью. Тогда для определения K_p , K_I и K_D можно воспользоваться процедурами, описанными в главах 7 и 9 применительно к аналоговым регуляторам.

Другой подход предполагает, что для образования передаточной функции регулятора $D(z)$ используются передаточные функции операций численного интегрирования и дифференцирования:

$$M(z) = D(z)E(z) = \left[K_p + \frac{K_I Tz}{z-1} + \frac{K_D (z-1)}{Tz} \right] E(z). \quad (13-79)$$

Структура цифрового ПИД-регулятора показана на рис. 13.37. Передаточную функцию регулятора можно записать в зависимости от переменной w , и тогда для определения коэффициентов K_p , K_I и K_D могут быть применены частотные методы, разработанные в главе 9 для непрерывных систем. Данная процедура применяется в тех случаях, когда период квантования T достаточно велик и численное интегрирование и дифференцирование выполняются с большими погрешностями.

Напомним, что существует множество алгоритмов численного интегрирования и дифференцирования. Поэтому уравнение (13-79) не является единственным для цифрового ПИД-регулятора. Однако в большинстве промышленных ПИД-регуляторов реализуется именно уравнение (13-79).

Мы будем считать, что период квантования T выбран достаточно малым, так что численное интегрирование и дифференцирование выполняются с высокой точностью. В этом случае могут быть использованы методы синтеза, разработанные в разделах 7.11 и 9.9 применительно к непрерывным системам.

Независимо от выбранного метода синтеза, мы будем считать, что ПИД-регулятор реализует разностные уравнения (13-74) и (13-77), давая в итоге:

$$m(k+1) = K_p e(k+1) + K_I m(k+1) + \frac{K_D [e(k+1) - e(k)]}{T}, \quad (13-80)$$

где

$$m(k+1) = m(k) + Te(k+1).$$

Ниже приводятся два примера.

Пример 13.14

Здесь мы возьмем за основу систему радиолокационного сопровождения из примера 13.12, где был синтезирован регулятор с отставанием по фазе, и займемся синтезом цифрового ПИ-регулятора. Период квантования $T = 0,5$ с. Объект — тот же самый, что и в примере 9.6, а требуемый запас по фазе равен 50° . В примере 9.6 были получены значения параметров регулятора $K_p = 0,220$ и $K_I = 0,0088$. Передаточная функция аналогового регулятора имела вид:

$$G_c(s) = 0,220 + \frac{0,0088}{s},$$

и, следовательно, передаточная функция цифрового регулятора на основании (13-74) должна быть записана в виде:

$$D(z) = 0,220 + \frac{0,0044z}{z-1}.$$

Переходная функция системы с цифровым регулятором изображена на рис. 13.38, где также приведена переходная функция непрерывной системы из примера 9.6. Заметим, что в обеих системах регулятор имеет один и тот же коэффициент усиления на нулевой частоте. Однако в данном примере интегрирование выполняется численно с шагом $0,5$ с, тогда как в примере 9.6 интегрирование является точным. Из рис. 13.38 очевиден дестабилизирующий эффект квантования и погрешностей численного интегрирования.

С целью дальнейшего исследования этого эффекта были вычислены частотные характеристики скорректированных систем; они изображены на рис. 13.39 в зависимости от действитель-

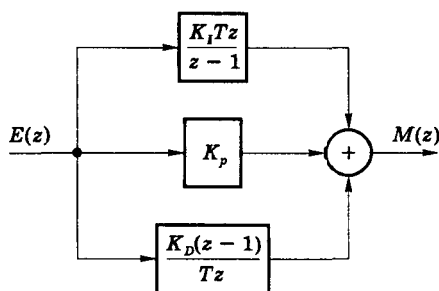


Рис. 13.37. Цифровой ПИД-регулятор

ной частоты ω . Амплитудно-частотные характеристики настолько близки, что их невозможно различить, зато фазо-частотные характеристики заметно отличаются. Запас по фазе в непрерывной системе равен 52° , а в цифровой системе управления — всего 45° . При уменьшении периода квантования запас по фазе в цифровой системе управления и ее переходная функция будут стремиться к соответствующим характеристикам непрерывной системы. Переходные функции и частотные характеристики могут быть вычислены с помощью MATLAB.

Рис. 13.39

Частотные характеристики разомкнутой системы к примеру 13.14

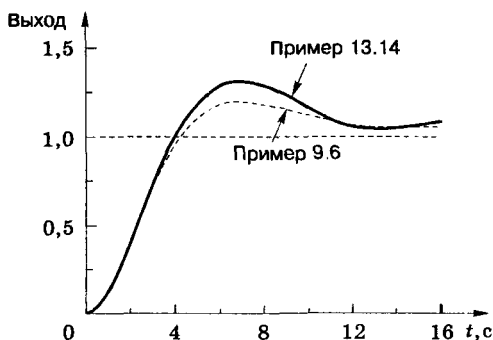
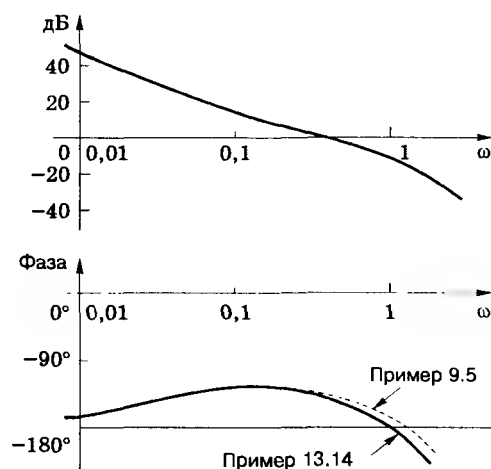


Рис. 13.38. Переходная функция к примеру 13.14



Пример 13.15

Здесь мы рассмотрим проблему синтеза ПИД-регулятора для системы радиолокационного сопровождения из предыдущего примера. Ранее, в примере 13.13, мы обнаружили, что период квантования 0,5 с не удовлетворяет условиям синтеза регулятора с опережением по фазе. Поскольку канал производной ПИД-регулятора создает опережение по фазе, то мы так же, как и в примере 13.13, уменьшим период квантования до 0,1 с. В примере 9.8 для управления подобным объектом был синтезирован аналоговый ПИД-регулятор, причем требуемый запас по фазе составлял 50° . Были получены следующие значения параметров регулятора: $K_p = 1,100$, $K_I = 0,005$ и $K_D = 1,123$. Эти коэффициенты мы сохраним и в цифровом регуляторе (13-79), в результате чего получим передаточную функцию

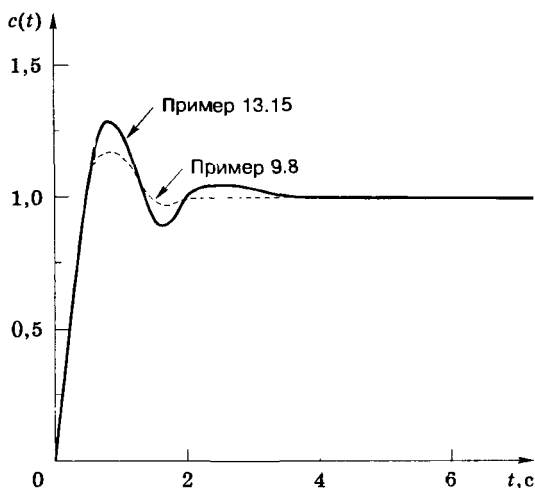
$$D(z) = 1,100 + \frac{0,0005z}{z-1} + \frac{1,123(z-1)}{z}.$$

На рис. 13.40 приведена переходная функция системы с таким регулятором. Для сравнения здесь же изображена переходная функция непрерывной системы из примера 9.8. Еще раз можно убедиться в ухудшении устойчивости системы за счет эффекта квантования и погрешностей численного интегрирования и дифференцирования.

В рассмотренных выше примерах аналоговый ПИД-регулятор был заменен эквивалентным цифровым, и перерегулирование в цифровых системах управления всегда было больше, чем в непрерывных. Это объясняется внесением дополнительного отрицательно-

Рис. 13.40

Переходная функция
к примеру 13.15



го фазового сдвига в результате операции квантования, что уменьшает запасы устойчивости, и погрешностями численного интегрирования и дифференцирования. Если для синтеза ПИД-регуляторов использовать точные методы [2], то данный эффект будет не столь заметным, а во многих случаях просто незначительным.

13.15. Синтез с помощью метода корневого годографа

В разделе 13.5 был рассмотрен анализ дискретных систем с помощью корневого годографа. Было замечено, что правила построения корневого годографа одинаковы для непрерывных и дискретных систем; разница заключается лишь в интерпретации расположения корней и их влияния на вид переходной функции. Связь между расположением на z -плоскости корней характеристического уравнения и переходной функцией дискретной системы была установлена в разделе 13.4.

Как было показано в главах 7 и 9, посвященных непрерывным системам, синтез с помощью метода корневого годографа приводит к тем же типам регуляторов, что и частотные методы, т.е. к регуляторам с опережением по фазе, с отставанием по фазе и к ПИД-регуляторам. То же самое справедливо и для дискретных систем. Поскольку метод корневого годографа имеет целью разместить полюсы передаточной функции замкнутой системы в заданных точках комплексной плоскости, то все связанные с этим процедуры синтеза *идентичны* для непрерывных и для дискретных систем. Напомним только еще раз, что одинаковое расположение на комплексной плоскости полюсов непрерывной и дискретной системы по-разному сказывается на их временных характеристиках.

Аналитическая процедура синтеза, рассмотренная в разделе 7.8, может быть непосредственно применена на w -плоскости, если передаточная функция регулятора представлена в виде (13-68), т.е.

$$D(w) = \frac{a_1 w + a_0}{b_1 w + 1}. \quad (13-81)$$

В данном случае желаемое расположение полюсов на z -плоскости должно быть отображено на w -плоскость, после чего можно использовать уравнения синтеза (7-53). Заметим, что a_0 в выражении (13-81) есть коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте.

Если синтез производится непосредственно в области переменной z , то передаточная функция регулятора задается в виде:

$$D(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_0}{\beta_1 z + 1}. \quad (13-82)$$

Для определения параметров этой передаточной функции также можно воспользоваться уравнениями (7-53), однако в данном случае коэффициент усиления регулятора не равен α_0 , а определяется как

$$D(1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{\beta_1 + 1}. \quad (13-83)$$

Следовательно, если в (7-53) произвести замены $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$ и $b_1 = \beta_1$, то эти два уравнения совместно с (13-83) позволят определить три коэффициента передаточной функции (13-82) в зависимости от желаемого расположения доминирующих полюсов и коэффициента усиления регулятора. Решение этих уравнений мы здесь не рассматриваем.

Поскольку синтез с помощью метода корневого годографа, изложенный в главе 7, может быть применен и к цифровым системам управления на w -плоскости, то мы разберем простой пример синтеза в области переменной z .

Пример 13.16

Рассмотрим систему первого порядка, изображенную на рис. 13.1 (см. раздел 13.1). Для этой системы

$$G(z) = \frac{0,393}{z - 0,607}, \quad T = 0,5 \text{ с.}$$

Как видно из рис. 13.2, эта система обрабатывает единичное ступенчатое воздействие с установившейся ошибкой, равной 50%. Для устранения этой ошибки мы применили ПИ-регулятор. Согласно (13-79), передаточную функцию цифрового ПИ-регулятора можно записать в виде:

$$D(z) = K_p + \frac{K_I T z}{z - 1} = \frac{(K_p + K_I T)z - K_p}{z - 1} = \frac{K_d(z - z_0)}{z - 1},$$

где

$$K_d = K_p + K_I T, \quad z_0 = \frac{K_p}{K_p + K_I T} = \frac{K_p}{K_d}.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой скорректированной системы будет иметь вид:

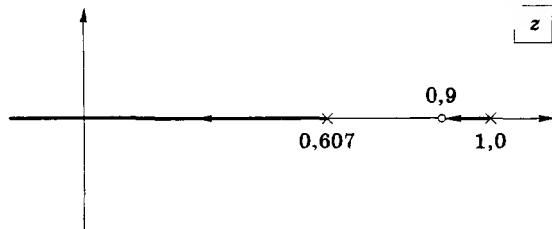
$$D(z)G(z) = \frac{0,393 K_d (z - z_0)}{(z - 1)(z - 0,607)}.$$

Поскольку для регулятора с отставанием по фазе нуль его передаточной функции должен быть расположен вблизи полюса, то выберем $z_0 = 0,90$. На рис. 13.41 изображен корневой годограф системы. Будем считать, что переходная функция системы на рис. 13.1 удовлетворяет нашим требованиям; поэтому мы поместим доминирующий полюс в точку $z_1 = 0,214$. Чтобы эта точка принадлежала корневому годографу, должно выполняться условие $D(z_1)G(z_1) = -1$. Следовательно,

$$\frac{0,393 K_d (0,214 - 0,90)}{(0,214 - 1)(0,214 - 0,607)} = -1,$$

Рис. 13.41

Корневой годограф
к примеру 13.16



откуда $K_d = 1,146$. По приведенным выше выражениям находим:

$$K_p = K_d z_0 = (1,146)(0,90) = 1,031,$$

$$K_I = \frac{K_d - K_p}{T} = 0,230,$$

и передаточная функция регулятора принимает вид:

$$D(z) = 1,031 + \frac{0,115z}{z-1}.$$

Переходная функция скорректированной системы изображена на рис. 13.42. Для сравнения здесь же приведена переходная функция нескорректированной системы (рис. 13.2).

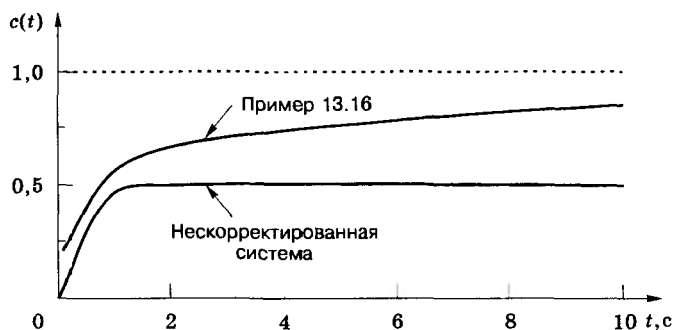
Обратим внимание на необычный вид переходной функции скорректированной системы. При синтезе регулятора мы разместили доминирующий полюс замкнутой скорректированной системы в той же точке, что и для нескорректированной системы; однако при этом длительность переходного процесса значительно увеличилась. Причину этого явления можно усмотреть из корневого годографа на рис. 13.41. Так как скорректированная система имеет второй порядок, мы должны рассматривать оба полюса ее передаточной функции. Один полюс был помещен в точку $z = 0,214$; простыми вычислениями можно показать, что второй полюс занимает положение $z = 0,924$. Постоянная времени, соответствующая этому полюсу, определяется из условия

$$z = e^{-T/\tau} = e^{-0,5\tau} = 0,924,$$

откуда следует $\tau = 6,33$ с. Отсюда видно, что полюс, вносимый регулятором, играет очень существенное значение. Регулятор с отставанием по фазе всегда добавляет в передаточную функцию полюс, которому соответствует большая постоянная времени; но довольно часто этот полюс не оказывает такого доминирующего влияния на переходную функцию, как в данном примере.

Рис. 13.42

Переходные функции
к примерам



13.16. Заключение

В этой главе были рассмотрены основные методы анализа и синтеза цифровых систем управления. Прежде всего было определено понятие устойчивости дискретных систем и были рассмотрены методы анализа устойчивости линейных стационарных дискретных систем. Практически все эти методы заимствованы из анализа непрерывных систем, и они

были рассмотрены в соответствующих главах книги. По этой причине читателю было предложено обратиться к предшествующим главам книги. Единственной новой процедурой здесь является критерий Джюри, который был рассмотрен в связи с анализом устойчивости дискретных систем на z -плоскости. В главе были также приведены методы анализа временных и частотных характеристик.

Второй основной вопрос, рассмотренный в данной главе, касался синтеза цифровых систем управления. Были разработаны процедуры синтеза регуляторов с опережением по фазе, с отставанием по фазе и ПИД-регуляторов. Было показано, что синтез может быть выполнен либо с использованием частотных характеристик, либо с помощью метода корневого годографа. Как анализ устойчивости, так и методы синтеза дискретных систем основаны на тех же самых процедурах, которые разработаны для непрерывных систем, поэтому данная глава полностью базируется на материале глав, посвященных непрерывным системам.

Как неоднократно подчеркивалось ранее, во всех процедурах анализа и синтеза, рассматриваемых в данной книге, мы имеем дело с *моделями* реальных систем, а не с самими этими системами. Модель не всегда может точно описывать свойства реальной системы. Даже если модель является точной, она будет таковой лишь в ограниченном диапазоне функционирования реальной системы. Поэтому ко всем методам анализа и синтеза, рассматриваемым в данной книге или иных источниках, следует подходить с критических позиций. Работая с моделью, мы можем синтезировать систему, переходная функция которой имеет перерегулирование 10%, обладает очень малой установившейся ошибкой и т.д. Однако все это не имеет смысла, пока не будут проведены натурные испытания реальной системы. В общем случае реакция реальной системы в худшую сторону отличается от реакции ее модели. Поэтому в действительности процедура синтеза включает в себя множество итераций и последовательное уточнение модели системы, прежде чем будет достигнуто соответствие между поведением реальной системы и ее модели. И еще раз мы напомним, что все аналитические процедуры выполняются применительно к *модели* системы; основная же часть работы инженера заключается в перенесении полученных результатов на реальную физическую систему (см. рис. 1.4).

Литература

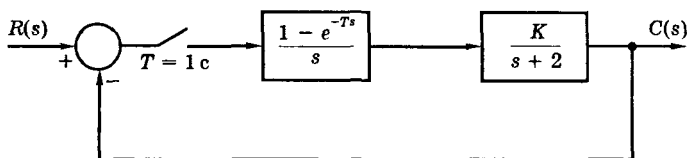
1. E.I.Jury. *Theory and Application of the z-Transform Method*. New York: Wiley, 1964.
2. C.L.Phillips and H.T.Nagle, Jr. *Digital Control System Analysis and Design*. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
3. C.W.deSilva. *Control Sensors and Actuators*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1989.
4. C.L.Phillips and R.D.Harbor. *Feedback Control Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

Задачи

13.1. На рис. 13.1 (3) изображена структурная схема системы регулирования температуры жидкости в баке (см. раздел 2.9). Заметим, что объект имеет постоянную времени $\tau = 1$ с. Считая $K = 1$, определите переходные функции системы для следующих случаев:

- (а) Период квантования $T = 1$ с.

Рис. 13.1 (3)



- (б) Период квантования $T = 0,1$ с.
- (в) Квантователь и фиксатор удалены, система является непрерывной.
- (г) Изобразите три переходные функции на одном графике.
- (д) Установившееся значение выходной переменной в пп. (а), (б) и (в) одинаково. Почему?
- (е) С помощью программы MATLAB из примера 13.2 проверьте переходную функцию, полученную в п. (а).

13.2. Для трех систем из задачи 13.1:

- (а) Запишите характеристические уравнения и определите диапазон значений коэффициента K , при которых система является устойчивой.
- (б) При $K = 8$ определите диапазон значений периода квантования T , при которых система является устойчивой.
- (в) Проверьте результаты пп. (а) и (б), промоделировав систему с помощью SIMULINK, и наблюдайте как повлияет на устойчивость системы и ее переходную характеристику изменение параметров T и K .

13.3. В системе из задачи 13.1 измените передаточную функцию объекта на $G_p(s) = K/(s + 1)$ и примите $T = 0,1$ с и $K = 1$.

- (а) Определите передаточную функцию разомкнутой системы $G(z)$.
- (б) Проверьте результат п. (а) с помощью MATLAB.
- (в) Найдите передаточную функцию замкнутой системы.
- (г) Вычислите переходную функцию системы.
- (д) На основании п. (в) запишите разностное уравнение системы.
- (е) Напишите программу MATLAB, которая решала бы это разностное уравнение.
- (ж) Выполните программу из п. (е) для случая единичного ступенчатого входного воздействия и проверьте результат п. (г).

13.4. Если на рис. 13.1 (3) передаточную функцию $K/(s + 2)$ заменить на $G_p(s) = K/s(s + 0,5)$, то мы получим систему управления положением пера цифрового плоттера. Пусть в этой системе $K = 1$.

- (а) Вычислите $G(z)$ при $T = 1$ с.
- (б) Вычислите $G(z)$ при $T = 0,1$ с и обратите внимание на проблемы, связанные с вычитанием чисел, приблизительно равных по величине.
- (в) Проверьте результаты пп. (а) и (б) с помощью MATLAB.
- (г) Вычислите передаточные функции замкнутой системы для условий пп. (а) и (б).
- (д) Определите постоянные времени замкнутых систем.
- (е) Система относится к типу I, т.к. один из полюсов передаточной функции $G_p(s)$ расположен в точке $s = 0$. Докажите, что при этом коэффициент усиления замкнутых систем на нулевой частоте равен единице.

13.5. Рассмотрите систему управления положением пера цифрового плоттера из задачи 13.4, считая что $T = 1$ с. Здесь будут полезны результаты решения задачи 13.4.

- (а) Определите диапазон значений коэффициента K , при которых система будет устойчивой.
- (б) Определите значение K , при котором система будет находиться на границе устойчивости и в ней возникнут незатухающие колебания.
- (в) Определите частоту колебаний, соответствующую результату п. (б).

(г) С помощью MATLAB промоделируйте систему, находящуюся на границе устойчивости, и проверьте результаты пп. (б) и (в) (см. пример 13.2). Дополнительно постройте график реакции системы на начальные условия.

(д) Полагая $K = 0,6$, определите значения параметров ζ , ω_n и τ для данной системы.

13.6. Используя критерий Джурри, определите диапазон значений K , при которых система, изображенная на рис. 13.6

(3), будет устойчива, если:

(а)
$$G(z) = \frac{0,1z + 0,06}{(z-1)(z-0,7)}.$$

(б)
$$G(z) = \frac{0,1z + 0,06}{z(z-1)(z-0,7)}.$$

(в) Приняв значения K , соответствующие границе устойчивости для систем из пп. (а) и (б), с помощью MATLAB вычислите корни характеристического уравнения и определите модули этих корней.

13.7. Для системы регулирования температуры из задачи 13.1 постройте корневой годограф при указанных ниже условиях. В каждом случае определите также диапазон значений K , при которых система является устойчивой. (При ответе на данный вопрос используйте информацию, предоставляемую корневым годографом.)

(а) $T = 1$ с.

(б) $T = 0,1$ с.

(в) Квантователь и экстраполятор удалены из системы, т.е. она является непрерывной.

(г) С помощью MATLAB постройте корневой годограф и проверьте полученные результаты.

13.8. Для системы из задачи 13.4, считая, что $T = 1$ с:

(а) Постройте корневой годограф.

(б) Определите положение корней характеристического уравнения при коэффициенте K , соответствующем нахождению системы на границе устойчивости.

(в) Найдите наибольшее значение K , при котором переходная функция системы не будет иметь перерегулирования.

(г) С помощью MATLAB постройте корневой годограф и проверьте результат п. (а).

(д) С помощью MATLAB проверьте результат п. (б).

(е) С помощью MATLAB вычислите переходную функцию системы и проверьте результат п. (в).

13.9. Постройте корневой годограф для системы, изображенной на рис. 13.6, в случаях, когда:

(а)
$$G(z) = \frac{0,1z + 0,06}{(z-1)(z-0,7)}.$$

(б)
$$G(z) = \frac{0,1z + 0,06}{z(z-1)(z-0,7)}.$$

(в) С помощью MATLAB проверьте построения, выполненные в пп. (а) и (б).

13.10. Для системы, изображенной на рис. 13.1, на одном и том же графике постройте диаграммы Найквиста в следующих случаях:

(а) $T = 1$ с.

(б) $T = 0,1$ с.

(в) Квантователь и экстраполятор удалены из системы, т.е. она является непрерывной.

(г) По диаграммам Найквиста определите диапазон значений K , при которых система является устойчивой.

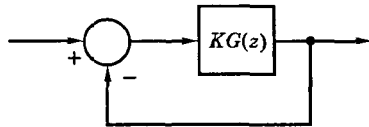
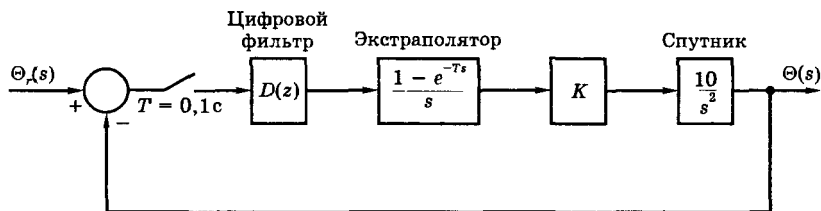


Рис. 13.6 (3)

- (д) С помощью MATLAB постройте диаграммы Найквиста и проверьте полученные результаты.
- 13.11.** В системе управления положением пера плоттера из задачи 13.4 примите $T = 1$ с и $K = 1$.
- (а) Постройте диаграмму Найквиста.
 - (б) С помощью диаграммы Найквиста определите диапазон значений K , при которых система является устойчивой.
 - (в) Определите частоту, с которой система будет совершать незатухающие колебания, находясь на границе устойчивости.
 - (г) С помощью MATLAB проверьте построение диаграммы Найквиста, выполненное в п. (а).
 - (д) С помощью MATLAB проверьте результат п. (б).
 - (е) С помощью MATLAB вычислите переходную функцию системы для случая, когда она находится на границе устойчивости, и проверьте результаты пп. (б) и (в).
- 13.12.** Для системы регулирования температуры из задачи 13.1 с помощью критерия Рауса-Гурвица определите диапазон значений K , при которых система будет устойчива, в следующих случаях:
- (а) $T = 1$ с.
 - (б) $T = 0,1$ с.
 - (в) Квантователь и экстраполятор отсутствуют, т.е. система является непрерывной.
- 13.13.** (а) С помощью критерия Рауса-Гурвица определите диапазон значений K , при которых система из задачи 13.4 является устойчивой ($T = 1$ с).
- (б) С помощью MATLAB определите корни характеристического уравнения системы, находящейся на границе устойчивости, и тем самым проверьте результат п. (а).
- 13.14.** Рассмотрите систему регулирования температуры (рис. 13.1), считая $K = 1$. Постройте диаграмму Боде и найдите запасы устойчивости по модулю и по фазе для следующих случаев:
- (а) $T = 1$ с.
 - (б) $T = 0,1$ с.
 - (в) Квантователь и экстраполятор отсутствуют, т.е. система является непрерывной.
 - (г) С помощью MATLAB проверьте построение диаграммы Боде.
- 13.15.** Рассмотрите систему из задачи 13.4 при $T = 1$ с и $K = 1$.
- (а) Постройте диаграмму Боде и определите запасы устойчивости по модулю и по фазе.
 - (б) Проверьте результат п. (а) с помощью MATLAB.
- 13.16.** Рассмотрите систему, изображенную на рис. 13.1, при $K = 1$. Определите установившиеся ошибки в случае ступенчатого и линейного входного воздействия при следующих данных:
- (а) $T = 1$ с.
 - (б) $T = 0,1$ с.
 - (в) Квантователь и экстраполятор отсутствуют, т.е. система является непрерывной.
 - (г) Почему установившиеся ошибки, вычисленные в пп. (а), (б) и (в), равны?
- 13.17.** (а) Рассмотрите систему из задачи 13.4 при $T = 1$ с и $K = 1$. Вычислите установившиеся ошибки при ступенчатом и линейном входном воздействии.
- (б) Повторите п. (а) в случае, если квантователь и экстраполятор отсутствуют, т.е. система является непрерывной.
- (в) С помощью MATLAB проверьте результат п. (а) для случая линейного входного воздействия. Для достижения системой установившегося режима при имитационном моделировании потребуется приблизительно 250 с. Почему?

Рис. 13.18 (3)



13.18. На рис. 13.18 (3) изображена структурная схема системы управления положением жесткого спутника. Эта система была описана в разделе 2.6. В данном случае используется цифровая коррекция, однако будем считать, что $D(z) = 1$.

- С помощью критерия Джюри определите диапазон значений K , при которых система является устойчивой.
- Проверьте результат п. (а) с помощью критерия Найквиста.
- На основании диаграммы Найквиста, построенной в п. (б), исследуйте, можно ли обеспечить устойчивость системы, применив регулятор с отставанием по фазе.
- Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, обладающий единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 50° . Подсказка: примите значение $\omega_{w1} = 10$.
- С помощью компьютера определите запасы устойчивости по модулю и по фазе в скорректированной системе.

13.19. На рис. 13.19 (3) изображена структурная схема системы регулирования содержания CO_2 в камере для изучения роста растений. Для анализа пробы воздуха и определения содержания в ней CO_2 затрачивается 45 с; это время учтено в виде запаздывания датчика. В данной задаче мы не будем учитывать запаздывание, т.е. считается, что датчик имеет передаточную функцию $H(s) = 0,0125$. Значение $K = 50$.

- Вычислите передаточную функцию разомкнутой системы $\overline{GH}(z)$ и проверьте результат с помощью MATLAB.
- Изобразите диаграмму Бode для нескорректированной системы и отметьте на ней запасы по модулю и по фазе. Проверьте построение диаграммы Бode с помощью MATLAB.
- Постройте диаграмму Найквиста для нескорректированной системы и определите, является ли система устойчивой. Проверьте построение диаграммы Найквиста с помощью MATLAB.
- Постройте корневой годограф для нескорректированной системы и с его помощью определите, является ли система устойчивой. Проверьте построение корневого годографа с помощью MATLAB.
- Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, обладающий единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 70° .

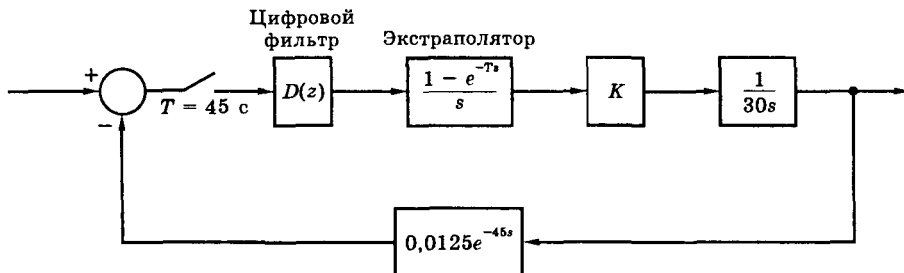


Рис. 13.19 (3)

(е) Можно ли синтезировать подходящий регулятор с опережением по фазе и единичным коэффициентом усиления? Подсказка: обратите внимание на запас по модулю.

13.20. Рассмотрите систему регулирования содержания CO_2 в камере из задачи 13.19. Повторите решение задачи 13.19, считая, что датчик обладает запаздыванием в 45 с, а $K = 50$. Учтите, что передаточная функция разомкнутой системы в данном случае изменяется очень просто.

13.21. Рассмотрите непрерывную систему управления, в которой объект имеет передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид $1 + G_c(s)G_p(s) = 0$, а требуемое значение запаса по фазе равно 55° . Синтезировав аналоговый регулятор, реализуйте его в дискретном виде с передаточной функцией $D(z)$ при $T = 0,1$ с. Эта задача решается с помощью компьютера.

(а) По методике, описанной в главе 9, синтезирован аналоговый ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$G_c(s) = 0,679 + \frac{0,114}{s}.$$

При этом обеспечивается запас по фазе в 45° . Определите передаточную функцию эквивалентного дискретного ПИ-регулятора [см. (13-79)] и с помощью MATLAB установите уменьшение запаса по фазе, обусловленное цифровой реализацией регулятора. Напомним, что передаточная функция объекта вычисляется по выражению

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right].$$

(б) Аналоговый ПД-регулятор, обеспечивающий запас по фазе в 45° , имеет передаточную функцию

$$G_c(s) = 1,73 + 0,403s.$$

Определите передаточную функцию эквивалентного дискретного ПД-регулятора [см. (13-79)] и с помощью MATLAB установите уменьшение запаса по фазе, обусловленное цифровой реализацией регулятора.

(в) Почему в п. (б) запас по фазе уменьшился сильнее, чем в п. (а)?

13.22. С помощью SIMULINK промоделируйте системы из примеров 13.12, 13.13, 13.14 и 13.15 и проверьте полученные переходные функции.

13.23. В системе управления положением пера плоттера из задачи 13.4 положите $T = 1$ с и $K = 1$. В системе должен быть использован цифровой регулятор, в результате чего характеристическое уравнение будет иметь вид

$$1 + D(z)G(z) = 0.$$

(а) Синтезируйте регулятор с отставанием по фазе, обладающий единичным коэффициентом усиления на нулевой частоте и обеспечивающий запас по фазе в 40° .

(б) Повторите п. (а) для случая регулятора с опережением по фазе.

(в) С помощью MATLAB постройте частотные характеристики замкнутых систем из пп. (а) и (б).

(г) С помощью MATLAB вычислите переходные функции скорректированных систем и сравните времена нарастания.

(д) Повторите п. (г), воспользовавшись программой SIMULINK.

13.24. На рис. 13.24 (3) изображена структурная схема следящей системы управления одним из звеньев руки робота (эта система была описана в разделе 2.12).

(а) Убедитесь, что объект имеет передаточную функцию

$$G_P(s) = \frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0,475}{s(s+1)(s+10)}.$$

(б) С помощью компьютера определите импульсную передаточную функцию $G(z)$, считая $T = 0,25$ с.

(в) С помощью MATLAB постройте диаграмму Бode, соответствующую функции $G(z)$.

(г) По результатам п. (в) определите запасы по модулю и по фазе считая $D(z) = 1$. При этом должен быть учтен коэффициент усиления усилителя мощности.

(д) Синтезируйте регулятор с опережением по фазе, обладающий коэффициентом усиления на нулевой частоте, равным 5, и обеспечивающий запас по фазе в 40° . Подсказка: примите $\omega_{w1} = 3$.

(е) С помощью SIMULINK получите переходную функцию системы и определите значения времени нарастания и относительного перерегулирования.

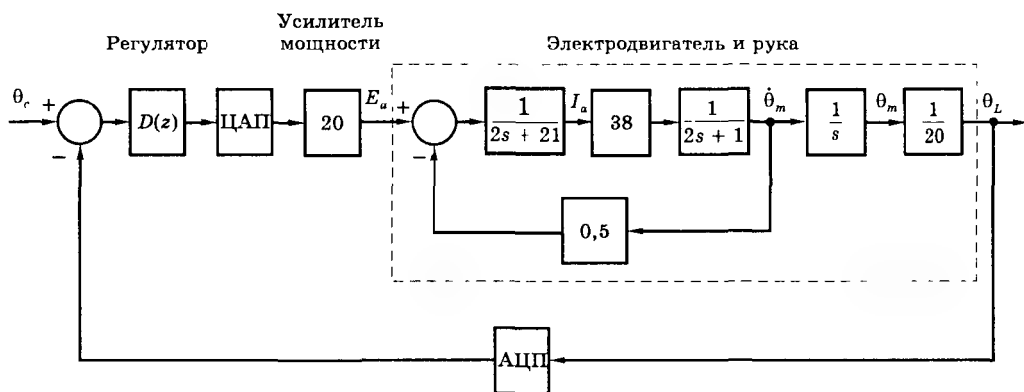


Рис. 13.24 (3)

14. Анализ нелинейных систем

В этой главе мы впервые коснемся методов анализа нелинейных систем. Как было замечено ранее, мы не можем создать точную модель реальной системы. Обычно увеличение точности модели связано с увеличением ее порядка. Однако наступает момент, когда увеличение порядка не вносит существенных улучшений в модель системы. В этих случаях приходится прибегать к учету различных нелинейностей, присущих реальным системам. Поэтому данная глава посвящена рассмотрению некоторых методов анализа систем, модели которых содержат нелинейности.

Во всех предыдущих главах книги мы определяли устойчивость линейных систем управления в смысле «ограниченный вход – ограниченный выход». Это значит, что выход устойчивой линейной системы будет оставаться ограниченным при любом ограниченном входном воздействии и любых ограниченных начальных условиях. Для нелинейных систем подобного сказать нельзя. Некоторые нелинейные системы при одних входных воздействиях могут быть устойчивы, но при других становятся неустойчивыми. Такова особенность окружающего нас мира, поскольку все реальные системы — нелинейны.

Проблема устойчивости нелинейных систем иллюстрируется с помощью рис. 14.1, где представлена простейшая схема общения лектора с аудиторией. Если звуковая энергия от динамиков может достичь микрофона, как показано на рисунке (а это обычно и происходит), то образуется замкнутая система. Если микрофон поместить прямо напротив динамика (возможно, читатель сталкивался с этим на собственном опыте), то петлевой коэффициент усиления значительно возрастает, и возникает проблема устойчивости. Читатель наверняка слышал, что такая система оказывается неустойчивой. Если заслонить рукой микрофон, т.е. уменьшить петлевой коэффициент усиления, то колебания прекратятся. Однако, если увеличить входной сигнал, то система снова станет неустойчивой. Поэтому устойчивость зависит от амплитуды (а, возможно, и частоты) входного сигнала. В линейных стационарных системах такой эффект невозможен. Поэтому описанная выше система, в силу указанных ее свойств, очевидно является нелинейной.

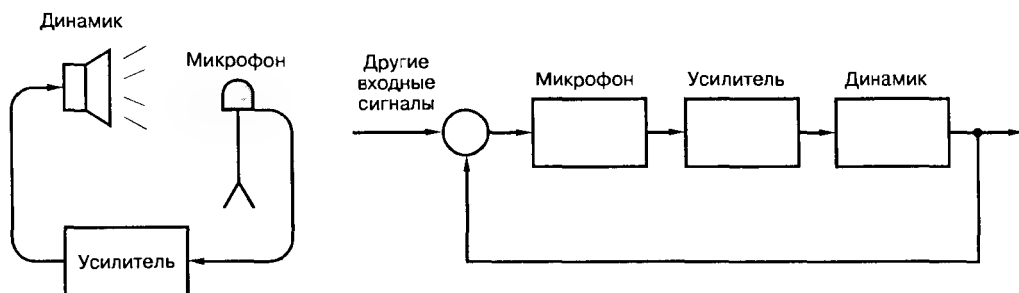


Рис. 14.1. Пример нелинейной системы

Устойчивость линейной стационарной системы мы всегда можем исследовать с помощью критерия Рауса-Гурвица, критерия Найквиста или других методов, рассмотренных в предыдущих главах. В отношении же нелинейных систем эти методы оказываются непригодными. Общих методов анализа устойчивости нелинейных систем не существует. В каждом конкретном случае инженер должен выбирать тот метод, который в наибольшей степени подходит к анализу рассматриваемой системы. В большинстве случаев устойчивость систем высокого порядка, содержащих нелинейности, поддается исследованию только путем имитационного моделирования.

Еще раз подчеркнем, что все реальные физические системы являются нелинейными. Если сигнал, поступающий на вход линейного усилителя (например, в стереосистеме), достаточно велик, то усилитель насыщается и работает в нелинейном режиме. Все системы, которые считаются линейными, являются таковыми лишь в определенном диапазоне сигналов и всегда могут стать нелинейными. Кроме того, некоторые реальные системы изначально являются существенно нелинейными.

К нелинейным системам не применимы методы анализа, представленные в первых тринадцати главах книги. Более того, не существует общих методов анализа нелинейных систем. Разработаны лишь частные методы, каждый из которых не может быть применен к любой из нелинейных систем.

В этой главе прежде всего даются некоторые общепринятые определения нелинейных систем. Далее обсуждаются характерные свойства этих систем, а затем рассматривается один из наиболее известных методов анализа нелинейных систем — метод описывающей функции¹.

Далее в этой главе приводятся еще два метода анализа нелинейных систем. Один из них основан на теоремах Ляпунова и связан с линеаризацией нелинейных систем; здесь особо подчеркиваются ограничения этого метода применительно к анализу устойчивости нелинейных систем. Затем рассматривается метод фазовой плоскости, который на практике применим только к системам второго порядка. Отметим еще раз, что все эти методы используются при анализе *моделей* реальных систем. Достоверность результатов анализа применительно к реальным системам зависит от точности их математических моделей.

14.1. Определения и свойства нелинейных систем

Читатель уже имеет предварительные понятия о линейных и нелинейных системах. Однако, чтобы еще раз внести ясность в этот вопрос, приведем несколько определений [1–3].

Линейная система. *Линейной системой* называется такая система, для которой применим принцип суперпозиции.

Предположим, что $c_1(t)$ есть реакция системы на входной сигнал $r_1(t)$, а $c_2(t)$ — реакция на сигнал $r_2(t)$. Тогда, если система является линейной, ее реакция на сигнал $a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t)$, где a_1 и a_2 — константы, равна $a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t)$.

Нелинейная система. *Нелинейной системой* называется такая система, для которой не применим принцип суперпозиции.

¹ В отечественной литературе этот метод принято называть методом гармонической линеаризации. — Прим. перев.

Приведем некоторые примеры нелинейных систем:

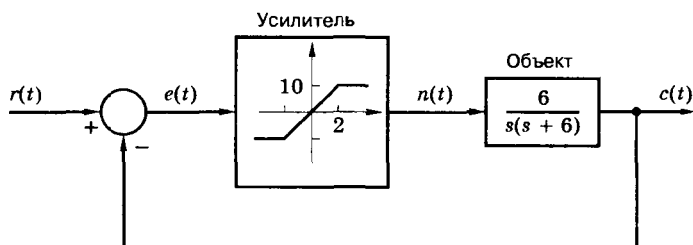
$$\dot{c}(t) + c^2(t) = r(t),$$

$$\dot{c}(t) + \sin[c(t)] = r(t),$$

$$\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2\dot{c}(t)c(t) = r(t).$$

Первое из этих уравнений является нелинейным, потому что оно содержит переменную $c(t)$ в квадрате; второе — потому что содержит функцию (синус) от переменной $c(t)$; третье — потому что в него входит произведение переменной $c(t)$ и ее производной. Другой пример нелинейной системы приведен на рис. 14.2. Эта система линейна за исключением усилителя, который насыщается, если его входной сигнал по модулю превышает 2. Если входной сигнал равен 1, то выходной равен 5; если входной сигнал равен 2, то выходной равен 10. Однако когда входной сигнал равен $1 - 2 = 3$, то вместо $5 + 10 = 15$ на выходе получим только 10. Следовательно, к усилителю принцип суперпозиции не применим.

Рис. 14.2
Нелинейная система



Дадим еще одно определение.

Стационарная система. *Стационарная система* — это система, параметры которой не зависят от времени. В противном случае система является *нестационарной*.

Примером нестационарной системы может служить система, описываемая уравнением

$$\dot{c}(t) + (\cos t)c(t) = r(t).$$

Здесь один из коэффициентов линейного дифференциального уравнения является функцией времени. Заметим, что для решения этого дифференциального уравнения нельзя использовать преобразование Лапласа. Мы не сможем найти преобразование Лапласа для второго члена уравнения, если неизвестно $c(t)$; преобразование Лапласа для произведения двух функций не равно произведению их преобразований.

Вообще говоря, преобразование Лапласа не может быть использовано для решения линейных дифференциальных уравнений с переменными параметрами и нелинейных дифференциальных уравнений любого вида. Нелинейная система, в свою очередь, может быть как стационарной, так и нестационарной. Описание объекта на рис. 14.2 передаточной функцией подразумевает то, что он является линейным и стационарным. Действительно, объект описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{c}(t) + 6\dot{c}(t) = 6n(t).$$

Одним из свойств нелинейных систем является то, что их устойчивость может зависеть от входных сигналов и (или) от начальных условий. Например, некоторая нелинейная система может быть устойчивой при входном сигнале $r_1(t)$, но неустойчивой при входном сигнале $r_2(t)$. Мы не будем здесь пытаться дать определение устойчивости нелинейных систем (существуют различные определения), а ограничимся лишь интуитивным

представлением об устойчивости. Позже, по мере необходимости, мы будем приводить соответствующие определения.

Приведем еще несколько характерных особенностей нелинейных систем.

1. **Предельный цикл.** Периодические незатухающие колебания в нелинейной системе называются предельным циклом. В общем случае предельный цикл не является синусоидальным. В линейной стационарной системе периодические незатухающие колебания являются синусоидальными, а их амплитуда определяется как величиной внешнего воздействия, так и начальными условиями. В нелинейных системах амплитуда незатухающих колебаний не зависит от внешнего воздействия и от начальных условий.
2. **Частота вынужденных колебаний при периодическом входном воздействии.** При подаче на вход нелинейной системы периодического воздействия частота вынужденных колебаний на выходе системы может быть либо субгармоникой, либо гармоникой входного сигнала. Например, если частота входного воздействия равна 10 Гц, то на выходе колебания могут иметь частоту 5 Гц (субгармоника) или 30 Гц (гармоника).
3. **Явление скачкообразного резонанса.** Это явление проиллюстрировано на рис. 14.3, где приведены амплитудно-частотные характеристики линейной и нелинейной системы. Предположим, что на вход нелинейной системы подан синусоидальный сигнал с постоянной амплитудой. Тогда при увеличении частоты входного сигнала, при некотором ее значении может произойти резкий скачок амплитуды выходного сигнала. Если затем уменьшать частоту входного сигнала, то произойдет обратный скачок амплитуды выходного сигнала, но уже при другом значении частоты. Это явление называется *скачкообразным резонансом*.

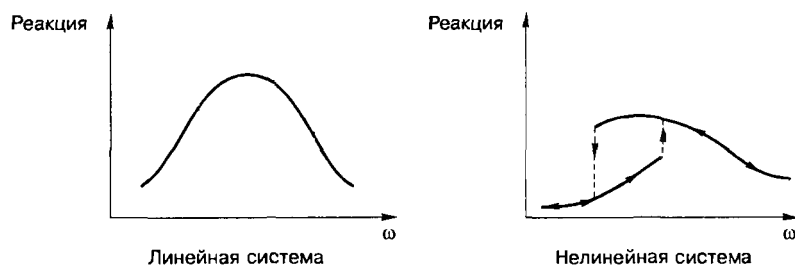


Рис. 14.3. Явление скачкообразного резонанса

4. **Множество состояний равновесия.** В устойчивой линейной системе при отсутствии входного воздействия все переменные состояния с течением времени стремятся к нулю (к началу координат пространства состояний). В устойчивой нелинейной системе могут существовать несколько различных состояний равновесия, отличных от $x = 0$, к которым система стремится с течением времени при отсутствии входного воздействия. К какому именно из этих состояний стремится система — зависит от начальных условий. Это условие эквивалентно тому, что если нелинейную систему вывести из некоторого положения равновесия, она может вернуться в любое из других положений равновесия в зависимости от величины возмущения.

14.2. Обзор критерия Найквиста

Прежде чем приступить к анализу нелинейных систем с помощью описывающей функции, необходимо привести краткий обзор критерия Найквиста. Этот критерий был детально рассмотрен в главе 8 и применение его ограничено только классом линейных систем.

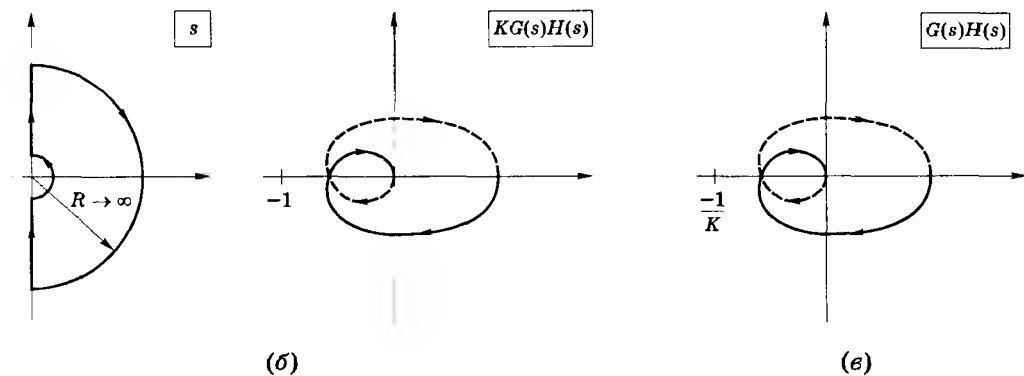
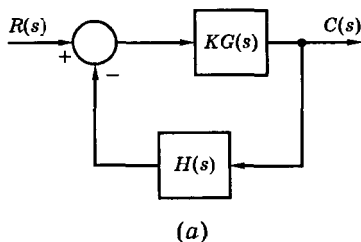


Рис. 14.4. Применение критерия Найквиста

Рассмотрим линейную систему, изображенную на рис. 14.4 (a). Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 - KG(s)H(s) = 0. \quad (14-1)$$

Для применения критерия Найквиста контур Найквиста на s -плоскости отображается на комплексную плоскость с помощью функции $KG(s)H(s)$, как показано на рис. 14.4 (б). Тогда

$$Z = N + P, \quad (14-2)$$

где Z — количество нулей характеристического уравнения (14-1), расположенных внутри контура Найквиста (в правой половине s -плоскости), P — количество полюсов характеристического уравнения внутри контура Найквиста, а N — число охватов по часовой стрелке точки -1 , совершаемых диаграммой Найквиста для функции $KG(s)H(s)$.

Уравнение (14-2) первоначально было получено из рассмотрения диаграммы, соответствующей функции $1 + KG(s)H(s)$ (см. раздел 8.4), где через N было обозначено число охватов начала координат. Уравнение (14-1), левая часть которого содержит данную функцию, можно записать в виде:

$$KG(s)H(s) = -1. \quad (14-3)$$

Тогда, если изображать график функции $KG(s)H(s)$, то N есть число охватов точки -1 . Но мы можем пойти еще дальше. Разделим уравнение (14-3) на K :

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (14-4)$$

и изобразим диаграмму, соответствующую функции $G(s)H(s)$. Тогда N в уравнении (14-2) будет числом охватов точки $-1/K$, как показано на рис. 14.4 (с). Эта модификация критерия Найквиста используется при анализе нелинейных систем с помощью описывающей функции. Конечно, в таком виде критерий Найквиста можно использовать и при анализе линейных систем.

14.3. Описывающая функция

Рассматриваемый в этом разделе метод описывающей функции применим к системам, которые содержат только одну нелинейность. Система данной конфигурации изображена на рис. 14.5. Заметим, что входной сигнал системы равен нулю. Систему, входной сигнал которой равен нулю, мы будем называть *свободной*. Если к тому же она является стационарной, то такую систему называют *автономной*. Хотя на рис. 14.5 через $G(s)$ обозначен объект, в общем случае $G(s)$ может включать в себя также передаточные функции регулятора и датчика.

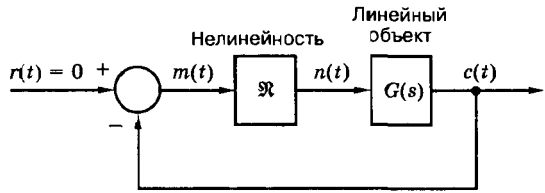


Рис. 14.5. Нелинейная система

Чтобы разработать метод описывающей функции, предположим, что на рис. 14.5 входной сигнал нелинейности является синусоидальным, т.е.

$$m(t) = M \sin \omega t. \quad (14-5)$$

Тогда в установившемся режиме сигнал $n(t)$ будет периодическим, но несинусоидальным. Такой сигнал можно представить в виде ряда Фурье [4]:

$$n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t. \quad (14-6)$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются выражениями:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) \cos k\omega t \, dt, \quad (14-7)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) \sin k\omega t \, dt, \quad (14-8)$$

где T — период входной синусоиды $m(t)$ [$T = 2\pi/\omega$], а t_0 — произвольный момент времени. Мы ограничимся случаем, когда $A_0 = 0$; это справедливо, если нелинейность симметрична относительно амплитуды входного сигнала.

Предположим также, что $G(s)$ соответствует фильтру низких частот, так что $|G(j\omega)|$ имеет малые значения для высших гармоник сигнала $n(t)$ по сравнению с его значением

для основной частоты. Тогда выходной сигнал $c(t)$ можно записать в виде:

$$c(t) = C \sin(\omega t + \theta). \quad (14-9)$$

Это допущение лежит в основе метода описывающей функции. Высшими гармониками в сигнале $n(t)$ тогда можно пренебречь, поскольку они оказывают очень малое влияние на $c(t)$. В результате сигнал $n(t)$ можно аппроксимировать выражением

$$n(t) \approx A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = A_1 \sin(\omega t + 90^\circ) + B_1 \sin \omega t = N_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad (14-10)$$

где, используя тригонометрические тождества или, проще, фазоры [4]:

$$N_1 e^{j\varphi} = B_1 + jA_1. \quad (14-11)$$

Из (14-10) следует, что сигнал $n(t)$ можно аппроксимировать синусоидой той же частоты, что и $m(t)$, но имеющей другую амплитуду и фазу. Поэтому нелинейность можно представить в виде комплексного коэффициента усиления

$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M} = \frac{N_1 e^{j\varphi}}{M}. \quad (14-12)$$

Этот эквивалентный коэффициент усиления называется описывающей функцией и изображается на схемах так, как показано на рис. 14.6. *Описывающая функция $N(M, \omega)$ в общем случае зависит как от амплитуды, так и от частоты входной синусоиды.*

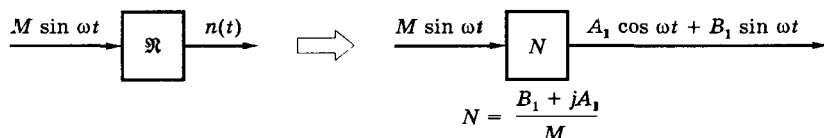


Рис. 14.6. Представление описывающей функции

Отметим два допущения, с которыми связано определение описывающей функции. Эта функция имеет смысл только если:

- 1) входной сигнал нелинейности является синусоидальным;
- 2) линейная система, следующая за нелинейностью, является фильтром низких частот и ослабляет все высшие гармоники настолько, что их влиянием можно пренебречь.

Заметим также, что описывающая функция играет роль эквивалентного коэффициента усиления только при очень жестких ограничениях, отмеченных выше. Однако этот эквивалентный коэффициент *не является* линейным, т.к. его значение зависит от амплитуды входного сигнала.

14.4. Вычисление описывающих функций

Вычислим описывающие функции для некоторых простых нелинейностей. Представленные здесь методы могут быть использованы для вычисления описывающих функций, соответствующих другим нелинейностям.

14.4.1. Нелинейность кубического типа

Рассмотрим сначала нелинейность, которую можно аппроксимировать кубической функцией, так что в системе на рис. 14.5

$$n(t) = m^3(t). \quad (14-13)$$

Входной сигнал нелинейности мы должны считать синусоидальным (согласно допущению 1):

$$m(t) = M \sin \omega t. \quad (14-14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} n(t) &= M^3 \sin^3 \omega t = M^3 \sin \omega t \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \\ &= \frac{M^3}{2} (\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 3\omega t) = \frac{M^3}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t), \end{aligned} \quad (14-15)$$

поскольку

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (14-16)$$

и

$$\sin \omega t \cos 2\omega t = \frac{1}{2} [\sin(\omega t - 2\omega t) + \sin(\omega t + 2\omega t)]. \quad (14-17)$$

Таким образом, в (14-15) можно пренебречь третьей гармоникой (согласно допущению 2) и записать:

$$n(t) = \frac{3M^3}{4} \sin \omega t = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t.$$

Поэтому для данной нелинейности описывающая функция согласно (14-12) имеет выражение

$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M} = \frac{3M^3/4 + j0}{M} = \frac{3M^2}{4}. \quad (14-18)$$

Заметим, что это выражение представляет собой эквивалентный коэффициент усиления нелинейности, причем он пропорционален квадрату амплитуды входного сигнала и поэтому сам по себе является нелинейным. Для данной нелинейности разложение выходного сигнала в ряд Фурье [см. (14-15)] было получено достаточно просто; однако в общем случае эта задача является не столь тривиальной.

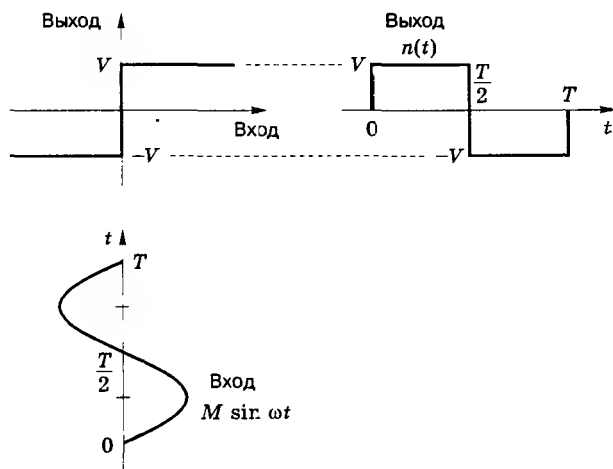
Описывающая функция (14-18) для кубичной нелинейности пропорциональна квадрату амплитуды входного сигнала. Поскольку эта функция играет роль коэффициента усиления, то последний возрастает с увеличением амплитуды сигнала. Предположим, что такая нелинейность появляется в составе линейной системы, для которой актуальна проблема устойчивости при высоких значениях петлевого коэффициента усиления. Тогда есть вероятность, что нелинейная система может стать неустойчивой при большой амплитуде сигнала на входе нелинейности, даже если этот сигнал и не будет синусоидальным.

В общем случае описывающие функции для нелинейностей зависят как от амплитуды, так и от частоты входной синусоиды. Мы подчеркиваем это обозначением $N(M, \omega)$, хотя в рассмотренном выше примере зависимость от частоты отсутствует. Далее мы рассмотрим еще два примера вычисления описывающей функции.

14.4.2. Идеальное реле

Сначала рассмотрим *идеальную релейную характеристику*, изображенную на рис. 14.7. Из рисунка видно, что при синусоидальном входном сигнале на выходе имеют место прямо-

Рис. 14.7
Идеальная релейная характеристика



угольные колебания. Поскольку выход является нечетной функцией, то A_1 в (14-10) равняется нулю [4], и

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^T n(t) \sin \omega t dt = \frac{4V}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{4V}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{T/2}. \quad (14-19)$$

Поскольку $\omega = 2\pi/T$ и

$$\omega t|_{t=T/2} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{T}{2} \right) = \pi,$$

то

$$B_1 = \frac{2V}{\pi} (-\cos \pi + 1) = \frac{4V}{\pi}. \quad (14-20)$$

Таким образом, описывающая функция для идеального реле равна

$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M} = \frac{4V}{\pi M}. \quad (14-21)$$

При сформулированных выше допущениях нелинейность может быть заменена эквивалентным коэффициентом усиления (14-21), как показано на рис. 14.8. Заметим, что этот коэффициент обратно пропорционален амплитуде входной синусоиды и уменьшается с ростом амплитуды M . Это очевидно из самого вида нелинейности, т.к. с возрастанием амплитуды входного сигнала амплитуда выходного сигнала остается постоянной.

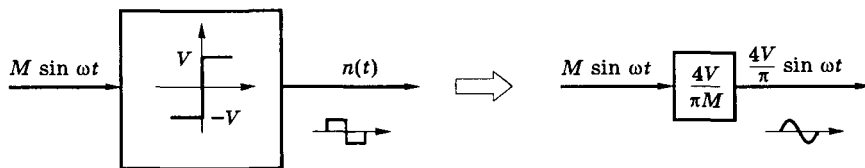
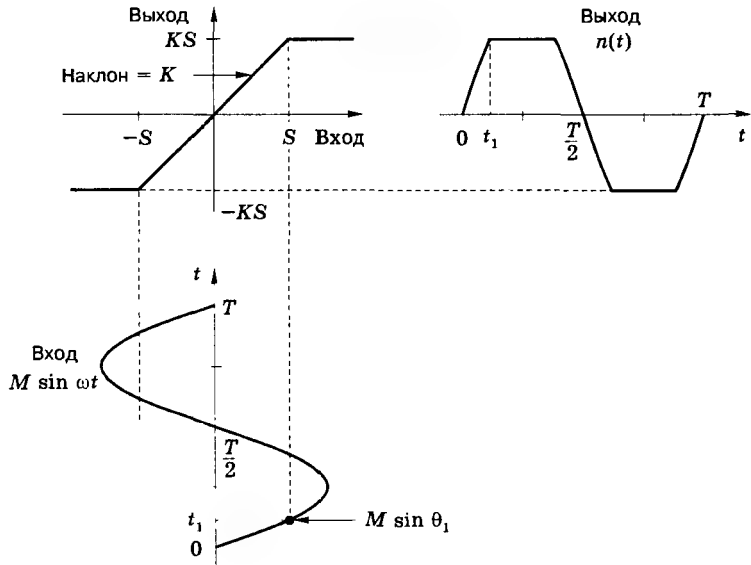


Рис. 14.8. Описывающая функция идеального реле

14.4.3. Элемент с ограничением

Рассмотрим теперь характеристику типа *насыщение* (или *ограничение*), изображенную на рис. 14.9. Подобная нелинейность часто появляется в реальных системах. Примерами могут служить электронные усилители с насыщением, механические ограничители в системах с поступательным и вращательным движением, таких как рулевые устройства самолетов и кораблей и т.д. При малых входных сигналах эти устройства работают в линейном режиме. Однако при больших амплитудах входного сигнала наступает насыщение и выходной сигнал имеет вид обрезанной синусоиды, как показано на рис. 14.9.

Рис. 14.9
Характеристика
типа «насыщение»



Для вычисления описывающей функции (см. рис. 14.9) обозначим

$$S = M \sin \theta_1 = M \sin \omega t_1, \quad (14-22)$$

где S — значение входного синусоидального сигнала в момент времени t_1 , когда наступает насыщение, а θ_1 — фаза синусоиды в момент t_1 . Иначе,

$$\theta_1 = \omega t_1 = \arcsin \frac{S}{M}. \quad (14-23)$$

Выходной сигнал $n(t)$ определяется выражением

$$n(t) = \begin{cases} KM \sin \omega t, & 0 < t \leq t_1, \\ KS, & t_1 < t \leq \frac{T}{4}. \end{cases} \quad (14-24)$$

Так как $n(t)$ есть нечетная функция, то в выражении (14-10) $A_1 = 0$. Кроме того, каждая полу-волна сигнала $n(t)$ обладает симметрией относительно четверти периода. Поэтому

$$B_1 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} n(t) \sin \omega t dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} n(t) \sin \omega t dt. \quad (14-25)$$

Из (14-24) и (14-25) имеем:

$$B_1 = \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_1} KM \sin^2 \omega t dt + \int_{t_1}^{T/4} KS \sin \omega t dt \right] = \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_1} KM \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt + \int_{t_1}^{T/4} KS \sin \omega t dt \right] =$$

$$= \frac{8}{T} \left[KM \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right) \right]_0^{t_1} - \frac{KS}{\omega} \cos \omega t \Big|_{t_1}^{T/4}. \quad (14-26)$$

Далее, поскольку

$$\omega t|_{t_1} = \theta_1, \quad \omega t|_{T/4} = \frac{\pi}{2}, \quad (14-27)$$

то (14-26) приводится к виду:

$$B_1 = \frac{8}{T\omega} \left[KM \left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta_1 \right) + KS \cos \theta_1 \right] =$$

$$= \frac{8}{T\omega} \left[\frac{KM\theta_1}{2} - \frac{KM}{4} (2 \sin \theta_1 \cos \theta_1) + K (M \sin \theta_1) \cos \theta_1 \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{KM\theta_1}{2} + \frac{1}{2} KM \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right] = \frac{2}{\pi} [KM\theta_1 + KS \cos \theta_1]. \quad (14-28)$$

Выражение (14-28) применимо только при $M > S$, т.к. при $M \leq S$ насыщение отсутствует и элемент работает в линейном режиме. В последнем случае коэффициент усиления для синусоидального входного сигнала (как, впрочем, и для сигнала иной формы) равен K .

Для характеристики типа «насыщение» согласно (14-12) и (14-28) описывающая функция принимает вид:

$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M} = \frac{2K}{\pi} \left[\theta_1 + \frac{S}{M} \cos \theta_1 \right]. \quad (14-29)$$

Полное выражение описывающей функции для данной нелинейности таково:

$$N(M, \omega) = \begin{cases} \frac{2K}{\pi} \left[\theta_1 + \frac{S}{M} \cos \theta_1 \right], & M > S, \\ K, & M \leq S. \end{cases} \quad (14-30)$$

Еще раз заметим, что для линейной характеристики описывающая функция просто равна соответствующему коэффициенту усиления.

14.4.4. Таблица описывающих функций

Описывающие функции для наиболее распространенных нелинейностей приведены в таблице 14.1. Для однозначных нелинейностей эти функции являются вещественными, т.к. они не приводят к появлению фазового сдвига синусоидального сигнала. В случае неоднозначных нелинейностей прохождение через них синусоидального сигнала сопровождается фазовым сдвигом, поэтому для них описывающие функции, приведенные в таблице 14.1, являются комплексными.

Таблица 14.1. Описывающие функции: $N_s(x) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \left(\arcsin \frac{1}{x} \right) \right]$

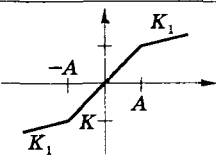
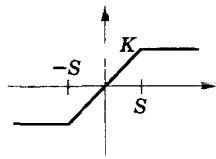
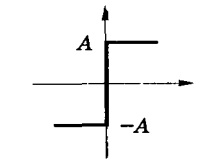
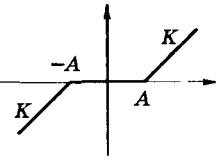
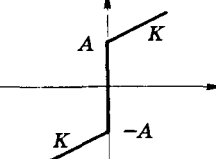
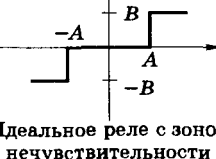
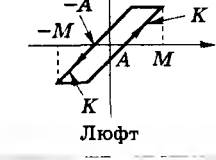
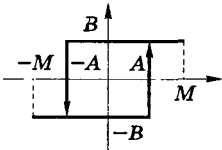
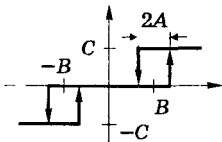
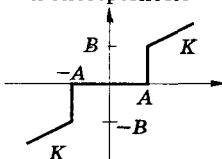
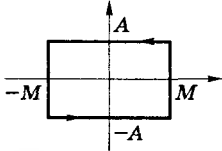
Нелинейность	$N(M, \omega)$
	$K, \quad M \leq A$ $K_1 + (K - K_1)N_s\left(\frac{M}{A}\right), \quad M > A$
	$K, \quad M \leq S$ $KN_s\left(\frac{M}{S}\right), \quad M > S$
Ограничение	
	$\frac{4A}{\pi M}$
Идеальное реле	
	$0, \quad M \leq A$ $K \left[1 - N_s\left(\frac{M}{A}\right) \right], \quad M > A$
Зона нечувствительности	
	$K + \frac{4A}{\pi M}$
	$0, \quad M \leq A$ $\frac{4B}{\pi M} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{M}\right)^2}, \quad M > A$
Идеальное реле с зоной нечувствительности	
	$0, \quad M \leq A$ $\frac{K}{2} \left[1 - N_s\left(\frac{M/A}{2 - M/A}\right) \right] - j \frac{4KA(M - A)}{\pi M^2}, \quad M > A$
Люфт	

Таблица 14.1 (продолжение)

Нелинейность	$N(M, \omega)$	
 Гистерезис	$0,$	$M \leq A$
	$\frac{4B}{\pi M} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{M}\right)^2} - j \frac{4AB}{\pi M^2},$	$M > A$
 Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом	$0,$	$M \leq A + B$
	$\frac{2C}{\pi M} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{M}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{B+A}{M}\right)^2} \right] - j \frac{4AC}{\pi M^2},$	$M > A + B$
	$0,$	$M \leq A$
	$K \left[1 - N_s\left(\frac{M}{A}\right) \right] + \frac{4B}{\pi M} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{M}\right)^2},$	$M > A$
	$0 - j \frac{4A}{\pi M}$	

Чтобы упростить использование некоторых описывающих функций из таблицы 14.1, был выделен член, являющийся общим для многих из них — $N_s(x)$, и в таблицу 14.2 сведены результаты соответствующих вычислений. Функция $N_s(x)$ определяется выражением:

$$N_s(x) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \left(\arcsin \frac{1}{x} \right) \right]. \quad (14-31)$$

Это выражение соответствует описывающей функции для насыщения (рис. 14.9) с параметрами $K = 1$ (коэффициент усиления на линейном участке), $S = 1$ (ограничение наступает при амплитуде входного сигнала, равной единице) и $x = M$.

Чтобы еще более облегчить анализ систем с некоторыми нелинейностями, на рис. 14.10 и 14.11, соответственно, приведены графики описывающих функций для идеально-го реле с зоной нечувствительности и для люфта. Заметим, что эти функции изображены в нормированном виде. Кроме того, описывающая функция для люфта является комплексной и указывает на отрицательный фазовый сдвиг, вносимый данной нелинейностью (что, естественно, ухудшает устойчивость системы). Люфт обычно появляется в зубчатых передачах, потому что в них невозможно обеспечить идеальное сцепление. Когда происходит реверсирование направления вращения, прежде чем нагрузка начнет перемещаться в обратном направлении, должен быть ликвидирован зазор (люфт). Это приводит к появлению запаздывания во времени, эквивалентного отрицательному фазовому сдвигу.

Таблица 14.2 Значения функции $N_s(x)$

x	$N_s(x)$	x	$N_s(x)$
1,0	1,000	9,0	0,141
1,5	0,781	9,5	0,134
2,0	0,609	10,0	0,127
2,5	0,495	10,5	0,121
3,0	0,416	11,0	0,116
3,5	0,359	11,5	0,111
4,0	0,315	12,0	0,106
4,5	0,281	12,5	0,102
5,0	0,253	13,0	0,0978
5,5	0,230	14,0	0,0909
6,0	0,211	15,0	0,0848
6,5	0,195	19,0	0,0670
7,0	0,181	25,0	0,0509
7,5	0,169	30,0	0,0424
8,0	0,159	50,0	0,0255
8,5	0,149	100,0	0,0127

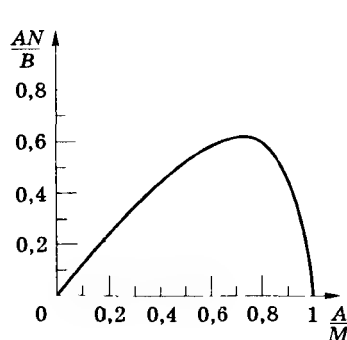


Рис. 14.10. Описывающая функция для реле с зоной нечувствительности

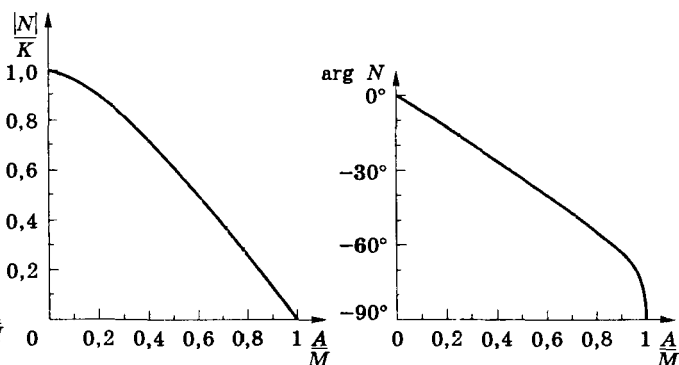


Рис. 14.11. Описывающая функция для люфта

Подводя итоги сказанному выше, напомним, что описывающая функция для нелинейности при синусоидальном входном сигнале $M \sin \omega t$ определяется выражением

$$N(M, \omega) = \frac{B_1 + jA_1}{M}, \quad (14-32)$$

где

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) \sin \omega t \, dt, \quad A_1 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) \cos \omega t \, dt, \quad (14-33)$$

а $n(t)$ — выходной сигнал нелинейности.

14.5. Использование описывающей функции

В этом разделе мы рассмотрим использование описывающей функции в анализе устойчивости нелинейных систем. Напомним основные допущения, сделанные при определении описывающей функции.

1. Входной сигнал нелинейности считается синусоидальным.
2. Передаточная функция линейной части системы, находящейся в замкнутом контуре между входом и выходом нелинейности, соответствует фильтру низких частот, ослабляющему высшие гармоники.

Кроме этих допущений мы также предполагаем, что отсутствуют входные воздействия, т.е. рассматривается реакция системы только на начальные условия.

Рассмотрим нелинейную систему, изображенную на рис. 14.12 (а). Считая, что к ней можно применить метод описывающей функции, перейдем к эквивалентной системе, представленной на рис. 14.12 (б). На этом рисунке $N(M, \omega)$ есть эквивалентный коэффициент усиления, или описывающая функция, нелинейности из рис. 14.12 (а). Пусть

$$N(M, \omega) = |N(M, \omega)| e^{j\varphi(M, \omega)} \quad (14-34)$$

и

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \quad (14-35)$$

Далее исследуем установившиеся гармонические колебания в системе [4]. Выходной сигнал $n(t)$ нелинейности на рис. 14.12 (б) можно представить в виде (см. раздел 4.4):

$$n(t) = |N(M, \omega)| M \sin(\omega t + \varphi), \quad (14-36)$$

и, следовательно, выходной сигнал системы будет равен

$$c(t) = |G(j\omega)| |N(M, \omega)| M \sin(\omega t + \varphi + \theta). \quad (14-37)$$

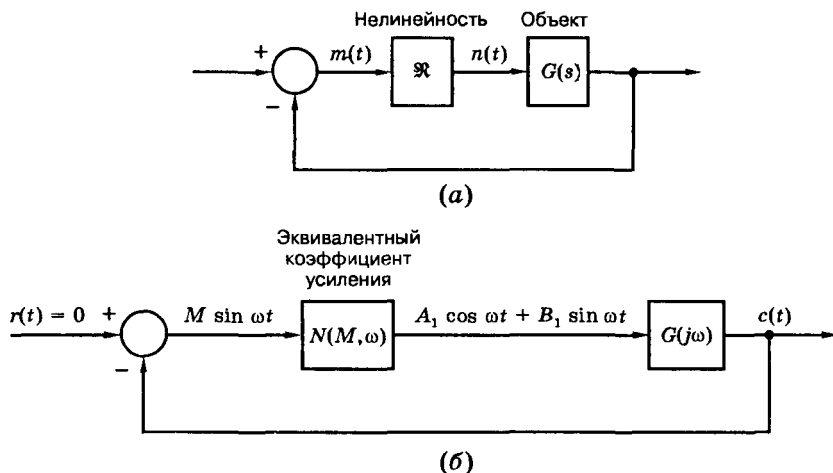
Теперь мы сформулируем основные положения анализа методом описывающей функции.

В нелинейной системе возникает предельный цикл, если входной сигнал нелинейности будет приблизительно синусоидальным и будет полностью восстанавливаться в замкнутом контуре (при петлевом коэффициенте усиления, равном единице).

Таким образом, мы должны определить, существуют ли амплитуда M и частота ω такие, при которых коэффициент усиления разомкнутого контура от входа нелинейности к

Рис. 14.12

К анализу нелинейной системы методом описывающей функции



той же самой точке равен единице при условии, что нелинейность заменена ее описывающей функцией. Иными словами, сигнал $m(t)$ должен быть равен $-c(t)$, и в системе на рис. 14.12 предельный цикл возникнет, если

$$M \sin \omega t = -|G(j\omega)| |N(M, \omega)| M \sin(\omega t + \varphi + \theta). \quad (14-38)$$

Приравнивая в этом выражении фазы синусоид, получим:

$$M = -G(j\omega)N(M, \omega)M,$$

или

$$1 = -G(j\omega)N(M, \omega).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$1 + N(M, \omega) G(j\omega) = 0. \quad (14-39)$$

Если при некоторых значениях M и ω это уравнение удовлетворяется, то можно *предсказать* существование предельного цикла в нелинейной системе. В связи со многими допущениями, принятыми в этом методе анализа нелинейных систем, мы можем только предполагать наличие предельных циклов. Чтобы определить, действительно ли имеет место предельный цикл, необходимо прибегнуть к имитационному моделированию системы. А в действительности существование предельного цикла можно установить только путем натурных испытаний реальной системы.

Обратим внимание на формальное сходство выражения (14-39) с характеристическим уравнением линейной системы с обратной связью. Однако выражение (14-39) применимо только в случае существования предельного цикла в нелинейной системе. Поэтому анализ, основанный на использовании описывающей функции, дает ответ на вопрос только о существовании предельного цикла и не может быть применен в случае сигналов иной формы.

Поскольку $N(M, \omega)$ в общем случае является комплексной функцией, то уравнение (14-39) не поддается непосредственному решению относительно M и ω . Вместо этого прибегают к графоаналитическому методу решения. Уравнение (14-39) можно записать в виде

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(M, \omega)} \quad (14-40)$$

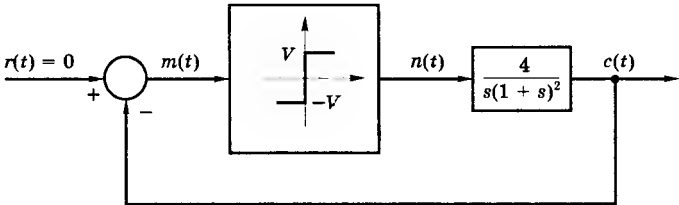
и изобразить обе части этого уравнения на комплексной плоскости. Если при некотором значении ω две кривые пересекаются, то уравнение (14-40) имеет решение, и в нелинейной системе возможно существование предельного цикла. Значения M и ω в точке пересечения соответствуют амплитуде и частоте синусоидального сигнала на входе нелинейности. Заметим, что при построении частотных характеристик линейной части системы используется левая часть уравнения (14-40). Теперь мы проиллюстрируем применение метода описывающей функции несколькими примерами.

Пример 14.1

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 14.13, в которой нелинейность имеет вид идеального реле (компаратора). В соответствии с таблицей 14.1 правая часть уравнения (14-40) имеет вид:

$$-\frac{1}{N(M, \omega)} = -\frac{\pi M}{4V}.$$

Рис. 14.13
Система
к примеру 14.1



На рис. 14.14 (а) изображен график этой функции при изменении M от 0 до ∞ ; здесь же построен график функции $G(j\omega)$. Заметим, что

$$G(j1) = \frac{4}{j(1+j)^2} = \frac{4}{e^{j90^\circ}(\sqrt{2}e^{j45^\circ})} = -2.$$

Таким образом, на основании (14-40) точки пересечения графиков соответствуют условия

$$-2 = -\frac{\pi M}{4V}, \quad \omega = 1,$$

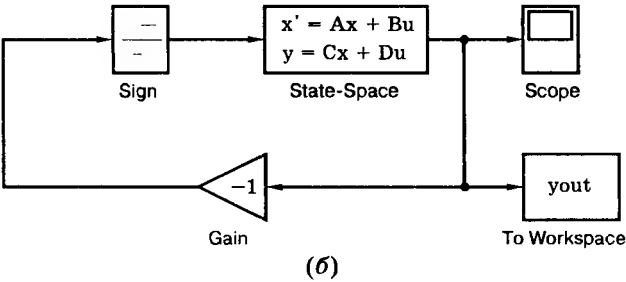
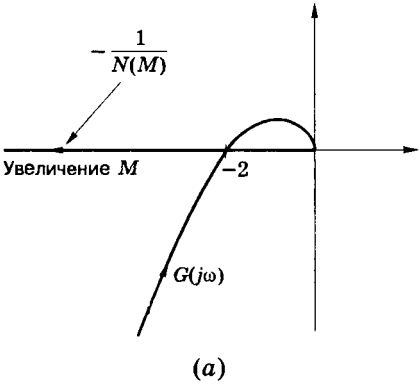
откуда $M = \frac{8V}{\pi}$.

Метод описывающей функции предсказывает существование в данной системе предельного цикла, при котором выходной сигнал определяется выражением

$$c(t) = -m(t) = -M \sin \omega t = -\frac{8V}{\pi} \sin t.$$

Выходной сигнал идеального реле имеет вид прямоугольных колебаний с амплитудой V , как показано на рис. 14.7. Результат данного примера можно проверить с помощью программы SIMULINK. Схема моделирования приведена на рис. 14.14 (б).

Рис. 14.14
а) Применение метода
описывающей функции и
б) схема моделирования
SIMULINK к примеру 14.1



Модель линейной части системы в переменных состояния вычисляется с помощью программы MATLAB:

```
G = tf([0 0 0 4], [1 2 1 0]);
[A, B, C, D] = ss(Gnum, Gden)
```

В программе SIMULINK $V = 1$, поэтому ожидаемая амплитуда предельного цикла $c(t) = 8/\pi = 2,55$, а период колебаний $T = 2\pi/\omega = 6,28$ с. При моделировании был получен предельный цикл с амплитудой приблизительно 2,62 и периодом около 8 с. Таким образом, анализ данной системы с помощью описывающей функции даст достаточно точные результаты.

Пример 14.2

В этом примере, являющемся продолжением предыдущего, мы попробуем определить, применимы ли к данной системе допущения, сделанные в отношении метода описывающей функции.

Как уже было сказано, если существует предельный цикл, то выходной сигнал нелинейности имеет вид прямоугольных колебаний, обладающих полуволевой симметрией. Следовательно, вторая гармоника ($\omega = 2 \text{ с}^{-1}$) отсутствует. Поэтому мы оценим амплитуды первой и третьей гармоник.

Если прямоугольные колебания имеют амплитуду V , то амплитуда первой гармоники равна $4V/\pi$, а третьей — $4V/3\pi$ [4]. Для первой гармоники коэффициент усиления объекта равен 2, как было показано ранее. Для третьей гармоники коэффициент усиления объекта равен

$$|G(j3)| = \left| \frac{4}{j3(1+j3)^2} \right| = \frac{4}{30}.$$

Таким образом, амплитуда первой гармоники на выходе объекта (т.е. на входе нелинейности — см. рис. 14.13) равна $2(4V/\pi)$, или $8V/\pi$, а амплитуда третьей гармоники равна $(4/30)(4V/3\pi) = 8V/45\pi$. Следовательно, амплитуда третьей гармоники на входе нелинейности в 45 раз меньше амплитуды первой гармоники. Поэтому есть все основания пренебречь третьей гармоникой и считать, что метод описывающей функции даст хороший результат.

Пример 14.3

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 14.15, которая является моделью генератора гармонических колебаний, используемого в лабораторных практикумах. Для этой системы в соответствии с таблицей 14.1,

$$N(M, \omega) = KN_s \left(\frac{M}{S} \right) = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{1}{M} + \frac{1}{M} \cos \left(\arcsin \frac{1}{M} \right) \right],$$

при условии $M > 1$. Для $M = 1$ (предельное значение амплитуды, соответствующее линейному режиму) имеем:

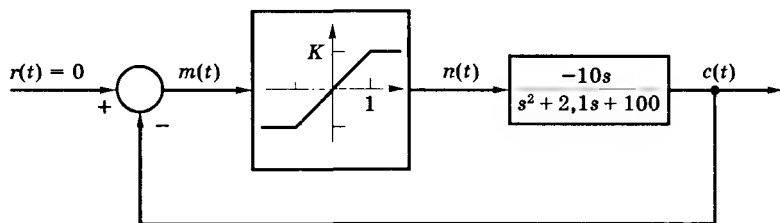
$$N(M, \omega) = \frac{2K}{\pi} [\arcsin 1 + \cos(\arcsin 1)] = K,$$

а для $M \rightarrow \infty$ получим:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} N(M, \omega) = \frac{2K}{\pi} \left(0 + \frac{1}{M} \right) = 0.$$

Рис. 14.15

Система
к примеру 14.3



Эти значения очевидны из табл. 14.2. График функции $-1/N(M, \omega)$ изображен на рис. 14.16 (а). На том же рисунке приведен график функции $G(j\omega)$. Заметим, что

$$G(j10) = \frac{-j100}{-100 + j21 + 100} = -4,76.$$

Следовательно, мы можем предсказать существование предельного цикла, если $1/K < 4,76$, или $K > 0,21$.

Предположим, к примеру, что $K = 0,25$. Точке пересечения графиков $-1/N(M, \omega)$ и $G(j\omega)$ соответствует частота $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. Амплитуду M определим из условия

$$G(j10) = -4,76 = -\frac{1}{N(M, \omega)} = -\frac{1}{KN_s(M/S)},$$

или

$$N_s(M/S) = \frac{1}{4,76K} = \frac{1}{4,76(0,25)} = 0,84.$$

По таблице 14.2 путем линейной интерполяции определяем значение $x = 1,36$, соответствующее $N_s(x) = 0,84$. Поскольку $S = 1$ и $x = M/S$, то $M = 1,36$. Таким образом,

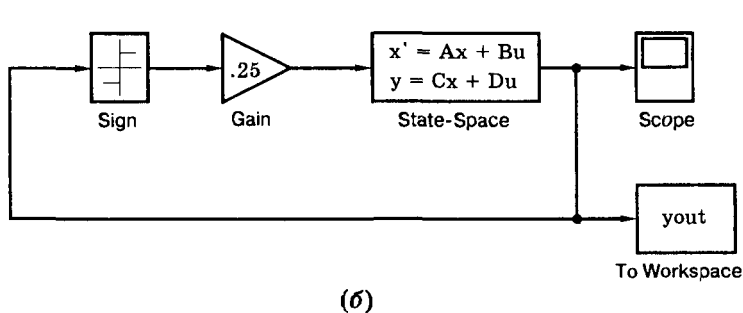
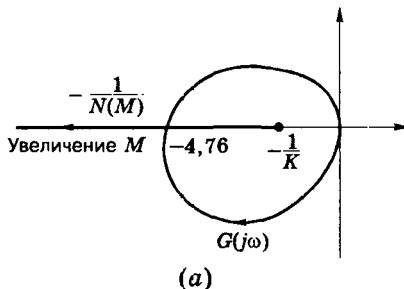
$$m(t) = 1,36 \sin 10t.$$

Заметим, что согласно критерию Найквиста, если система является линейной, то при $K = 0,21$ она находится на границе устойчивости, при $K < 0,21$ она устойчива, а при $K > 0,21$ неустойчива. Поскольку в нашем случае система не может полностью работать в линейном режиме, то если существует предельный цикл, амплитуда колебаний должна быть больше единицы. Результаты данного примера можно проверить с помощью программы SIMULINK, приведенной на рис. 14.16 (б).

При моделировании были получены следующие параметры предельного цикла: амплитуда — приблизительно 1,39 (предсказанное значение — 1,36), период колебаний — около 0,63 с (предсказанное значение — 0,628 с). Таким образом, в данном примере метод описывающей функции дает практически точные результаты.

Рис. 14.16

а) Применение метода описывающей функции и
б) схема моделирования SIMULINK к примеру 14.3



Последний пример необходимо снабдить некоторыми комментариями. На практике любой генератор колебаний является нелинейной системой, в которой имеет место предельный цикл. Поскольку реальная система никогда не является идеальной, то мы не можем разместить полюсы линейной непрерывной системы точно на мнимой оси. Следовательно, невозможно реализовать линейную систему, которая находилась бы на границе устойчивости. Если попытаться это сделать, то выходной сигнал системы будет либо затухать, либо возрастать, т.к. полюсы окажутся слегка смещенными либо в левую, либо в правую полуплоскость. Поэтому система, в которой необходимо получить установившиеся незатухающие колебания, обязательно должна быть нелинейной.

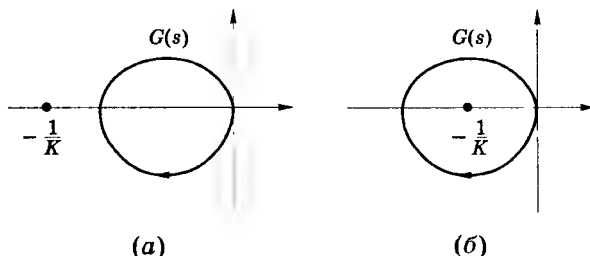
14.6. Устойчивость предельных циклов

В нелинейных системах существуют два типа предельных циклов. В *устойчивом предельном цикле* амплитуда колебаний возвращается к прежнему значению после своего изменения, вызванного тем или иным возмущением. В противном случае предельный цикл называется *неустойчивым*. Если, например, в некоторой нелинейной системе возможен неустойчивый предельный цикл, то при уменьшении амплитуды колебаний за счет какого-либо фактора эти колебания с течением времени затухнут. И наоборот, если амплитуда колебаний увеличится, то она будет неограниченно возрастать или в системе возникнет новый предельный цикл с другой амплитудой и/или другой частотой. При имитационном моделировании неустойчивые предельные циклы с трудом поддаются наблюдению из-за наличия шумов и помех, препятствующих поддержанию незатухающих колебаний.

Устойчивость предельного цикла можно установить с помощью метода описывающей функции. Мы это сделаем, взяв за основу критерий Найквиста. Напомним (см. раздел 14.2), что для линейной системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $KG(s)H(s)$ мы с помощью диаграммы Найквиста можем подсчитать число охватов точки $-1/K$, если построить график функции $G(s)H(s)$. Чтобы это проиллюстрировать, предположим, что в системе на рис. 14.15 нелинейность типа насыщение заменена линейным коэффициентом K . Тогда, если диаграмма Найквиста не охватывает точку $-1/K$, как показано на рис. 14.17 (а), то система является устойчивой. Если же диаграмма Найквиста охватывает точку $-1/K$, как на рис. 14.17 (б), то система является неустойчивой.

Рис. 14.17

Диаграмма Найквиста к примеру



Применим теперь эти рассуждения к нелинейной системе из примера 14.3, изображенной на рис. 14.15. На рис. 14.18 мы повторим анализ этой системы методом описывающей функции. Сначала предположим, что в нелинейной системе существует предельный цикл в некоторой рабочей точке. Далее допустим, что мы можем линеаризовать систему в малой окрестности рабочей точки и применить методы линейной теории. Предположим теперь, что амплитуда M предельного цикла слегка уменьшилась за счет какого-то

возмущения. Как следует из рис. 14.18, при уменьшении M рабочая точка смещается внутрь диаграммы Найквиста и система становится неустойчивой, как показано на рис. 14.17 (б). Следовательно, M будет возрастать, стремясь к прежнему значению (рабочая точка на рис. 14.18).

Теперь предположим, что за счет каких-то факторов амплитуда M немного увеличилась. Тогда рабочая точка выйдет за пределы диаграммы Найквиста, как на рис. 14.17 (а), и система станет устойчивой. Следовательно, M будет уменьшаться, и рабочая точка вернется в первоначальное положение на рис. 14.18. Тем самым мы можем утверждать, что предельный цикл в данной системе является устойчивым. Имитационное моделирование системы подтверждает этот вывод.

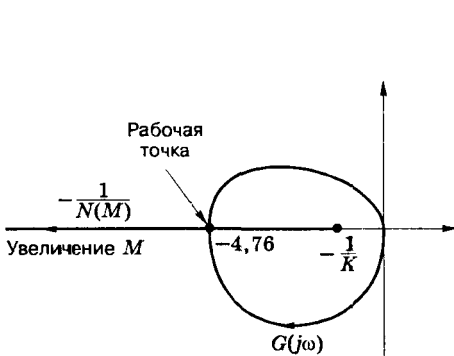


Рис. 14.18. Применение метода описывающей функции к системе, изображенной на рис. 14.15

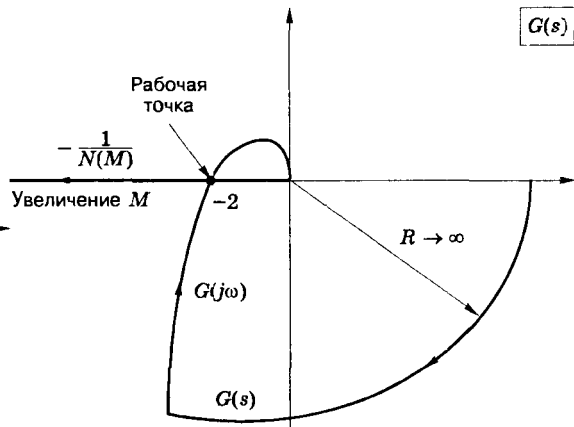


Рис. 14.19. Применение метода описывающей функции к системе, изображенной на рис. 14.13

Рассмотрим теперь систему из примера 14.1, изображенную на рис. 14.13. Анализ этой системы методом описывающей функции воспроизведен на рис. 14.19. Предположим, что в системе существует предельный цикл, соответствующий рабочей точке. В данном случае уменьшение M приводит к тому, что линеаризованная система становится неустойчивой, заставляя амплитуду M вернуться к исходному значению. При увеличении M система становится устойчивой, и амплитуда M также возвращается к исходному значению. Следовательно, предельный цикл является устойчивым. Ниже мы рассмотрим пример неустойчивого предельного цикла.

Пример 14.4

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 14.20. В этой системе нелинейность имеет вид зоны нечувствительности, для которой описывающая функция, согласно таблице 14.1, имеет вид:

$$N(M) = \begin{cases} 0, & M \leq 1, \\ K[1 - N_s(M)], & M > 1. \end{cases}$$

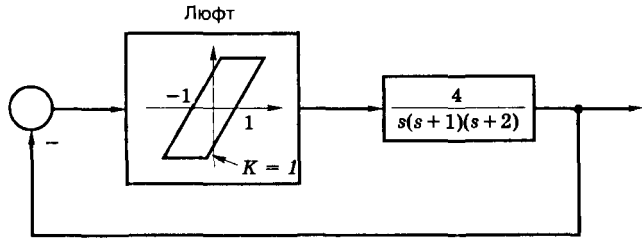
Заметим, что при $M \gg 1$ функция $N(M)$ стремится к значению K . Следовательно, $0 \leq N(M) \leq K$. В случае $K > 0,5$ анализ системы методом описывающей функции проиллюстрирован на рис. 14.21. Допустим, что в системе существует предельный цикл, соответствующий указанной рабочей точке. При увеличении M система становится неустойчивой, и M будет продолжать увеличиваться; напротив, уменьшение M делает систему устойчивой, и M будет и далее уменьшаться. Следовательно, предельный цикл является неустойчивым.

Таблица 14.3. Данные к примеру 14.5

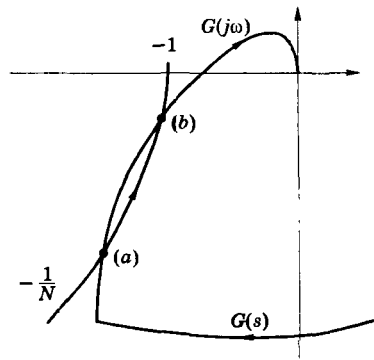
M	$-1/N$	$G(j\omega)$	ω
1,00	∞e^{-j90°	—	—
1,11	$8,33 e^{-j115^\circ}$	$6,31 e^{-j115^\circ}$	0,30
1,25	$4,17 e^{-j124^\circ}$	$4,39 e^{-j124^\circ}$	0,41
1,67	$2,08 e^{-j141^\circ}$	$2,41 e^{-j141^\circ}$	0,65
2,50	$1,43 e^{-j153^\circ}$	$1,68 e^{-j153^\circ}$	0,86
3,75	$1,25 e^{-j162^\circ}$	$1,26 e^{-j162^\circ}$	1,00
5,00	$1,14 e^{-j167^\circ}$	$1,04 e^{-j167^\circ}$	1,12
10,00	$1,04 e^{-j174^\circ}$	$0,83 e^{-j174^\circ}$	1,27

Рис. 14.22

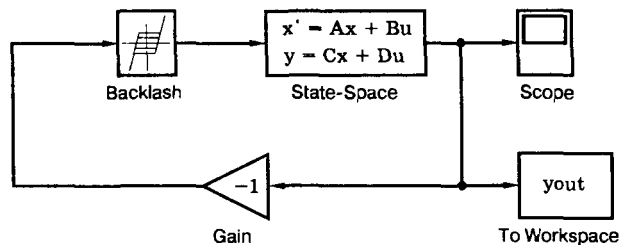
а) Система с люфтом,
б) ее анализ методом
описывающей функции и
в) схема моделирования
к примеру 14.5



(а)



(б)



(в)

Схема моделирования данной системы с помощью программы SIMULINK приведена на рис. 14.22 (е). Читателю полезно самому поэкспериментировать с этой моделью, поскольку она иллюстрирует возможность возникновения устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Могут быть получены следующие результаты:

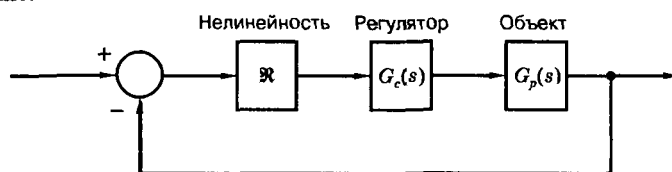
1. При больших начальных условиях возникает устойчивый предельный цикл с амплитудой, приблизительно равной 4, и с периодом около 6,2 с, что с большой точностью соответствует предсказанным значениям.
2. При малых начальных условиях выходная переменная монотонно затухает.
3. При надлежащем задании начальных условий могут возникнуть колебания, либо переходящие в режим, соответствующий п. 1, либо затухающие, как в п. 2.

14.7. Синтез

В данном разделе мы покажем, как с помощью метода описывающей функции можно синтезировать регулятор, исключающий возникновение в нелинейной системе предельного цикла. Регулятор должен быть выбран таким образом, чтобы воспрепятствовать пересечению на комплексной плоскости кривых $-1/N$ (для нелинейного элемента) и $G(j\omega)$ (для оставшейся линейной части системы). С учетом того, что модель реальной системы может оказаться очень неточной, желательно, чтобы кривые $-1/N$ и $G(j\omega)$ были разнесены на достаточно безопасное расстояние.

Рис. 14.23

Нелинейная система



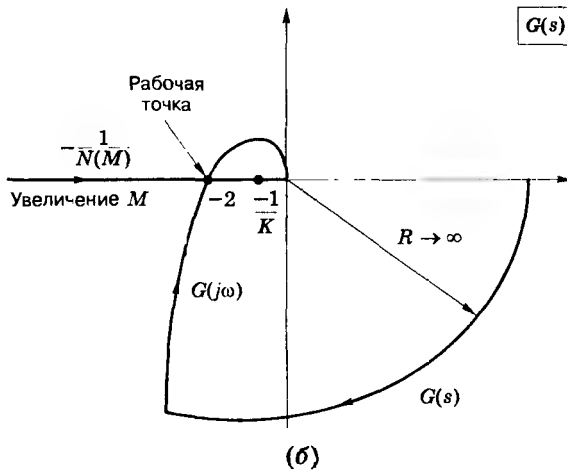
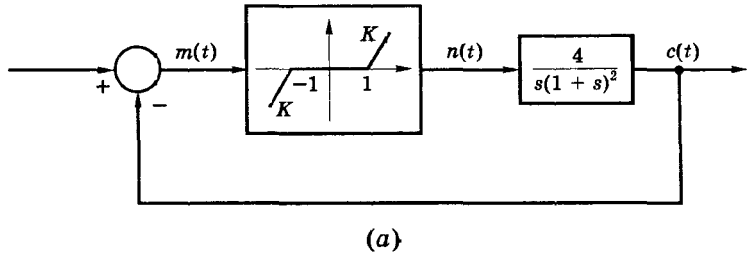
Процедуру синтеза мы рассмотрим на примере системы, изображенной на рис. 14.23. Сравнивая эту конфигурацию с системой на рис. 14.12 (а), можно сделать вывод, что к ней применим метод описывающей функции, если в уравнении (14-40) заменить $G(j\omega)$ на $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$. Следовательно, для системы на рис. 14.23 можно записать:

$$G_c(j\omega)G_p(j\omega) = -\frac{1}{N(M, \omega)}. \quad (14-41)$$

Для пояснения процедуры синтеза рассмотрим систему из примера 14.4, воспроизведя еще раз ее вид на рис. 14.24 (а), а соответствующие кривые $-1/N$ и $G(j\omega)$ — на рис. 14.24 (б). Мы видим, что пересечение кривых $-1/N$ и $G(j\omega)$ можно исключить, используя П-регулятор с коэффициентом усиления $K_p < 1/2K$. Например, чтобы обеспечить запас по модулю в 6 дБ, можно выбрать $K_p = 1/4K$.

Данную процедуру можно распространить и на случай динамических регуляторов. Частотные методы синтеза, рассмотренные в главе 9, непосредственно применимы и к данной системе (рис. 14.24), если критическую точку -1 , с которой мы имели дело в линейных системах, заменить на $-1/K$. Однако по-видимому лучше отнести коэффициент K , являющийся параметром нелинейности, к передаточной функции объекта. При этом параметр нелинейности станет равен единице, передаточная функция объекта примет вид

$$G_p(s) = \frac{4K}{s(s+1)^2},$$

Рис. 14.24Иллюстрация
синтеза регулятора

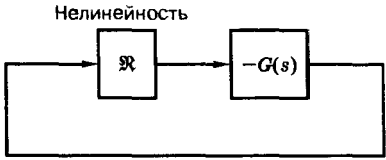
а процедура синтеза будет выполняться относительно точки -1 . При синтезе динамических регуляторов с опережением по фазе или с отставанием по фазе можно воспользоваться точными методами, изложенными в главе 9. Однако следует помнить, что эти методы были разработаны для линейных систем, поэтому результаты, полученные при имитационном моделировании скорректированной нелинейной системы, могут быть очень далеки от поведения реальной физической системы.

Описанную выше процедуру синтеза можно применить и к системам с нелинейностями иного вида, но как и в случае анализа нелинейных систем, не существует каких-то общих алгоритмов синтеза. И, разумеется, упомянутые методы синтеза совершенно неприменимы, если не выполняются основные допущения, принятые при использовании описывающей функции.

14.8. Применение к системам иного вида

Метод описывающей функции был разработан применительно к одноконтурным системам, конфигурация которых имеет вид рис. 14.12. В такой системе входной сигнал $r(t)$ равен нулю, поэтому ее можно представить в виде рис. 14.25. К такому виду можно привести любую систему с одной нелинейностью, если через $-G(s)$ обозначить передаточную функцию всех линейных звеньев между выходом нелинейности и ее входом. Таким образом, метод описывающей функции можно применить к анализу стационарной системы произво-

Рис. 14.25
Общий вид системы с одной нелинейностью



льной структуры, если только нелинейность в ней является единственной, а линейная часть представляет собой фильтр низких частот и ослабляет высшие гармоники, порождаемые нелинейностью. Поясним сказанное простым примером.

Пример 14.16

Рассмотрим систему на рис. 14.26 (а), в которой нелинейность присуща датчику скорости, т.е. она присутствует в цепи обратной связи по скорости. Чтобы определить передаточную функцию между выходом нелинейности и ее входом, удалим нелинейность и найдем связь между $E_0(s)$ и $E_i(s)$ на рис. 14.26 (б):

$$-G(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{-Ks^{-1}}{1 + as^{-1} + Ks^{-2}} = \frac{-Ks}{s^2 + as + K}.$$

После этого система сводится к виду рис. 14.27, и к ней непосредственно применяется метод описывающей функции.

Рис. 14.26
Система нестандартного вида

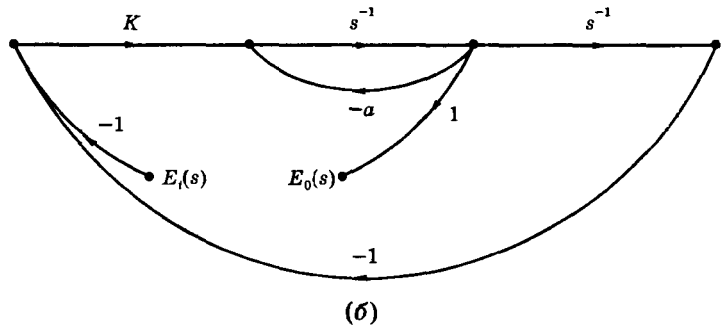
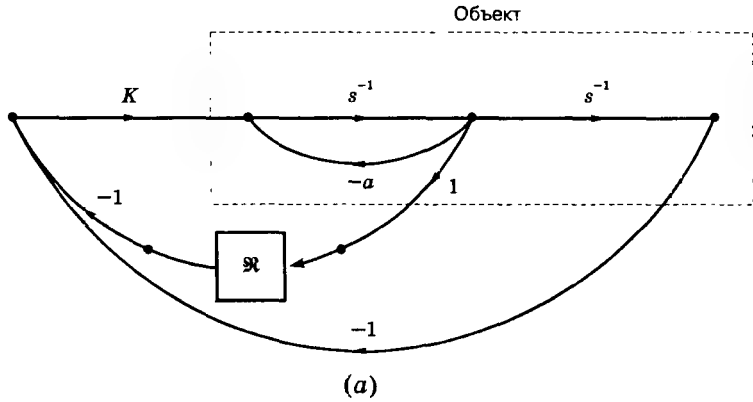
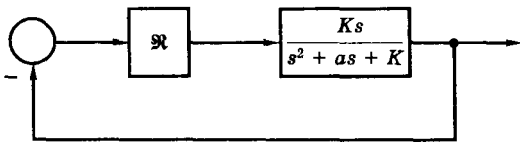


Рис. 14.27
Система, приведенная к стандартному виду



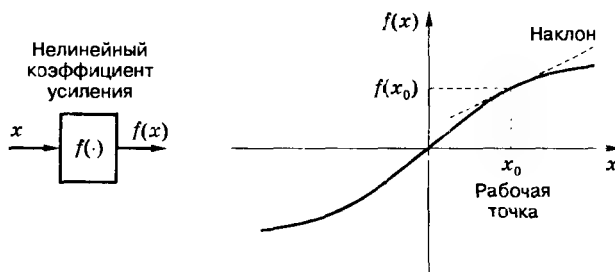
14.9. Линеаризация

Вторым методом анализа нелинейных систем является *линеаризация*. Читатель в прошлом неоднократно прибегал к линеаризации, не отдавая себе в этом отчет. Анализ электронных схем при малых сигналах по сути связан с линеаризацией. Все реальные системы изначально являются нелинейными; поэтому, когда мы используем линейную модель реальной системы, мы прибегаем к линеаризации того или иного вида. К счастью, во многих случаях линейная модель точно отражает свойства реальной системы. Таковы, например, модели электрических цепей, содержащих сопротивления, индуктивности и емкости.

В других случаях линеаризованная модель дает очень плохую аппроксимацию характеристик реальной системы, и тогда при анализе системы необходимо использовать ее нелинейную модель и специальные методы — например, метод описывающей функции. Для некоторых систем вообще невозможно подобрать адекватный метод анализа и единственное, что остается сделать — это прибегнуть к имитационному моделированию. Однако учитывая специфику нелинейных систем, даже если применение какого-то метода анализа является оправданным, полученные результаты по возможности должны быть проверены путем моделирования.

Рис. 14.28

Характеристика нелинейного коэффициента усиления



Для пояснения понятия линеаризации мы рассмотрим характеристику нелинейного коэффициента усиления, изображенную на рис. 14.28. Здесь x есть вход нелинейности, а $f(x)$ — ее выход. Предположим, что рабочая точка на кривой соответствует значению входной переменной x_0 , как показано на рисунке. Тем самым мы полагаем, что x_0 есть установившееся значение входной переменной. Предположим также, что x получает малое приращение Δx , и новое значение входной переменной равно $x = x_0 + \Delta x$. Отношение приращения $f(x)$ к приращению x можно приблизительно оценить как

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad (14-42)$$

или

$$\Delta f(x) \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x. \quad (14-43)$$

Это уравнение является линейным, т.к. производная функции, вычисленная в конкретной точке, есть величина постоянная. Таким образом, мы линеаризовали нелинейную характеристику на рис. 14.28 в окрестности точки x_0 . Точность аппроксимации (14-43) зависит от величины приращения Δx и от кривизны функции $f(x)$ в окрестности рабочей точки.

Теперь дадим более строгое определение процедуры линеаризации. Это определение основано на разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 [5].

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (14-44)$$

Введя обозначение $\Delta x = (x - x_0)$, перепишем это выражение в виде:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (14-45)$$

Сравнение (14-43) и (14-45) показывает, что выражение (14-43) есть просто первый член разложения $f(x)$ в ряд Тейлора. Для того, чтобы (14-43) достаточно хорошо аппроксимировало ряд (14-45), очевидно, члены разложения (14-45), содержащие производные второго и более высокого порядка, должны быть пренебрежимо малы. Иными словами, $f(x)$ должна быть гладкой функцией и (или) приращение Δx должно быть малым.

Далее мы рассмотрим, как можно получить линейную модель для нелинейного дифференциального уравнения, и продемонстрируем это на примере. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}x = u, \quad (14-46)$$

где все переменные следует понимать как функции времени. Сначала составим модель этой системы в переменных состояния. Переменные состояния x_1 и x_2 определяются как

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= \dot{x} = \dot{x}_1, \end{aligned}$$

и в соответствии с (14-46) можно записать:

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2 + u.$$

Тогда (нелинейные) уравнения состояния примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u), \end{aligned} \quad (14-47)$$

где функции f_1 и f_2 определяются этими уравнениями. Мы можем выразить данные уравнения в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}, u) \quad f_2(\mathbf{x}, u)]^T. \quad (14-48)$$

Присутствие нелинейных членов в (14-48) не позволяет записать уравнения состояния в типовом векторно-матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (14-49)$$

как было получено для линейных систем в главе 3.

Уравнение (14-48) представляет собой общую модель нелинейной стационарной системы. Для системы n -го порядка $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}$ представляют собой матрицы размерности $n \times 1$ (векторы с n компонентами), а $\mathbf{u}$ является матрицей размерности $r \times 1$. Пусть $\mathbf{x}^0$ есть рабочая точка нелинейной системы n -го порядка, а $\mathbf{u}^0$ — постоянное значение входа, соответствующее этой точке. Предположим, что появляется возмущение, в результате которого мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}^0 + \delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (14-50)$$

Например, для системы второго порядка с двумя входами

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^0 + \delta u_1 \\ u_2^0 + \delta u_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1^0 + \delta x_1 \\ x_2^0 + \delta x_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда на основании (14-48):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^0 + \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}) \quad (14-51)$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора j -го уравнения системы (14-51), ограничившись только линейными членами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^0 + \delta \dot{x}_j = f_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &+ \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta x_n + \\ &+ \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_r} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta u_r. \end{aligned} \quad (14-52)$$

Поскольку в соответствии с (14-48)

$$\dot{x}_j^0 = f_j(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0), \quad (14-53)$$

то (14-52) принимает вид:

$$\delta \dot{x}_j = \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta x_n + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_r} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \cdot \delta u_r. \quad (14-54)$$

Подобным образом мы можем представить каждое уравнение системы (14-51), и тогда линеаризованные уравнения (14-48) примут вид:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}, \quad (14-55)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \quad (14-56)$$

и

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0}. \quad (14-57)$$

Матрицы (14-56) и (14-57) называются *якобианами*. Заметим, что линеаризованная модель (14-55) теперь имеет стандартную форму (14-49).

Подводя итоги, скажем, что если нелинейные функции в (14-48) могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности точки $(\mathbf{x}^0, u^0)$, то с помощью (14-55), (14-56) и (14-57) производится линеаризация дифференциальных уравнений. Последние будут служить аппроксимацией исходных нелинейных уравнений в окрестности рабочей точки $(\mathbf{x}^0, u^0)$.

Пример 14.7

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}x = u.$$

Уравнения состояния, соответствующие ему, были записаны выше в виде (14-47):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(\mathbf{x}, u), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - x_2 + u = f_2(\mathbf{x}, u).\end{aligned}$$

Тогда согласно (14-56):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0, u^0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2^0 & -x_1^0 - 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0, u^0},$$

а в соответствии с (14-57):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0, u^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если рабочая точка задана в виде вектора $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ x_2^0]^T$, то линеаризованные уравнения состояния таковы:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_1 &= \delta x_2, \\ \delta \dot{x}_2 &= (-x_2^0) \delta x_1 + (-x_1^0 - 1) \delta x_2 + \delta u.\end{aligned}$$

Предположим, к примеру, что рабочая точка задана в виде $\mathbf{x}^0 = [1 \ 0]^T$ и $u^0 = 0$. Тогда линеаризованные уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_1 &= \delta x_2, \\ \delta \dot{x}_2 &= -2\delta x_2 + \delta u.\end{aligned}$$

Заметим, что линейные члены, входящие в нелинейные уравнения, без всяких изменений появляются в линеаризованных уравнениях. Это достаточно очевидно, т.к. если мы будем использовать описанный метод для линеаризации системы линейных уравнений, то следует ожидать получения тех же самых линейных уравнений (см. задачу 14.12).

Когда линеаризации подлежит система нелинейных уравнений, то обычно для удобства вместо записи $\delta \mathbf{x}$ используют $\mathbf{x}$, а вместо δu — u . Тогда линеаризованное уравнение (14-55) записывают как

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (14-58)$$

где под $\mathbf{x}(t)$ подразумевают отклонения переменных состояния от их установившихся значений, а $u(t)$ соответствует отклонениям входных воздействий. То же самое относится ко всем моделям, рассматриваемым в данной книге. Состоянию равновесия реальной системы не обязательно соответствуют нулевые значения всех переменных состояния. Например, при синтезе автопилота для пассажирского лайнера линейная модель (14-58) может быть использована в ситуации, когда рабочей точке соответствует определенная скорость

на определенной высоте. Если любая из этих переменных достаточно сильно изменится, то может претерпеть изменение и линейная модель вида (14-58).

14.10. Состояния равновесия и устойчивость по Ляпунову

В этом разделе мы познакомимся с понятием устойчивости по Ляпунову, но прежде определим термин *состояние равновесия*. Предположим, что мы имеем дело с автономной системой, в которой все переменные состояния постоянны (но не обязательно равны нулю). В этом случае говорят, что система находится в состоянии равновесия. Рассмотрим, к примеру, простой маятник, изображенный на рис. 14.29. Этот маятник может находиться в двух состояниях равновесия — одном при $\theta = \dot{\theta} = 0$ и другом при $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$. Заметим, что в первом случае обе переменные состояния равны нулю, а во втором случае одна из них отлична от нуля. Кроме того, в состоянии равновесия все производные должны равняться нулю, в противном случае некоторые переменные в системе будут изменяться во времени.

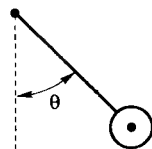


Рис. 14.29
Простой маятник

Если система находится в состоянии равновесия, то ни одна из переменных состояния не изменяется во времени. Поэтому мы можем дать следующее определение состояния равновесия.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (14-59)$$

Система находится в состоянии равновесия $\mathbf{x}_e$, если и только если

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (14-60)$$

Следующий пример иллюстрирует определение состояний равновесия.

Пример 14.8

Найдем состояния равновесия нелинейной системы, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 - x_2. \end{aligned}$$

На основании (14-60):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= x_{2e} = 0, \\ \dot{x}_{2e} &= -x_{1e} - x_{1e}^2 - x_{2e}. \end{aligned}$$

Согласно первому уравнению $x_{2e} = 0$, а из второго уравнения имеем:

$$x_{1e}^2 + x_{1e} = x_{1e}(x_{1e} + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет решения $x_{1e} = 0$ и $x_{1e} = -1$. Следовательно, в системе существуют два состояния равновесия,

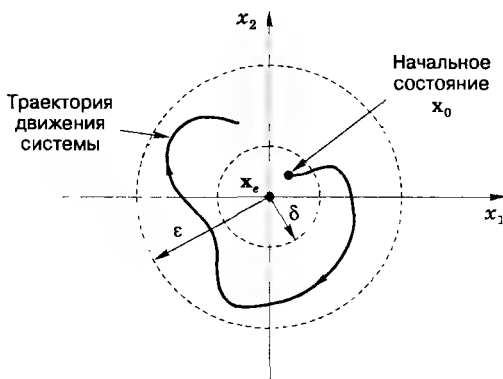
$$\mathbf{x}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_{e2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что уравнение (14-60) удовлетворяется как при $\mathbf{x}_{e1}$, так и при $\mathbf{x}_{e2}$.

Как отмечалось ранее, существуют различные определения устойчивости нелинейных систем, т.к. ни одно из них не подходит под все возможные случаи. Одно из наиболее распространенных определений носит название устойчивости по Ляпунову. Проиллюст-

Рис. 14.30

Иллюстрация устойчивости по Ляпунову



рируем его с помощью рис. 14.30. Если система имеет второй порядок, то мы можем графически изобразить зависимость между переменными x_2 и x_1 (где время играет роль параметра), которая называется *траекторией движения системы* (см. рис. 14.30). Для системы n -го порядка траектория ее движения представляется в n -мерном пространстве состояний. Если система имеет порядок выше третьего, то мы не можем построить траекторию ее движения, но, тем не менее, будем оперировать этим понятием. Теперь дадим определение *устойчивости по Ляпунову* [1].

Устойчивость по Ляпунову. Состояние равновесия x_e автономной динамической системы является устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, причем δ зависит только от ϵ , что $\|x_0 - x_e\| < \delta$ будет приводить к неравенству $\|x(t, x_0) - x_e\| < \epsilon$ для всех $t > t_0$ (x_0 есть начальное состояние системы при $t = t_0$).

В этом определении мы использовали Евклидову норму вектора x , обозначенную $\|x\|$ и вычисляемую как

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Данное определение означает, что если состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, то при начальном состоянии системы, близком к точке равновесия, траектория движения системы будет оставаться в заданной окрестности этой точки. Иначе говоря, если вы зададите нам *любое* значение ϵ , то мы сможем указать вам значение δ такое, что условия определения будут выполнены. Это и продемонстрировано на рис. 14.30.

Теперь мы сформулируем определение неустойчивости по Ляпунову.

Неустойчивость по Ляпунову. Состояние равновесия x_e автономной динамической системы является неустойчивым по Ляпунову, если существует такое ϵ , для которого нельзя найти ни одного δ , при котором удовлетворялись бы условия устойчивости.

Далее приведем определение асимптотической устойчивости.

Асимптотическая устойчивость. Состояние равновесия x_e автономной динамической системы является асимптотически устойчивым, если

- 1) система устойчива по Ляпунову и
- 2) существует такое число $\delta_a > 0$, что любое движение, начавшись в δ_a -окрестности x_e , сходится к x_e при $t \rightarrow \infty$.

Заметим, что линейная система, устойчивая в смысле «ограниченный вход — ограниченный выход», является асимптотически устойчивой, т.к. ее реакция на начальные условия

затухает с течением времени. Если бы на рис. 14.30 траектория движения сходилась к началу координат, то это служило бы иллюстрацией асимптотической устойчивости.

Теперь мы приведем упрощенную формулировку первой теоремы Ляпунова об устойчивости [1].

Теорема. Предположим, что автономная система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ в окрестности точки равновесия $\mathbf{x}_e$ моделируется уравнением $\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}$. Характеристические числа линейной модели (корни характеристического уравнения системы) определяются из условия

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \quad (14-61)$$

Тогда:

- а) Если все характеристические числа имеют отрицательные действительные части, то точка равновесия асимптотически устойчива.
- б) Если хотя бы одно из характеристических чисел имеет положительную действительную часть, то точка равновесия неустойчива.
- в) Если одно или более характеристических чисел имеют нулевую действительную часть, а действительная часть остальных характеристических чисел отрицательна, то по линеаризованной модели *нельзя сделать конкретных выводов* об устойчивости точки равновесия.

Согласно нашим представлениям о линейных системах пп. (а) и (б) этой теоремы не вызывают сомнения. Однако п. (в) выглядит несколько неожиданно. Приводимый ниже пример иллюстрирует первую теорему Ляпунова.

Пример 14.9

Рассмотрим нелинейную систему из предыдущего примера, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 - x_2.\end{aligned}$$

Как было показано в примере 14.8, эта система имеет два состояния равновесия в точках

$$\mathbf{x}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_{e2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_e}.$$

Следовательно, в окрестности точки $\mathbf{x}_{e1}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

и

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s + 1.$$

Характеристические числа являются корнями этого полинома и равны $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Следовательно, состояние $\mathbf{x}_{e1}$ асимптотически устойчиво.

В окрестности точки x_{e2}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

и

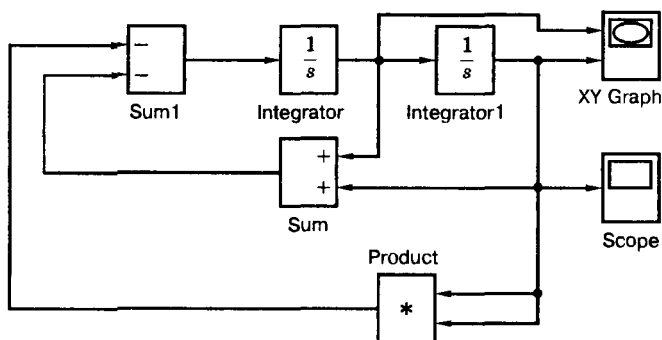
$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s - 1.$$

Следовательно, состояние x_{e2} по критерию Рауса-Гурвица неустойчиво.

Схема моделирования данной системы с помощью SIMULINK изображена на рис. 14.31. Читателю полезно самому поэкспериментировать с этой моделью. Точки равновесия очень хорошо наблюдаются при начальных условиях $[-0,8 \ 0]^T$ и $[-1,2 \ 0]^T$ и при длительности моделирования 5 с. При других начальных условиях можно столкнуться с некоторыми проблемами, возникающими при моделировании нелинейных систем.

Рис. 14.31

Моделирование с помощью SIMULINK системы из примера 14.9



Заметим, что теорема Ляпунова ограничивается исследованием устойчивости в малой окрестности точки равновесия, т.е. она определяет *устойчивость в малом*. Методы исследования устойчивости в большой области пространства состояний, прилегающей к точке равновесия, определяют *устойчивость в большом*. Методы, позволяющие дать ответ об устойчивости системы во всем пространстве состояний, являются методами анализа *глобальной устойчивости*. Критерий Найквиста дает ответ о глобальной устойчивости линейных стационарных систем.

14.11. Анализ систем методом фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости применим к системам второго порядка, и мы рассмотрим его по следующим двум причинам. Во-первых, многие реальные системы можно с достаточной точностью описать моделями второго порядка, и, во-вторых, иллюстрация этого метода конкретными примерами даст читателю представление о некоторых типах движения, возникающего в нелинейных системах.

Данный метод анализа заключается в построении множества разных траекторий движения системы в пространстве состояний с двумя координатами, x_1 и x_2 (называемом фазовой плоскостью). Полученная картина называется фазовым портретом.

Фазовый портрет содержит исчерпывающую информацию о поведении системы при различных начальных условиях. Проиллюстрируем это с помощью нескольких примеров.

Пример 14.10

Знакомство с методом фазовой плоскости мы начнем с рассмотрения линейной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 10x = 0.$$

Модель этой системы в переменных состояния имеет вид:

$$x_1 = x,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -10x_1 - 5x_2.$$

Поскольку характеристическое уравнение системы записывается как

$$s^2 + 5s + 10 = 0,$$

то она недодемпфирована, и ее типичная реакция на начальные условия для переменной $x_1(t)$ выглядит так, как показано на рис. 14.32 (а). Поскольку переменная x_2 является производной от x_1 , то по графику $x_1(t)$ можно определить характер изменения $x_2(t)$. После этого, считая время параметром, на плоскости с координатами x_1 и x_2 изображается траектория движения системы, как показано на рис. 14.32 (б). Построение ряда таких фазовых траекторий, соответствующих типовым начальным условиям, является основой анализа систем методом фазовой плоскости. Заметим, что фазовые траектории можно получить экспериментально с помощью двухкоординатного самописца, если физическую переменную x_1 подать на вход x , а переменную x_2 — на вход y и затем зарегистрировать реакцию системы на начальные условия.

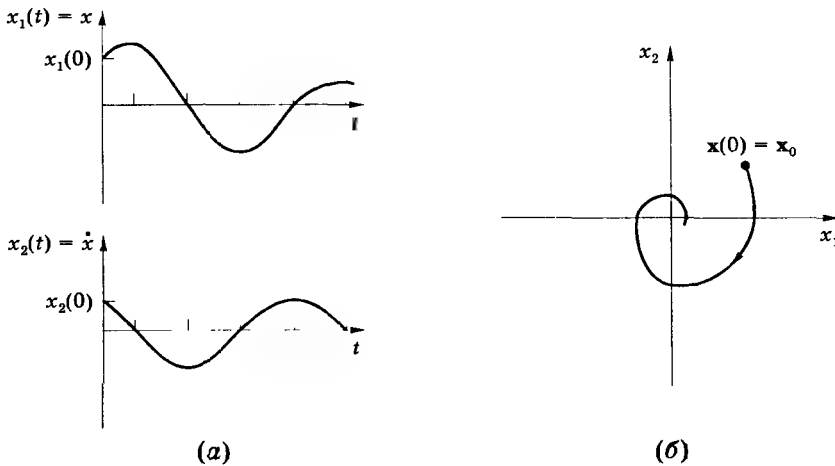


Рис. 14.32. Изображение движения на фазовой плоскости

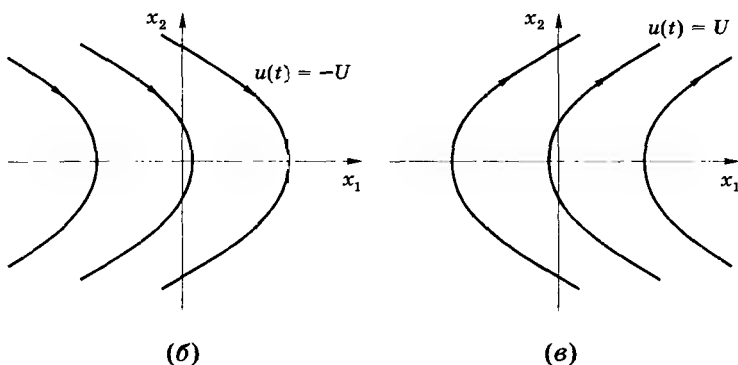
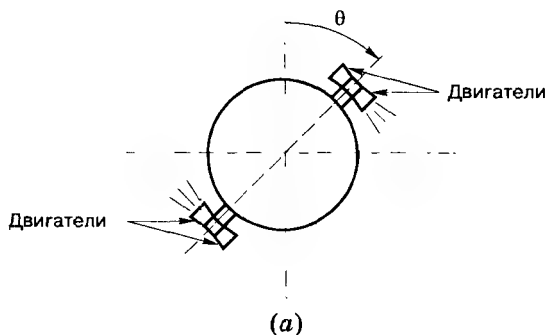
Пример 14.11

Рассмотрим теперь жесткий спутник, изображенный на рис. 14.33 (а). Модель этого спутника была получена в разделе 2.6 и неоднократно использовалась во многих примерах и задачах. Система управления спутником предназначена для поддержания его заданного углового положения θ путем включения двигателей, показанных на рисунке. Модель системы описывается уравнением

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{J} = u,$$

Рис. 14.33

Пример
со спутником



где τ — момент, развиваемый двигателями, J — момент инерции спутника, а u можно рассматривать как нормированный момент. Модель спутника в переменных состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta, \\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{\theta}, \\ \dot{x}_2 &= u = \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Предполагается, что двигатели развивают постоянную тягу, т.е. $u(t) = \pm U$. На рис. 14.33 (a) включению двигателей соответствует уменьшение угла θ , поэтому $u(t) = -U$. Для двух других двигателей $u(t) = U$.

Сначала рассмотрим случай, когда $u(t) = -U$. Мы можем записать:

$$\frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u(t)}{x_2} = -\frac{U}{x_2},$$

или

$$x_2 dx_2 = -U dx_1.$$

Тем самым мы разделили переменные и теперь можем проинтегрировать это уравнение. В результате получим:

$$\frac{x_2^2}{2} = -U x_1 + C_1,$$

где C_1 — аддитивная постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий, т.е.

$$C_1 = U x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}.$$

Таким образом, на плоскости (x_1, x_2) мы получили семейство парабол, изображенное на рис. 14.33 (б). При $u(t) = U$ решение уравнений состояния дает результат

$$\frac{x_2^2}{2} = Ux_1 + C_2,$$

где C_2 также определяется начальными условиями. Типичные траектории для этого случая приведены на рис. 14.33 (в).

Пример 14.12

Теперь мы рассмотрим систему управления спутником из примера 14.11, изображенную на рис. 14.34 (а). Эта система с обратной связью предназначена для поддержания углового положения спутника $\theta = 0^\circ$. Если $\theta \neq 0^\circ$, то соответствующие двигатели включаются, стремясь вернуть угол θ к 0° . Когда $\theta = x_1$ больше 0° то $u(t) = -U$ и действительны траектории, изображенные на рис. 14.33 (б). Если же $x_1 < 0^\circ$, то $u(t) = U$ и действительны траектории, изображенные на рис. 14.33 (в). Заметим, что переключение $u(t)$ происходит при $x_1 = 0$, поэтому линия $x_1 = 0$ (ось x_2) называется *линией переключения*. Типичная траектория движения системы изображена на рис. 14.34 (б), откуда следует, что в ней возникают незагужающие колебания. Фазовый портрет приведен на рис. 14.34 (в). Очевидно, что система управления с такой динамикой является неприемлемой.

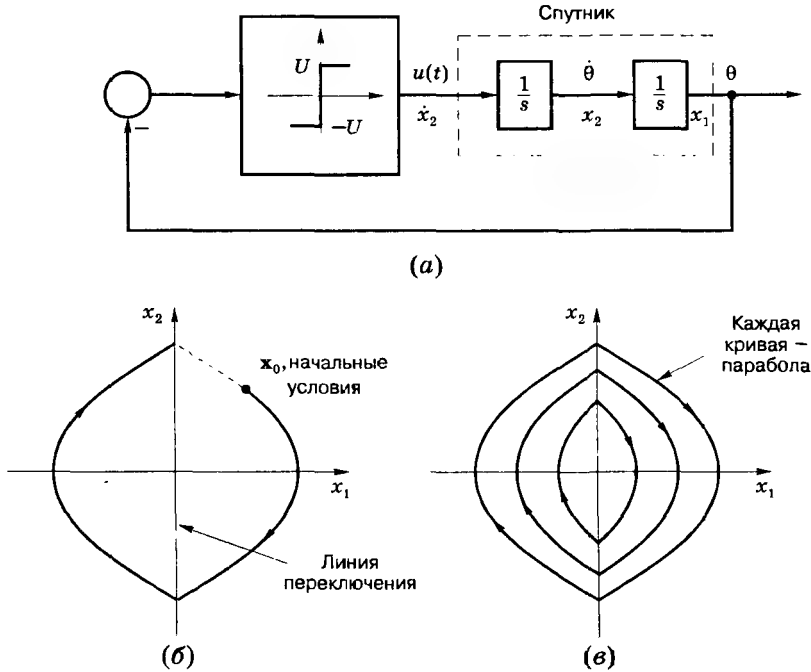
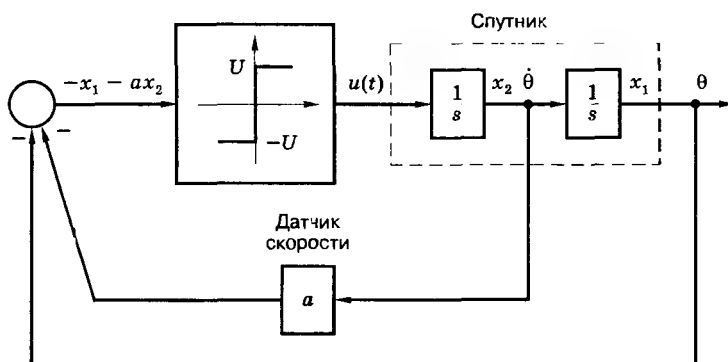


Рис. 14.34. а) Система управления спутником и б, в) ее фазовые траектории

Пример 14.13

В этом примере мы продолжим анализ системы управления положением спутника. В данном случае мы используем обратную связь по скорости, как показано на рис. 14.35. Информацию об угловой скорости спутника содержит выходной сигнал гироскопического датчика с коэффициентом усиления a . Входной сигнал спутника по-прежнему принимает значения $\pm U$, и траектории движения объекта на фазовой плоскости остаются параболлами вида рис. 14.33 (б) и

Рис. 14.35
Система
управления
спутником
с обратной
связью
по скорости



14.33 (с). Однако теперь иначе выглядят условия переключений $u(t)$: они происходят, когда сигнал на входе реле равен нулю, т.е.

$$x_1 + ax_2 = 0.$$

Это уравнение определяет линию переключения — прямую с наклоном $dx_2/dx_1 = -1/a$. Типичная фазовая траектория в данном случае показана на рис. 14.36 (а). Из рисунка видно, что динамика системы значительно улучшилась; причиной этого является введение коррекции с опережением по фазе, аналогичной действию ПД-регулятора, описанного в разделе 7.6. Более того, точка равновесия в начале координат теперь является асимптотически устойчивой.

В системах, содержащих идеальную релейную характеристику, может возникать особый вид движения, называемый «дребезгом». Условия возникновения такого режима работы проиллюстрированы на рис. 14.36 (б). Если наклон линии переключения является малым, то по мере приближения траектории к началу координат она всегда стремится пересечь линию переключения независимо от того, по какую сторону от нее находится. Это приводит к тому, что фазовая траектория «скользит» вдоль линии переключения к началу координат¹.

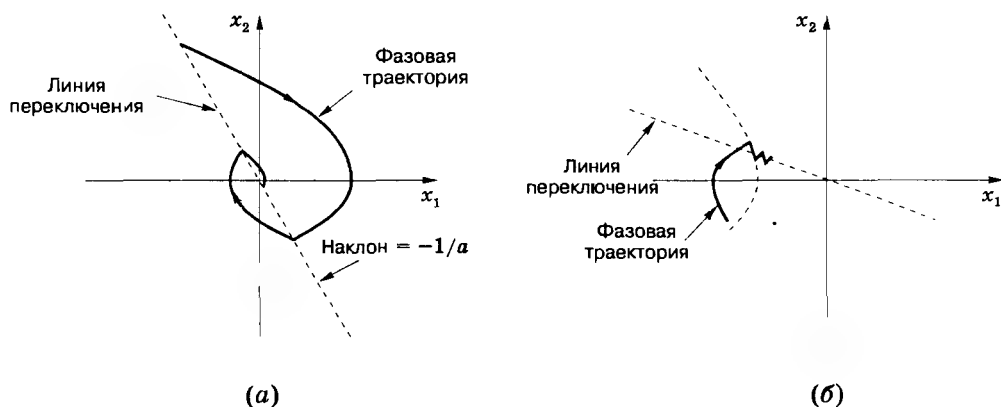


Рис. 14.36. Фазовые траектории системы управления спутником с обратной связью по скорости

В рассмотренных выше примерах было проиллюстрировано применение метода фазовой плоскости для анализа и синтеза нелинейных систем управления. Заметим, однако, что этот метод практически ограничен системами второго порядка.

¹ Это явление известно под названием «скользящий режим» — Прим. перев.

14.12. Фазовые траектории линейных систем

В этом разделе исследуются фазовые траектории линейных систем в окрестности точек равновесия. Результаты исследований могут быть распространены на нелинейные системы, которые поддаются линеаризации методами, рассмотренными в разделе 14.9.

Исследуем линейную автономную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0. \quad (14-62)$$

Эта система имеет характеристическое уравнение

$$s^2 + as + b = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0. \quad (14-63)$$

Решение уравнения (14-62) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет вид

$$y(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (14-64)$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t}. \quad (14-65)$$

В обоих решениях константы k_1 и k_2 определяются начальными условиями в системе. Предположим, что мы представили уравнение (14-62) в виде тождественной модели в переменных состояния. Как обычно, положим $x_1 = y$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y}, \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2. \end{aligned} \quad (14-66)$$

В соответствии с (14-64) и (14-66), при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = k_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (14-67)$$

По этим уравнениям мы можем установить характер движения системы в окрестности точек равновесия на плоскости (x_1, x_2) . Заметим, однако, что согласно (14-66) система имеет только одну точку равновесия, расположенную в начале координат, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Рассмотрим теперь ряд частных случаев.

14.12.1. Случай А

В этом случае λ_1 и λ_2 являются вещественными и имеют один и тот же знак. Предположим сначала, что λ_1 и λ_2 отрицательны. Согласно (14-67) $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с течением времени стремятся к нулю и каждая из этих функций может изменить знак самое большее один раз. Фазовый портрет для этого случая приведен на рис. 14.37 (а). Подобная точка равновесия называется *устойчивым узлом*.

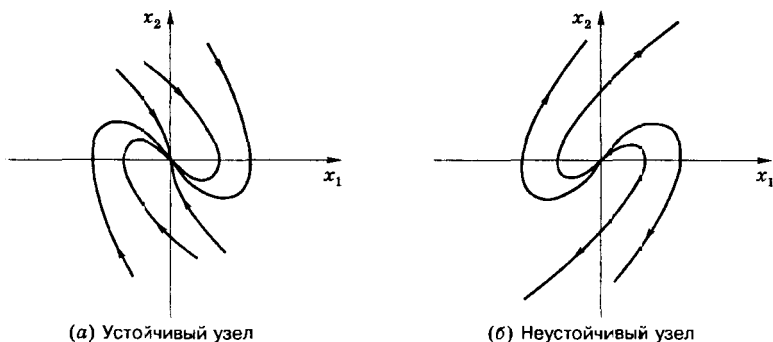
Если λ_1 и λ_2 являются вещественными и положительными, то система неустойчива и фазовый портрет имеет вид рис. 14.37 (б). Точка равновесия в этом случае называется *неустойчивым узлом*.

14.12.2. Случай Б

В этом случае λ_1 и λ_2 являются комплексными с ненулевой действительной частью. Положим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + j\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - j\beta, \end{aligned} \quad (14-68)$$

Рис. 14.37
Фазовый
портрет
для случая
вещественных
 λ_1 и λ_2

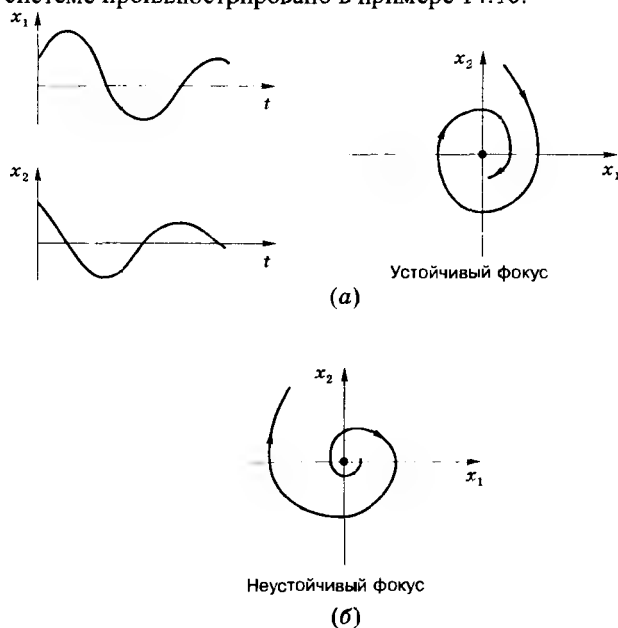


тогда переменные состояния будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= k_3 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta_1), \\x_2(t) &= k_4 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta_2).\end{aligned}\quad (14-69)$$

Если λ_1 и λ_2 имеют отрицательные действительные части, то фазовый портрет выглядит в виде рис. 14.38 (а), а точка равновесия в начале координат называется *устойчивым фокусом*. При положительной действительной части корней λ_1 и λ_2 фазовый портрет имеет вид рис. 14.38 (б), а точка равновесия называется *неустойчивым фокусом*. Возникновение устойчивого фокуса в линейной системе проиллюстрировано в примере 14.10.

Рис. 14.38
Фазовый портрет
для случая комплексных
 λ_1 и λ_2



14.12.3. Случай В

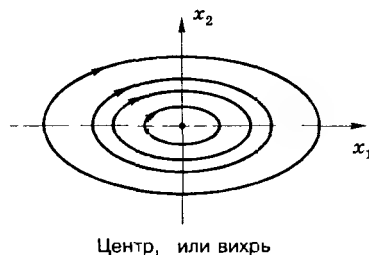
В этом случае λ_1 и λ_2 являются мнимыми, и решение (14-69) принимает вид:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= k_3 \sin(\beta t + \theta_1), \\x_2(t) &= \beta k_3 \cos(\beta t + \theta_1).\end{aligned}\quad (14-70)$$

Фазовые траектории имеют эллиптическую форму, как показано на рис. 14.39, а точка в начале координат называется *центром* или *вихрем*.

Рис. 14.39

Фазовый портрет
для случая мнимых λ_1 и λ_2



14.12.4. Случай Г

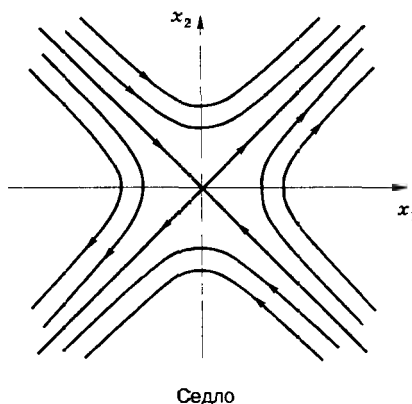
В этом случае λ_1 и λ_2 являются действительными, причем $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$. Согласно (14-67),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_2(t) &= k_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (14-71)$$

За исключением случая, когда $k_1 = 0$, x_1 и x_2 с течением времени неограниченно возрастают. Фазовый портрет изображен на рис. 14.40, а точка равновесия в начале координат называется *седлом*.

Рис. 14.40

Фазовый портрет
для случая действительных λ_1 и λ_2
разного знака



14.13. Заключение

В этой главе был рассмотрен метод описывающей функции, с помощью которого можно предсказать возникновение предельных циклов в нелинейных системах. Поскольку этот метод является приближенным, то полученные результаты будут близки к истине только при выполнении определенных допущений. Во-первых, нелинейная система должна содержать только одну нелинейность. Во-вторых, линейная часть системы должна представлять собой фильтр низких частот, ослабляющий высшие гармоники, возникающие в предельном цикле. И, наконец, этот метод применим только к автономным системам. Все эти условия в известной степени можно отбросить, но тогда анализ системы становится чрезвычайно сложным, что выходит за рамки данной книги.

Далее в главе были изложены математические основы метода линеаризации. Поскольку все реальные системы изначально являются нелинейными, то любую линейную модель надо рассматривать как результат линеаризации исходной нелинейной системы.

Было введено понятие устойчивости по Ляпунову и сформулирована первая теорема Ляпунова об устойчивости. Применение этой теоремы ограничено лишь малой окрестно-

стью точки равновесия; теорема не дает ответа на вопрос об устойчивости системы в других областях.

Изучение материала этой главы должно дать читателю ясное представление о том, что не существует общих методов анализа нелинейных систем. Устойчивость линейной автономной системы мы всегда можем определить, например, с помощью критерия Найквиста. Если же автономная система является нелинейной, то с помощью рассмотренных в главе методов анализа мы можем оказаться не в состоянии ответить на вопрос о ее устойчивости. Для этого придется обратиться к другим методам, но ни один из них не является универсальным. В силу сказанного, для нелинейных систем особую актуальность приобретает проблема имитационного моделирования; что касается систем высокого порядка с более чем одной нелинейностью (обычная ситуация для реальных физических систем), то моделирование является единственным возможным методом определения их характеристик.

Литература

1. J.C.Hsu and A.V.Meyer. *Modern Control Principles and Applications*. New York: McGraw-Hill, 1968.
(Есть русский перевод: Д.Сю, А.Мейер. Современная теория автоматического управления и ее применение. — М.: Машиностроение, 1972.)
2. D.P.Atherton. *Nonlinear Control Engineering*. London: Van Nostrand Reinhold, 1982.
3. N.Minorsky. *Theory of Nonlinear Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1969.
4. J.D.Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
5. C.R.Wylie. *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

Задачи

- 14.1. Определите описывающую функцию для нелинейности, изображенной на рис. 14.1 (З). Для данной нелинейности

$$\text{выход} = \begin{cases} A, & \text{если вход} \geq 0, \\ 0, & \text{если вход} < 0. \end{cases}$$

Постоянную составляющую на выходе нелинейности можно не учитывать.

- 14.2. Определите описывающую функцию для нелинейности, изображенной на рис. 14.2 (З).

- 14.3. (а) Определите описывающую функцию для нелинейности, изображенной на рис. 14.3 (З), а.

- (б) Реализация данной нелинейности приведена на рис. 14.3 (З), б. Покажите, что результат п. (а) согласно табл. 14.1 равен сумме описывающих функций двух блоков.

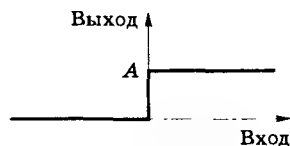


Рис. 14.1 (З)

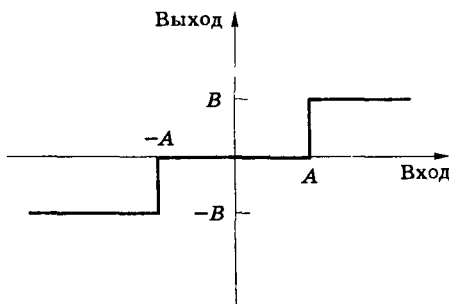


Рис. 14.2 (З)

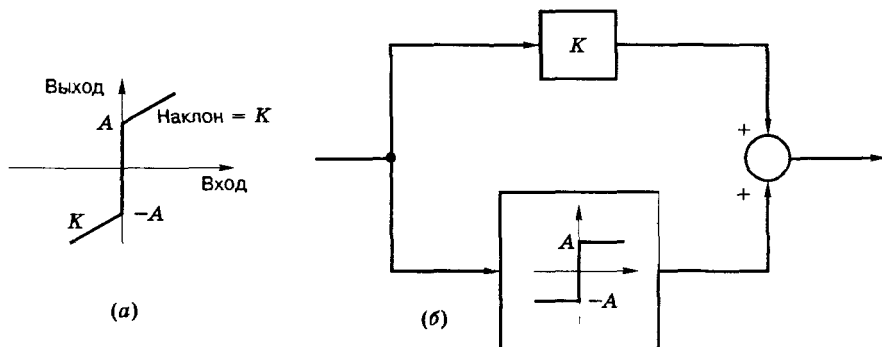


Рис. 14.3 (3)

14.4. Определите описывающую функцию для нелинейности, изображенной на рис. 14.4 (3). Для данной нелинейности

$$\text{Выход} = \begin{cases} 0, & \text{если вход} < 0, \\ K \times (\text{вход}), & \text{если вход} \geq 0. \end{cases}$$



Рис. 14.4 (3)

Постоянную составляющую на выходе нелинейности можно не учитывать.

14.5. На рис. 14.5 (3) изображена система, в которой нелинейность имеет вид идеального реле.

- С помощью метода описывающей функции исследуйте возможность возникновения в данной системе предельного цикла. Если предельный цикл возможен, определите амплитуду и частоту колебаний и исследуйте их устойчивость.
- С помощью SIMULINK проверьте результаты п. (а).

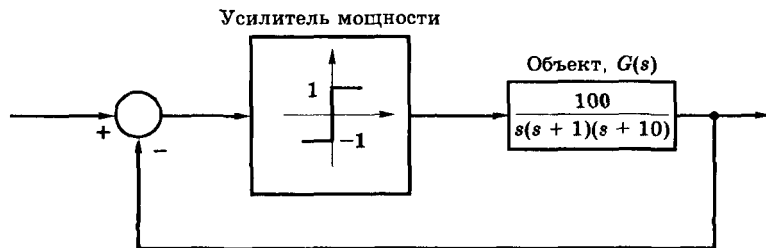


Рис. 14.5 (3)

14.6. Повторите задачу 14.5 для каждой из следующих передаточных функций объекта.

$$(a) \quad G(s) = \frac{(s+1)^2}{2s^3}.$$

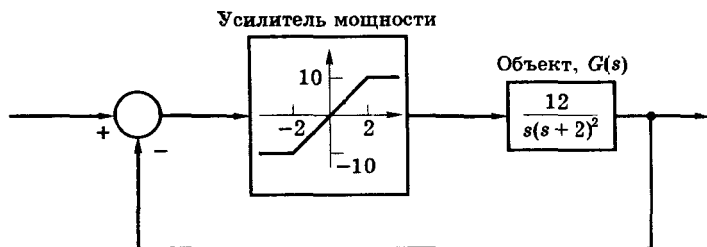
$$(б) \quad G(s) = \frac{2(s+5)^2}{s^2(s+1)}.$$

(в) Проверьте все результаты путем моделирования.

14.7. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 14.7 (3), в которой нелинейный элемент представлен в виде усилителя с насыщением.

- С помощью метода описывающей функции исследуйте возможность возникновения в данной системе предельного цикла. Если предельный цикл возможен, определите амплитуду и частоту колебаний и исследуйте их устойчивость.

Рис. 14.7 (3)



(б) Проверьте результаты п. (а) путем моделирования.

14.8. Повторите задачу 14.7 для каждой из следующих передаточных функций объекта.

(а) $G(s) = \frac{(s+1)^2}{2s^3}$.

(б) $G(s) = \frac{2(s+5)^2}{s^2(s+1)}$.

(в) Проверьте все результаты путем моделирования.

14.9. В задаче 14.5 было получено, что сигнал на входе нелинейности равен $m(t) = 1,16\sin 3,16t$.

(а) Изобразите точную форму сигнала на выходе нелинейности, $n(t)$.

(б) Вычислите компоненту основной частоты на выходе объекта, $c_1(t) = C_1\sin 3,16t$, т.е. найдите амплитуду C_1 .

(в) Вычислите третью гармонику сигнала на выходе объекта, $c_3(t) = C_3\sin[3 \cdot 3,16t + \theta_3]$, т.е. найдите амплитуду C_3 .

14.10. Рассмотрите систему на рис. 14.10 (3). Обратите внимание, что при $K = 1$ и $A = 1$ эта система совпадает с рассмотренной в примере 14.5.

(а) Полагая $K = 0,75$ и $A = 1$, с помощью метода описывающей функции определите возможность существования предельного цикла в данной системе. Если предельный цикл возможен, определите его амплитуду и частоту, а также исследуйте колебания на устойчивость. Для решения задачи воспользуйтесь рис. 14.11 и таблицей 4.3.

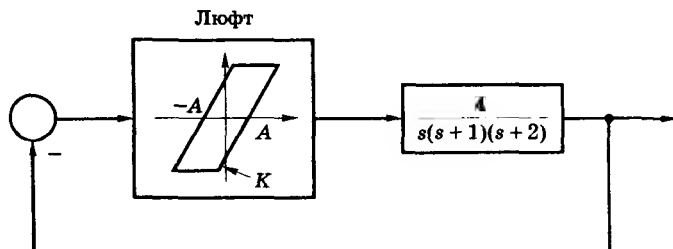
(б) Основываясь на ответе, полученном в п. (а), исследуйте, как повлияет на возможность возникновения предельного цикла уменьшение параметра K нелинейной характеристики.

(в) Полагая $K = 1$ и $A = 1,5$, с помощью метода описывающей функции определите возможность существования предельного цикла в данной системе. Если предельный цикл возможен, определите его амплитуду и частоту, а также исследуйте колебания на устойчивость.

(г) Сделайте общий вывод относительно влияния величины люфта (увеличение параметра A) на возможность возникновения предельного цикла.

(д) С помощью моделирования проверьте параметры устойчивого предельного цикла из п. (в).

Рис. 14.10 (3)



14.11. Путем моделирования проверьте наличие устойчивого и неустойчивого предельных циклов в системе из примера 14.5.

14.12. Используя выражение (14-55), линеаризуйте уравнения состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t).$$

Сравните линеаризованные уравнения с исходными.

14.13. Даны следующие нелинейные уравнения:

$$\dot{x} = (x + 1)y,$$

$$\dot{y} = (y + 1)x,$$

- Найдите все возможные точки равновесия.
- В окрестности каждой точки равновесия получите линеаризованные уравнения состояния.
- Определите устойчивость по Ляпунову каждой точки равновесия.
- Путем моделирования проверьте устойчивость каждой точки равновесия.

14.14. Дано нелинейное уравнение $\ddot{x} + x^2(\ddot{x} - 1) + x = 0$.

- Найдите все точки равновесия.
- В окрестности каждой точки равновесия получите линеаризованные уравнения состояния.
- Определите устойчивость по Ляпунову каждой точки равновесия.

14.15. Дано нелинейное уравнение $\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - 1 = 0$.

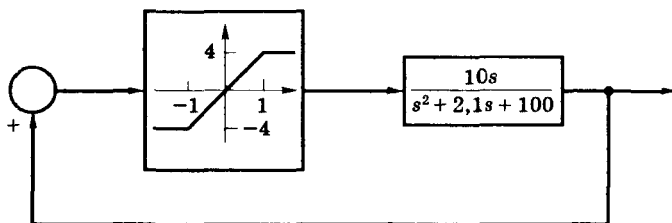
- Найдите все точки равновесия.
- В окрестности каждой точки равновесия получите линеаризованные уравнения состояния.
- Определите устойчивость по Ляпунову каждой точки равновесия.

14.16. Нелинейная система описывается уравнением

$$\ddot{e} + \dot{e}|e| + e - e^2 = 0, \quad |e| = \begin{cases} e, & e \geq 0, \\ -e, & e < 0. \end{cases}$$

- Установите и определите все точки равновесия.
 - Определите устойчивость по Ляпунову каждой точки равновесия.
- 14.17. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 14.17 (3). Обратите внимание — обратная связь является *положительной*. Эта система является моделью электронного генератора гармонических колебаний.
- Укажите положение всех точек равновесия.
 - Определите устойчивость каждой точки равновесия.
 - Путем моделирования проверьте устойчивость каждой точки равновесия.

Рис. 14.17 (3)



Приложение А

Матрицы

В этом приложении содержатся краткие сведения о матрицах и матричных операциях. Читатели, которым необходимы более детальные сведения, могут обратиться к источникам [1] – [5]. В приложении также показано, как могут быть выполнены математические операции с матрицами в среде MATLAB.

Матрицы полезны при записи и решении линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим, к примеру, систему уравнений

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6\end{aligned}\tag{A-1}$$

Эти уравнения можно записать в *векторно-матричной* форме:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.\tag{A-2}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.\tag{A-3}$$

Тогда (A-2) можно записать в компактной форме:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{u}.\tag{A-4}$$

В этом уравнении **A** есть *матрица* размерности 3×3 (3 строки и 3 столбца), **x** есть матрица размерности 3×1 , **u** — также матрица размерности 3×1 . В общем случае матрица имеет размерность $m \times n$ (m строк и n столбцов). Если m или n равно единице, то такую матрицу часто называют *вектором*; таким образом, вектор — это матрица, состоящая либо из одной строки, либо из одного столбца. Если m и n равны единице, то мы имеем дело со скалярной величиной. В предыдущих уравнениях, например, **x** и **u** являются векторами, а, скажем, x_1 — скаляром.

В MATLAB матрица **A** задается одной инструкцией:

$$\mathbf{A} = [2 \ 1 \ 1; \ 1 \ 1 \ -1; \ 2 \ 1 \ 3];$$

В общем случае матрица **A** записывается в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\tag{A-5}$$

где через a_{ij} обозначен элемент, принадлежащий i -й строке и j -му столбцу. Элемент вектора обычно помечается одним индексом, указывающим его принадлежность соответствующей строке (если вектор имеет вид столбца) или столбцу (если вектор имеет вид строки). Примером может служить вектор $\mathbf{x}$ в (А-3).

Теперь приведем несколько полезных определений.

Диагональная матрица. *Диагональной матрицей* называется такая квадратная матрица размерности $(n \times n)$, в которой все элементы $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$; то есть, все элементы матрицы, расположенные не на главной диагонали, равны нулю. Пример диагональной матрицы:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A-6})$$

Единичная матрица. *Единичная матрица* — это такая диагональная матрица, в которой все диагональные элементы равны единице. Единичная матрица обычно обозначается буквой $\mathbf{I}$. Например, единичная матрица размерности (3×3) имеет вид:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A-7})$$

В MATLAB единичную матрицу (3×3) можно задать следующим образом:

`I = eye(3);`

Единичная матрица обладает тем свойством, что если $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, то

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}. \quad (\text{A-8})$$

Если $\mathbf{A}$ имеет размерность $(m \times n)$, то

$$\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}, \quad \mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (\text{A-9})$$

где $\mathbf{I}_r$ — единичная матрица размерности $(r \times r)$. Заметим, что единичная матрица в алгебре матриц имеет тот же смысл, что и число 1 в скалярной алгебре.

Транспонированная матрица. *Транспонированная матрица* получается путем перемены мест строк и столбцов. Например,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A-10})$$

где через $\mathbf{A}^T$ обозначена матрица, полученная транспонированием $\mathbf{A}$. Транспонирование обладает следующим свойством:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (\text{A-11})$$

В MATLAB транспонирование обозначается апострофом, т.е. $\mathbf{A}'$ есть матрица, полученная транспонированием $\mathbf{A}$.

След. *Следом* квадратной матрицы $\mathbf{A}$ (обозначается $\text{tr } \mathbf{A}$) называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}. \quad (\text{A-12})$$

Собственные значения. *Собственные значения* (характеристические числа) квадратной матрицы — это корни уравнения

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0, \quad (\text{A-13})$$

где символом $|\cdot|$ обозначен определитель. Иногда также используют обозначение $\det(\cdot)$.

Собственные векторы. *Собственные векторы* (характеристические векторы) квадратной матрицы $\mathbf{A}$ — это векторы $\mathbf{x}_i$, которые удовлетворяют уравнению

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}_i, \quad (\text{A-14})$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Собственные значения и собственные векторы вычисляются с помощью следующей инструкции MATLAB:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{D}$ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения, а столбцы матрицы $\mathbf{V}$ есть соответствующие собственные векторы.

Свойства квадратной матрицы. Матрица $\mathbf{A}$ размерности $(n \times n)$ обладает следующими свойствами:

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \quad (\text{A-15})$$

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (\text{A-16})$$

Определители. Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обе имеют одинаковую размерность $(n \times n)$, то

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|. \quad (\text{A-17})$$

Определитель вычисляется с помощью инструкции MATLAB

$$d = \det(\mathbf{A}).$$

Минор. *Минор* m_{ij} вычисляется для элемента a_{ij} квадратной матрицы $\mathbf{A}$ как определитель матрицы, получаемой вычеркиванием i -й строки и j -го столбца матрицы $\mathbf{A}$. Например, для матрицы $\mathbf{A}$ из (A-10)

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

Алгебраическое дополнение. *Алгебраическое дополнение* c_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы $\mathbf{A}$ определяется как

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}. \quad (\text{A-18})$$

Для предыдущего примера

$$c_{31} = (-1)^{3+1}(-2) = -2.$$

Присоединенная матрица. *Присоединенная матрица* к квадратной матрице $\mathbf{A}$ получается при замене каждого элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ его алгебраическим дополнением с последующим транспонированием. Присоединенная матрица имеет обозначение $\text{Adj } \mathbf{A}$. Например, для матрицы $\mathbf{A}$ из (A-10)

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A-19})$$

Обратная матрица. Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ ее обратная матрица, обозначаемая $\mathbf{A}^{-1}$, определяется выражением

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{Adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}. \quad (\text{A-20})$$

Инструкция MATLAB для определения обратной матрицы имеет вид:

`Ainv = inv(A).`

Для матрицы $\mathbf{A}$, фигурирующей в наших примерах, $|\mathbf{A}| = 2$ и

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Отметим два свойства обратной матрицы:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}; \quad (\text{A-21})$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A-22})$$

Заметим, что обратная матрица определяется только для квадратной матрицы и существует она только если определитель матрицы отличен от нуля.

А.1. Алгебра матриц

Алгебра матриц должна быть определена таким образом, чтобы алгебраические действия с матричными уравнениями давали те же самые результаты, как и аналогичные действия с линейными алгебраическими уравнениями, на основании которых получена их матричная форма.

Сложение. Чтобы получить сумму двух матриц, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, последние должны иметь одинаковую размерность, и тогда просто необходимо сложить соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} . Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Умножение на скаляр. Произведение скаляра k и матрицы $\mathbf{A}$ — это матрица, получаемая умножением каждого элемента матрицы $\mathbf{A}$ на скаляр k . Например,

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножение векторов. Умножение вектора размерности $(1 \times n)$ (строка) на вектор размерности $(n \times 1)$ (столбец) определяется как

$$[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (\text{A-23})$$

Заметим, что при умножении векторов получается скаляр.

Умножение матриц. Матрица A размерности $(m \times p)$ может быть умножена только на матрицу B размерности $(p \times n)$, т.е. число столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B . Тогда произведение матриц будет иметь размерность $(m \times n)$. Если

$$C = AB,$$

то ij -й элемент матрицы C образуется как векторное произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B . В MATLAB произведение матриц производится по инструкции

$$C = A*B.$$

В качестве примера найдем произведение рассмотренных выше матриц A и A^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/2 & 2 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

А.2. Другие матричные операции

Приведем несколько других важных соотношений. Если A — квадратная матрица и $|A| \neq 0$, то

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}; \quad (A-24)$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad (A-25)$$

Решение векторно-матричного уравнения (А-4)

$$Ax = u$$

имеет вид

$$x = A^{-1}u.$$

В MATLAB эта операция выполняется с помощью инструкции

$$x = \text{inv}(A) * u.$$

Дифференцирование. Производная матрицы получается путем дифференцирования каждого элемента этой матрицы. Пусть, например,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}. \quad (A-26)$$

Интегрирование. Интеграл от матрицы получается путем интегрирования каждого элемента этой матрицы.

Например, для вектора x

$$\int x dt = \begin{bmatrix} \int x_1 dt \\ \int x_2 dt \end{bmatrix}. \quad (\text{A-27})$$

Полезное выражение для определителя. Дана блочная матрица

$$H = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix},$$

в которой D , E , F и G — матрицы размерности $(n \times n)$. Тогда H имеет размерность $(2n \times 2n)$, а ее определитель вычисляется как

$$|H| = |G||D - EG^{-1}F| = |D||G - FD^{-1}E|, \quad (\text{A-28})$$

при условии, что указанные обратные матрицы существуют.

Литература

1. F.R.Gantmacher. *Theory of Matrices*, vols. I and II. New York: Chelsea Publishing Company, 1959.
(Есть русский перевод: Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1969).
2. P.M.DeRusso, R.J.Roy, and C.M.Close. *State Variables for Engineers*. New York: Wiley, 1965.
(Есть русский перевод: Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. — М.: Наука, 1970).
3. K.Ogata. *State Space Analysis of Control Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1967.
4. G.Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Orlando, FL: Academic Press, 1976.
5. G.H Golub and C.F.Loan. *Matrix Computations*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1983.
6. T.E.Fortman. «A Matrix Inversion Identity», *IEEE Trans. Autom. Control*, AC - 15 (October 1970): 599.

Приложение Б

Преобразование Лапласа

В этом приложении приводятся краткие сведения относительно преобразования Лапласа. Мы увидим, что это преобразование очень полезно при получении модели линейной непрерывной стационарной системы в виде передаточной функции. С помощью преобразования Лапласа можно также определить временные характеристики систем данного типа; однако для этой цели чаще всего используется метод имитационного моделирования (т.е. решения уравнений системы на компьютере). Читателям, желающим получить более глубокие знания преобразования Лапласа, в качестве дополнительной литературы рекомендуются источники [1] – [5].

Б.1. Введение

По определению преобразование Лапласа функции времени $f(t)$ равно [1]

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{Б-1})$$

где L есть символ преобразования Лапласа. Заметим, что при интегрировании переменная t (время) исчезает, и преобразование Лапласа представляет собой функцию комплексной переменной s . Обратное преобразование Лапласа определяется выражением

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (\text{Б-2})$$

где L^{-1} есть символ обратного преобразования Лапласа, а $j = \sqrt{-1}$. Величина σ в выражении (Б-2) определяется особенностями функции $F(s)$ [4]. Для нахождения обратного преобразования Лапласа выражение (Б-2) используется редко; вместо этого с помощью (Б-1) преобразования Лапласа для наиболее распространенных функций времени сведены в таблицу, по которой в случае необходимости устанавливается соответствие между оригиналом — функцией $f(t)$ и ее изображением по Лапласу — функцией $F(s)$.

В качестве примера найдем преобразование Лапласа для экспоненты e^{-at} . Согласно (Б-1),

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}; \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0, \quad (\text{Б-3})$$

где через $\operatorname{Re}(\cdot)$ обозначена действительная часть выражения. Разумеется, таблицы преобразований Лапласа были составлены очень давно, и мы не будем приводить другие примеры. Таблица Б.1 содержит преобразования Лапласа для наиболее часто встречающихся функций времени. Более подробная таблица преобразований Лапласа и z -преобразований приведена в приложении В.

Таблица Б.1 Преобразования Лапласа

Тип функции	Функция времени, $f(t)$	Преобразование Лапласа, $F(s)$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1
Единичная ступенчатая функция	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Единичная линейная функция	t	$\frac{1}{s^2}$
Степенная функция	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Экспонента	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Экспонента n -го порядка	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
Синусоида	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
Косинусоида	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
Расходящаяся синусоида	$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
Расходящаяся косинусоида	$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$

Из определения преобразования Лапласа (Б-1) следует, что если $k = \text{const}$, то

$$L[kf(t)] = kL[f(t)] = kF(s) \quad (\text{Б-4})$$

и

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s). \quad (\text{Б-5})$$

Использование этих двух соотношений значительно расширяет применение таблицы Б.1.

Далее мы приведем несколько примеров нахождения прямого и обратного преобразования Лапласа. Сначала, однако, заметим, что вычисление обратного преобразования Лапласа по формуле (Б-2) дает функцию времени, удовлетворяющую условию $f(t) = 0$, $t < 0$ [5]. Следовательно, чтобы соблюсти математическую строгость, мы всегда должны считать, что $f(t) = 0$ при отрицательных значениях t . Кроме того, чтобы упростить обозначения, определим единичную ступенчатую функцию $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{Б-6})$$

Выражение (Б-3) было получено для преобразования Лапласа функции e^{-at} . То же самое выражение мы получим для преобразования Лапласа функции $e^{-at}u(t)$. То есть, для любой функции $f(t)$

$$L[f(t)] = L[f(t)u(t)] = F(s). \quad (\text{Б-7})$$

Пример Б.1

Найдем преобразование Лапласа для функции

$$f(t) = 5u(t) + 3e^{-2t}.$$

Используя таблицу Б.1 и (Б-4), имеем:

$$L[5u(t)] = 5L[u(t)] = \frac{5}{s};$$

$$L[3e^{-2t}] = 3L[e^{-2t}] = \frac{3}{s+2}.$$

Далее, согласно (Б-5):

$$F(s) = L[5u(t) + 3e^{-2t}] = \frac{5}{s} + \frac{3}{s+2}.$$

Этому выражению можно придать иную форму:

$$F(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s+2} = \frac{8s+10}{s(s+2)}.$$

С таким представлением обычно проще оперировать, чем с выражением в виде суммы членов. Полученный результат можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
syms s t
f = 5 + 3*exp(-2*t);
laplace(f, t, s)
```

Этот пример иллюстрирует одно важное обстоятельство. Как сказано выше, мы обычно работаем с преобразованием Лапласа, представляющим собой отношение двух полиномов от переменной s (называемым *дробно-рациональной функцией*). Однако таблица, по которой находится обратное преобразование Лапласа, содержит только функции невысокого порядка. Следовательно, для того чтобы воспользоваться таблицей, необходимо дробно-рациональную функцию представить в виде отдельных членов, которые содержатся в этой таблице. Данная процедура называется *разложением на простые дроби*, простым примером которого является соотношение

$$\frac{c}{(s+a)(s+b)} = \frac{k_1}{s+a} + \frac{k_2}{s+b}.$$

При известных константах a , b и c задача заключается в определении коэффициентов k_1 и k_2 , присутствующих в разложении на простые дроби. Рассмотрим общий метод решения данной задачи.

Пусть задана дробно-рациональная функция общего вида

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad m < n, \quad (\text{Б-8})$$

где через $N(s)$ обозначен полином в числителе, а через $D(s)$ — полином в знаменателе этой функции. Чтобы выполнить разложение на простые дроби, прежде всего надо найти корни знаменателя. Тогда $F(s)$ можно представить в виде:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}. \quad (\text{Б-9})$$

Предположим, что нам необходимо найти коэффициент k_j . Сначала умножим все члены (Б-9) на $(s - p_j)$:

$$(s - p_j)F(s) = \frac{k_1(s - p_j)}{s - p_1} + \dots + k_j + \dots + \frac{k_n(s - p_j)}{s - p_n}. \quad (\text{Б-10})$$

Если теперь положить $s = p_j$, то все члены в правой части равенства обратятся в нуль, кроме j -го члена, поэтому

$$k_j = (s - p_j)F(s)|_{s=p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Б-11})$$

В математике k_j называется *вычетом* функции $F(s)$ в полюсе $s = p_j$.

Если полином в знаменателе функции $F(s)$ имеет кратные корни, то эта функция раскладывается следующим образом:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)^r} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_{21}}{s - p_2} + \frac{k_{22}}{(s - p_2)^2} + \dots + \frac{k_{2r}}{(s - p_2)^r}, \quad (\text{Б-12})$$

откуда видно, что корню кратности r в разложении на простые дроби соответствуют r слагаемых. Коэффициенты при этих членах вычисляются по формуле, которая приводится без доказательства [2]:

$$k_{2j} = \frac{1}{(r-j)!} \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s - p_2)^r F(s)] \Big|_{s=p_2}. \quad (\text{Б-13})$$

Все предыдущие рассуждения применимы в случае как действительных, так и комплексных полюсов. Рассмотрим ситуацию, когда $F(s)$ имеет пару комплексных полюсов. Если обозначить их как $p_1 = a - jb$ и $p_2 = a + jb$, то (Б-9) можно записать в виде:

$$F(s) = \frac{k_1}{s - a + jb} + \frac{k_2}{s - a - jb} + \frac{k_3}{s - p_3} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}. \quad (\text{Б-14})$$

Коэффициенты k_1 и k_2 , как и ранее, находятся по формуле (Б-11). Однако можно показать, что эти коэффициенты будут комплексными. Поэтому, чтобы придать разложению удобную форму для перехода к обратному преобразованию Лапласа, используем следующий прием. Из (Б-11) имеем:

$$\begin{aligned} k_1 &= (s - a + jb)F(s)|_{s=a-jb} = R e^{\theta}; \\ k_2 &= (s - a - jb)F(s)|_{s=a+jb} = R e^{-j\theta} = k_1^*, \end{aligned} \quad (\text{Б-15})$$

где звездочка является признаком комплексно-сопряженного числа. Обозначим через $f_1(t)$ обратное преобразование, соответствующее первым двум членам разложения (Б-14). Тогда по правилу Эйлера [1]:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= R e^{j\theta} e^{(a-jb)t} + R e^{-j\theta} e^{(a+jb)t} = \\ &= 2R e^{at} \left[\frac{e^{j(bt-\theta)} + e^{-j(bt-\theta)}}{2} \right] = 2R e^{at} \cos(bt - \theta). \end{aligned} \quad (\text{Б-16})$$

Таким образом, обратное преобразование Лапласа представляется в удобной форме, а все вычисления являются весьма простыми. Параметры синусоидальных колебаний R и θ определяются формулами (Б-15). Ниже мы рассмотрим три примера вычисления обратного преобразования Лапласа.

Пример Б.2

Найдем обратное преобразование Лапласа для функции

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{(s+1)(s+2)}.$$

Сначала разложим $F(s)$ на простые дроби:

$$F(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 вычислим в соответствии с (Б-11):

$$k_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{5}{s+2} \Big|_{s=-1} = 5;$$

$$k_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{5}{s+1} \Big|_{s=-2} = -5.$$

Тогда разложение на простые дроби принимает вид:

$$\frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2}.$$

Это разложение легко проверить путем приведения к общему знаменателю двух слагаемых в правой части. В результате обратное преобразование Лапласа для $F(s)$ имеет вид:

$$L^{-1}[F(s)] = (5e^{-t} - 5e^{-2t})u(t).$$

Функцию $u(t)$ часто опускают, но мы должны помнить, что обратное преобразование Лапласа отлично от нуля только при положительных значениях t , а при отрицательных t оно должно равняться нулю.

Обратное преобразование Лапласа можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
syms s t
F = 5/((s + 1)*(s + 2));
ilaplace(F, s, t)
```

Пример Б.3

Получим обратное преобразование Лапласа для функции

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^3+2s^2+s} = \frac{2s+3}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{s+1} + \frac{k_{22}}{(s+1)^2}.$$

Коэффициенты k_1 и k_{22} определяются просто:

$$k_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{2s+3}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = 3;$$

$$k_{22} = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = \frac{2s+3}{s} \Big|_{s=-1} = -1$$

Для определения k_{21} воспользуемся формулой (Б-13):

$$\begin{aligned} k_{21} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 F(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{2s+3}{s} \right] \Big|_{s=-1} = \\ &= \frac{s(2) - (2s+3)(1)}{s^2} \Big|_{s=-1} = \frac{-2-1}{1} = -3. \end{aligned}$$

Тогда разложение на простые дроби принимает вид:

$$F(s) = \frac{2s+3}{s(s+1)^2} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

По таблице Б.1 находим:

$$f(t) = 3 - 3e^{-t} - te^{-t}.$$

Пример Б.4

Теперь покажем, как можно найти обратное преобразование Лапласа для функции, имеющей комплексные полюсы. Пусть

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{10}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10} = \frac{10}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{10}{(s+2)[(s+1)^2 + 2^2]} = \\ &= \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1+j2} + \frac{k_2^*}{s+1-j2}. \end{aligned}$$

Коэффициент k_1 определяется уже известным способом:

$$k_1 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{10}{(s+1)^2 + 4}|_{s=-2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Коэффициент k_2 найдем с помощью (Б-15):

$$\begin{aligned} k_2 &= (s+1+j2)F(s)|_{s=-1-j2} = \frac{10}{(s+2)(s+1-j2)}|_{s=-1-j2} = \frac{10}{(-1-j2+2)(-1-j2+1-j2)} = \\ &= \frac{10}{(1-j2)(-j4)} = \frac{10}{(2,236e^{-j63,4^\circ})(4e^{-j90^\circ})} = 1,118e^{j153,4^\circ} = Re^{j\theta}. \end{aligned}$$

Тогда, используя (Б-16), можно записать:

$$f(t) = 2e^{-2t} + 2,236e^{-t} \cos(2t - 153,4^\circ).$$

Разложение $F(s)$ на простые дроби можно выполнить с помощью следующей программы MATLAB:

```
Fnum = [0 0 0 10];
Fden = [1 4 9 10];
[r, p, k] = residue(Fnum, Fden)
```

Обратное преобразование Лапласа можно найти с помощью программы MATLAB:

```
syms F s t
F = 10/(s^3 + 4*s^2 + 9*s + 10);
ilaplace(F, s, t)
```

Б.2. Теоремы преобразования Лапласа

В предыдущем разделе было дано определение преобразования Лапласа. Однако при анализе и синтезе систем управления нам обычно требуются некоторые теоремы этого преобразования. Мы сформулируем одну из таких теорем — теорему о конечном значении, которая, как будет показано ниже, очень полезна при анализе и синтезе систем управления.

Предположим, что нам необходимо вычислить конечное значение функции $f(t)$, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Однако это конечное значение надо определить непосредственно по преобразованию Лапласа $F(s)$, не получая выражение для самой функции $f(t)$. Это позволяет сделать теорема о конечном значении. Чтобы сформулировать эту теорему, нам сначала потребуется найти преобразование Лапласа для производной от функции $f(t)$,

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt. \quad (\text{Б-17})$$

Интеграл можно взять по частям, полагая

$$u = e^{-st}, \quad dv = \frac{df}{dt} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L\left[\frac{df}{dt}\right] &= uv \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \\ &= 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0). \end{aligned} \quad (\text{Б-18})$$

С математической точки зрения начальное условие следовало бы обозначить $f(0^+)$ [4], [5], где

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t), \quad t > 0. \quad (\text{Б-19})$$

Однако мы будем пользоваться обозначением $f(0)$.

Теперь можно сформулировать теорему о конечном значении. Согласно (Б-17),

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[L\left(\frac{df}{dt}\right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0). \quad (\text{Б-20})$$

Далее, на основании (Б-18) и (Б-19):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)], \quad (\text{Б-21})$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (\text{Б-22})$$

при условии, что предел левой части этого выражения существует. Предел правой части может существовать даже если не существует предела левой части, но в этом случае (Б-22) даст неверное конечное значение функции $f(t)$.

В таблице Б.2 приведены некоторые полезные теоремы преобразования Лапласа. Доказательства этих теорем здесь не приводятся; читатели, которых это интересует, могут обратиться к источникам [4] и [5]. Мы ограничимся лишь примерами применения этих теорем.

Пример Б.5

Чтобы проиллюстрировать применение теорем преобразования Лапласа, рассмотрим функцию $f(t) = \cos at$.

$$F(s) = L[f(t)] = L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Тогда по таблице Б.2:

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = L[-a \sin at] = sF(s) - f(0) = \frac{s^2}{s^2 + a^2} - 1 = -\frac{a^2}{s^2 + a^2},$$

что согласуется с выражением в таблице Б.1. Также

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = L\left[\frac{\sin at}{a}\right] = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^2 + a^2}.$$

Таблица Б.2 Теоремы преобразования Лапласа

Название операции	Формулировка теоремы
Производная	$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$
Производная n -го порядка	$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$
Интеграл	$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$
Запаздывание	$L[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$
Начальное значение	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Конечное значение	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Умножение оригинала на экспоненту	$L[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$
Интеграл свертки	$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau$

Это выражение совпадает с данными таблицы Б.1. Начальное значение $f(t)$ определим по соответствующей теореме:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2}{s^2 + a^2} \right) = 1,$$

что совершенно справедливо. Если мы теперь неосторожно применим теорему о конечном значении, то получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^2}{s^2 + a^2} \right) = 0,$$

что неверно, т.к. $\cos at$ не имеет конечного значения; эта функция при неограниченном возрастании времени продолжает изменяться в диапазоне от 1 до -1. Тем самым мы еще раз убеждаемся в том, что теорема о конечном значении неприменима к функциям, которые не имеют конечного значения.

Пример Б.6

Рассмотрим функцию $f(t) = e^{-0,5t}$ с запаздыванием на 4 с, т.е.

$$f_1(t) = f(t - 4)u(t - 4) = e^{-0,5(t-4)}u(t - 4).$$

Обе функции, $f(t)$ и $f_1(t)$, показаны на рис. Б.1. Заметим, что поскольку $f(t)$ сдвинута на 4 с в сторону запаздывания, то значения $f_1(t)$ равны нулю при $t < 4$ с. Эти условия необходимы для того, чтобы можно было воспользоваться теоремой запаздывания из таблицы Б.2. Согласно этой теореме,

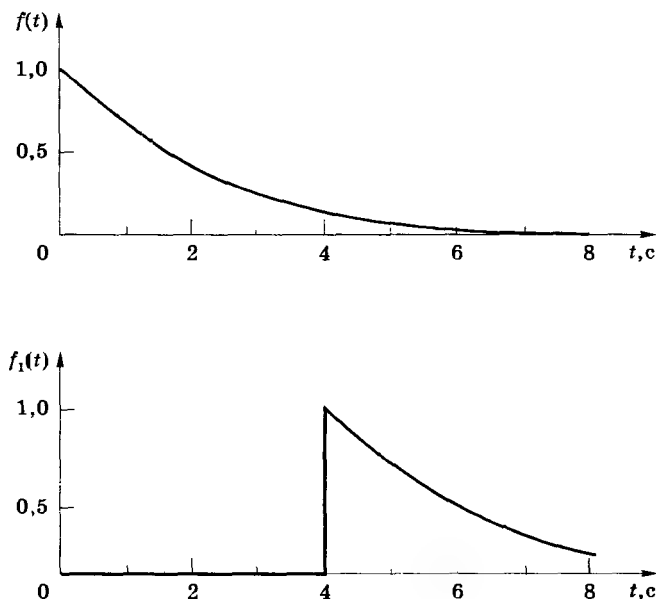
$$L[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s), \quad F(s) = L[f(t)].$$

В нашем случае $f(t) = e^{-0,5t}$, поэтому $F(s) = 1/(s + 0,5)$. Следовательно,

$$L[e^{-0,5(t-4)}u(t - 4)] = \frac{e^{-4s}}{s + 0,5}.$$

Заметим, что при наличии запаздывания преобразование Лапласа уже не является дробно-рациональной функцией, а содержит экспоненциальный член.

Рис. Б.1
Запаздывающая
функция времени



Б.3. Дифференциальные уравнения и передаточные функции

При анализе и синтезе систем управления с помощью преобразования Лапласа линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами переводятся в форму алгебраических уравнений. С алгебраическими уравнениями работать гораздо проще, и это облегчает анализ и решение исходных дифференциальных уравнений. Непрерывные физические системы всегда, когда это возможно, мы стараемся смоделировать в виде линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и тогда анализ и синтез таких систем достаточно просто выполняется с применением преобразования Лапласа.

Физическое явление, описываемое законом Ньютона, можно смоделировать в виде дифференциального уравнения

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t), \quad (\text{Б-23})$$

где $f(t)$ — сила, действующая на тело с массой M , а $x(t)$ — перемещение тела, вызванное этой силой. Предполагается, что единицы измерения переменных в (Б-23) согласованы. Допустим, что известны масса M и приложенная сила $f(t)$. Тогда преобразование Лапласа уравнения (Б-23), согласно таблице Б.2, равно

$$M[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] = F(s). \quad (\text{Б-24})$$

Чтобы определить перемещение тела $x(t)$, нам нужно знать приложенную силу, начальное положение тела $x(0)$ и его начальную скорость $\dot{x}(0)$. Тогда из (Б-24) можно выразить $X(s)$ и, применив обратное преобразование Лапласа, определить $x(t)$. Сначала найдем $X(s)$:

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2} + \frac{x(0)}{s} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2}. \quad (\text{Б-25})$$

Предположим, к примеру, что $f(t) = 0$. Тогда обратное преобразование Лапласа, примененное к (Б-25), дает:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t, \quad t \geq 0. \quad (\text{Б-26})$$

Если начальная скорость $\dot{x}(0)$ также равна нулю, то тело останется в начальном положении $x(0)$. Если $\dot{x}(0) \neq 0$, то тело будет двигаться с постоянной скоростью, равной ее начальному значению.

В случае, когда все начальные условия равны нулю, (Б-25) принимает вид:

$$X(s) = \frac{1}{Ms^2} F(s). \quad (\text{Б-27})$$

Рассмотрим физическое явление (систему), модель которого может быть представлена в виде линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Тогда преобразование Лапласа выходной переменной системы можно записать как произведение преобразования Лапласа входной переменной на некоторую функцию переменной s (в предположении, что все начальные условия равны нулю), которую называют *передаточной функцией*. Передаточную функцию обычно обозначают $G(s)$; для нашего примера с движением тела согласно (Б-27) передаточная функция равна

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2}. \quad (\text{Б-28})$$

Пример Б.7

Предположим, что система смоделирована в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 2f(t).$$

В этом уравнении $f(t)$ есть входное воздействие, а $x(t)$ — реакция системы (выходная переменная). Применим к этому уравнению преобразование Лапласа:

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 2F(s).$$

Выразим из этого уравнения $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2F(s) + (s+3)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 3s + 2}.$$

Передаточная функция определяется при нулевых начальных условиях, т.е.

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Предположим, что нам надо найти реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Тогда $F(s) = 1/s$ и

$$X(s) = G(s)F(s) = \left(\frac{2}{s^2 + 3s + 2} \right) \left(\frac{1}{s} \right),$$

или

$$X(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2},$$

что соответствует разложению на простые дроби. Далее нетрудно получить обратное преобразование Лапласа:

$$x(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что согласно предположению $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ равны нулю и что $x(t)$ с течением времени стремится к установившемуся значению, равному единице.

Полученное решение можно проверить с помощью программы MATLAB:

```
dsolve('D2x = -3*Dx - 2*x + 2, x(0) = 0, Dx(0) = 0')
```

В примере Б.7 изображение по Лапласу выходной переменной $X(s)$ можно представить в виде:

$$X(s) = G(s)F(s) + \frac{(s+3)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 3s + 2} = X_f(s) + X_{ic}(s). \quad (\text{Б-29})$$

Член $X_f(s)$ характеризует *вынужденное движение* системы под влиянием внешнего воздействия (при нулевых начальных условиях), а член $X_{ic}(s)$ характеризует *свободное движение* системы за счет начальных условий (при отсутствии входного воздействия). Этот вывод имеет общий характер и показывает, что реакция системы представляет собой сумму двух членов. Вынужденная составляющая реакции не зависит от начальных условий, а свободная составляющая не зависит от входного воздействия. Эта особенность линейных дифференциальных уравнений была отмечена в главе 2, где приведено определение *линейной системы*.

При изучении систем управления с обратной связью все методы анализа и синтеза основаны на понятии передаточной функции. Чтобы обобщить результаты предыдущих разделов, рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$\frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 c = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r, \quad (\text{Б-30})$$

где $c(t)$ — выходная переменная системы, а $r(t)$ — входная переменная. При нулевых начальных условиях преобразование Лапласа этого уравнения дает:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)C(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)R(s). \quad (\text{Б-31})$$

Отсюда можно получить выражение $C(s)/R(s)$ в виде дробно-рациональной функции:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (\text{Б-32})$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений читателю должно быть известно, что если знаменатель этого выражения приравнять нулю, то мы получим *характеристическое уравнение*, соответствующее дифференциальному уравнению (Б-30).

Поскольку большинство реальных систем, рассмотренных в этой книге, мы описывали дифференциальными уравнениями, то мы часто пользовались понятием *характеристическое уравнение системы*, имея в виду, конечно, что речь идет о характеристическом уравнении для дифференциального уравнения, описывающего систему. В главе 2 мы выяснили, что коэффициенты a_i в уравнении (Б-30) определяются параметрами системы, которая описывается данным дифференциальным уравнением, такими как масса, коэффициент трения, коэффициент упругости, индуктивность, сопротивление и т.п. Отсюда следует, что характеристическое уравнение в действительности *характеризует* систему, т.к. его корни зависят только от параметров системы. Эти корни определяют ту составляющую реакции системы, вид которой не зависит от входного воздействия $r(t)$. Данная составляющая, конечно, вносит дополнительный вклад в решение дифференциального уравнения.

Литература

1. C.L.Phillips and J.M.Parr. *Signals, Systems, and Transforms*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
2. J.D.Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
3. W.A.Blackwell and L.L.Grigsby. *Introductory Network Theory*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1985.
4. G.Doetsch. *Guide to the Applications of the Laplace and z-Transforms*. New York: Springer-Verlag, 1970.
5. W.Kaplan. *Operational Methods for Linear Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.

Задачи

Б.1. Путем вычисления определенного интеграла (Б-1) найдите преобразования Лапласа для следующих функций.

(а) $f(t) = u(t - 2,5)$.

(б) $f(t) = e^{-4t}$.

(в) $f(t) = t$.

(г) С помощью MATLAB проверьте результаты пп. (б) и (в).

Б.2. С помощью таблицы преобразований Лапласа определите последние для следующих функций.

(а) $f(t) = -3te^{-t}$.

(б) $f(t) = -5\cos t$.

(в) $f(t) = t\sin 3t$.

(г) $f(t) = 7e^{-0,5t}\cos 3t$.

(д) $f(t) = 5\cos(4t + 30^\circ)$.

(е) $f(t) = 6e^{-2t}\sin(t - 45^\circ)$.

(ж) С помощью MATLAB проверьте все результаты.

Б.3. Получите обратное преобразование Лапласа для следующих функций.

(а) $F(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)}$.

(б) $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$.

(в) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+10}$.

(г) $F(s) = \frac{s-30}{s(s^2+4s+29)}$.

(д) С помощью MATLAB проверьте все результаты.

Б.4. Дано преобразование Лапласа:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+13}.$$

(а) Выразите обратное преобразование Лапласа в виде суммы двух показательных функций.

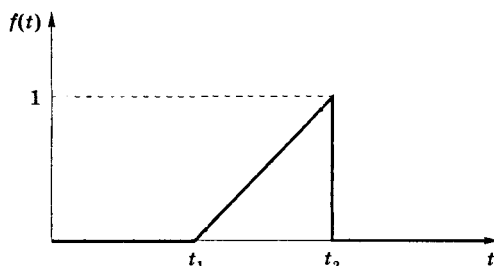
- (б) Используя тождество Эйлера, представьте результат п. (а) в виде $f(t) = Be^{-at}\sin(bt + \theta)$.
 (в) Используя процедуру, изложенную в разд. Б.1, представьте обратное преобразование Лапласа в виде $f(t) = Ae^{-at}\cos(bt + \theta)$.
 (г) С помощью MATLAB проверьте все результаты.

Б.5. (а) Изобразите график функции $f(t)$, если ее преобразование Лапласа имеет вид:

$$F(s) = \frac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s}, \quad t_2 > t_1.$$

- (б) Функция $f(t)$ из п. (а) представляет собой прямоугольный импульс. Найдите преобразование Лапласа для импульса треугольной формы, изображенного на рис. Б.5 (3).

Рис. Б.5 (3)



Б.6. Дана функция $f(t) = 4e^{-2(t-3)}$.

- (а) Определите $L[df(t)/dt]$ путем дифференцирования $f(t)$ с последующим использованием таблицы преобразований Лапласа.
 (б) Определите $L[df(t)/dt]$ с помощью теоремы дифференцирования.
 (в) Повторите пп. (а) и (б) для случая, когда $f(t) = 4e^{-2(t-3)}u(t-3)$.

Б.7. Определите преобразования Лапласа для следующих функций.

- (а) $f_1(t) = 5e^{-2(t-1)}$.
 (б) $f_2(t) = 5e^{-2(t-1)}u(t-1)$.
 (в) Изобразите графики этих двух функций.
 (г) Почему два преобразования Лапласа отличны друг от друга?

Б.8. Для функций, приведенных в условиях задачи Б.3:

- (а) Укажите, какие из обратных преобразований Лапласа не имеют конечного значения, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ не существует.
 (б) Определите конечное значение для тех функций, которые его имеют.

Б.9. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 4x = 10u(t).$$

- (а) Определите $x(t)$ в случае нулевых начальных условий.
 (б) Определите $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 1$. Покажите, что ваше решение действительно соответствует данным начальным условиям, т.е. по полученной функции $x(t)$ найдите $x(0)$ и $\dot{x}(0)$.
 (в) Проверьте все результаты с помощью MATLAB.

Б.10. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 5, \quad t \geq 0.$$

- (а) Определите $x(t)$ при нулевых начальных условиях.

(б) Определите $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 2$. Убедитесь в правильности вашего решения, т.е. по полученной функции $x(t)$ найдите $x(0)$ и $\dot{x}(0)$.

(в) Проверьте все результаты с помощью MATLAB.

Б.11. Для каждой из следующих передаточных функций запишите дифференциальное уравнение системы, считая, что $G(s) = C(s)/R(s)$.

(а) $G(s) = \frac{60}{s^2 + 10s + 60}$.

(б) $G(s) = \frac{3s + 20}{s^3 + 4s^2 + 8s + 20}$.

(в) $G(s) = \frac{s + 1}{s^2}$.

(г) $G(s) = \frac{7e^{-0,2s}}{s^2 + 5s + 32}$.

Б.12. Запишите характеристические уравнения для систем из задачи Б.11.

Приложение В

Таблица преобразований Лапласа и z-преобразований

Функция времени $e(t)$	Преобразование Лапласа $E(s)$	z-преобразование
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
t^{k-1}	$\frac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$t^{k-1}e^{-at}$	$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{z[(aT-1) + e^{-aT}]z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})}{a(z-1)^2(z - e^{-aT})}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z\{[1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}]z + [e^{-2aT} + (aT-1)e^{-aT}]\}}{(z-1)(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$\frac{z \sin bT}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$\frac{z(z - \cos bT)}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$	$\frac{T(z^2 - 1) \sin bT}{(z^2 + 1)^2 - 4z \cos bT(z^2 - z \cos bT + 1)}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$	$\frac{Tz(z^2 + 1) \cos bT - 2Tz^2}{(z^2 + 1)^2 - 4z \cos bT(z^2 - z \cos bT + 1)}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos bT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$
$1 - e^{-at} \left(\cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right)$	$\frac{a^2 - b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$\frac{z(Az + B)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT})}$
		$A = 1 - e^{-aT} \left[\cos bT + \left(\frac{a}{b} \right) \sin bT \right]$
		$B = e^{-2aT} + e^{-aT} \left[\left(\frac{a}{b} \right) \sin bT - \cos bT \right]$

Предметный указатель

Автономная система, 548

Аккермана формула, 386, 394, 403

Акселерометр, см. Датчики

Амплитудно-фазовая диаграмма, 304, 514

Амплитудный критерий, 202

Анализ цепей, см. Электрические цепи

Аналоговая система управления, 15

Аналоговый компьютер, 101–104

Аналого-цифровой преобразователь, 426, 470

Апериодическое звено, 54

Асимптотическая устойчивость, см. Устойчивость по Ляпунову

Асимптоты корневого годографа, 204

Билинейное преобразование, 508

Блэк Г.С., 22

Боде Х.У., 22

Болтон М., 21

Бриндли Дж., 21

Векторы, 32

Весовая функция, 120

Вихрь, особая точка, см. Центр

Водяные часы, см. Система управления

Восстановление данных, 462

Время нарастания, 121

Время установления, 121

Вуд С.Т., 21

Входной сигнал, 13, 147

Вход системы, 147

Вынужденное движение, 85, 115

Высокочастотный шум, 240

Выходной сигнал, 13

Выход системы, 147

Вычет, 598

Генератор постоянного тока, 44

Генри У., 21

Гистерезис, см. Нелинейности

Глобальная устойчивость, 576

Граница устойчивости, 151

Граф, 31, 439–441

Датчики, 13, 48

– кодовые, 49

– положения, 49

– пьезоэлектрические, 52

– скорости, 51

– ускорения, 51

Делап Р., 21

Децибел, 266

Диаграмма Никольса, 314

Диаграммы Боде:

– амплитудная характеристика, 265–266

– дискретные системы, 512

– непрерывные системы, 265

– ошибки построения, 267, 276

– фазовая характеристика, 272

Дискретные системы, 15, 426

Дифференциальные уравнения, 23

– линейные, 23

– нелинейные, 544–545

– решение, 82

– с переменными параметрами, 545

– с постоянными параметрами, 23, 545

Дифференцирование матрицы, 593

Доминирующие полюсы, 138

Дополнительный полином, 186

Дреббель К., 20

Дробно-рациональная функция 597

Желаемый выходной сигнал, 147

Закон управления, 383

Замкнутая система, 14

– аналоговая, 146

– дискретная, 426–427

- Запас по модулю, 300
Запас по фазе, 300
Зона нечувствительности, см. Нелинейности
Зубчатые передачи, 57
- Идеальное запаздывание по времени**, 278, 311, 439
Идеальное реле, см. Нелинейности
Идеальный квантователь, 456
Идеальный фильтр, 462
Идентификация систем, 62
Импульсная передаточная функция, 466
Импульсная переходная функция, 120
Импульсная система, 15, 454
Интеграл свертки, 85, 120
Интегратор, 75, 102
Исполнительное устройство, 16
История управления, 19–22
- Каноническая форма наблюдаемости**, 78
Каноническая форма программирования, 441
Каноническая форма управляемости, 77, 386, 441
Кирхгофа законы, 25
Кодовые датчики, см. Датчики
Компаратор, см. Идеальное реле
Компенсация возмущений, 168
Комплексный коэффициент усиления, см. Описывающая функция
Компьютерное проектирование, 371
Конечное значение, 117
Корневой годограф:
– для дискретных систем, 501
– – синтез методом, 533
– для непрерывных систем, 199
– дополнительный, 245
– другие конфигурации, 223
– критерии, 202
– определение, 201
– основы метода, 199
– правила построения, 212
– свойства, 203, 207
– синтез методом, 225
– – ПИД-регулятора, 238
– – регулятора с опережением по фазе, 228
– – регулятора с отставанием по фазе, 234
Коррекция, 330
Критическое демпфирование, 120
Коэффициент затухания, 119
Коэффициент усиления, 117
Коэффициенты ошибки:
– по положению, 163, 515
– по скорости, 163, 516
– по ускорению, 165
Кривые постоянных M и N , 313–314
Критерий Найквиста:
– для дискретных систем, 503
– – диаграмма Найквиста, 506
– – контур Найквиста, 506
– для непрерывных систем, 281, 547
– – диаграмма Найквиста, 284
– – контур Найквиста, 284, 295
– – случай полюса в начале координат, 293
Крутящийся маятник, 43
- Лаплас П.С.**, 21
Линеаризация, 62, 569–573
Линейная система, 23
– стационарная, 181
– фазовые траектории, 583
Линия переключения, 579
Люфт, см. Нелинейности
- Максвелл Дж.К.**, 22
Масштабирование:
– времени, 132
– частоты, 133
Математическая модель, 23
Матрица преобразования базиса, 91
Матрицы, 33
Матричная передаточная функция, 392
Матричные уравнения, 32, 589
Маятник, 62–63
Метод разложения в бесконечный ряд, 86
Метод Эйлера, см. Численное интегрирование
Механические системы:
– с вращательным движением, 42–44
– с линейным перемещением, 38–42
Минимум возвратной разности, 301
Многомерная система, 74
Модели пониженного порядка, 138

Моделирование, 23–24

- аналоговое, 101
- гибридное, 102
- дискретных систем, 491–494
- нелинейных систем, 559
- с оборудованием в контуре, 101
- цифровое, 96

Наблюдаемость, 408

- Наблюдатель состояния, 391
- полного порядка, 391–401
- пониженного порядка, 401
- Найквист Г., 22
- Недемфированная система, 120
- Недодемфированная система, 120
- Нелинейная система, 62, 543
 - определение, 544
 - свойства, 546
- Нелинейности:
 - гистерезис, 555
 - зона нечувствительности, 554
 - идеальное реле, 550, 554
 - кубического типа, 549
 - люфт, 554
 - насыщение, 552
 - реле с зоной нечувствительности и гистерезисом, 555
- Непрерывная система управления, 13
- Неустойчивая система, 151
- Ньютон И., 22

Обратная связь по скорости, 226

- Объект управления, 13, 146
- Ограничение, см. Насыщение
- Ограниченный вход – ограниченный выход, см. Устойчивость
- Операционный усилитель, 27–30, 65–66
 - реализация регуляторов, 248–251
- Описывающая функция, 549
 - использование, 557
- Относительная устойчивость, 299
- Относительное перерегулирование, 121
- Отображение:
 - s -плоскости на z -плоскость, 497, 500
 - z -плоскости на w -плоскость, 509
- Ошибка:
 - оценки состояния, 392–393

- сигнал, 14
- системы, 14, 147
- установившаяся, 162, 515
- Ошибки, вызываемые возмущениями, 168

Передаточная функция, 23

- разомкнутой системы, 333
- Передемфированная система, 120
- Перерегулирование, 121
- Переходная матрица состояния:
 - для дискретной системы, 480
 - для непрерывной системы, 82
- Переходная составляющая реакции, 145, 170
- Переходная функция, 115
- Период квантования, 455
- ПИД-регулятор:
 - аналоговый, 238
 - дискретный, 529
 - реализация аналоговая, 248
- Подобные системы, 55
- Ползунов И.И., 21
- Полиномы, 181
- Полная обратная связь по состоянию, 390
- Полное сопротивление, см. Электрические цепи
- Полоса пропускания, 128
 - произведение на время нарастания, 130
- Полюсы системы, 151
- Постоянная времени, 115
- Правило Крамера, 33
- Правило Эйлера, 598
- Предельный цикл, 546
 - устойчивость, 562
- Преобразование Лапласа:
 - определение, 595
 - таблицы, 596, 609
 - теоремы, 600
- Преобразования подобия:
 - определение, 90
 - свойства, 94
- Преобразование со звездочкой, 455
 - свойства, 459
- Принцип аргумента Коши, 283
- Принцип суперпозиции, 23
- Присоединенная матрица, 591
- Проблема управления, 15–16

Программное обеспечение, 101, 371

Пьезоэлектрический акселерометр, 52

Разложение на простые дроби:

— в преобразовании Лапласа, 598

— в z-преобразовании, 437

Разностные уравнения, 426

— решение, 433

Раус Э. Дж., 22

Рауса-Гурвица критерий:

— для дискретных систем, 512

— для непрерывных систем, 183

Реакция на начальные условия, 85

Реализация регулятора, 248, 366

Регулирование по возмущению, 159

Регулируемая переменная, 147

Регулятор, 13, 146

— с опережением по фазе:

— аналоговый, 228, 343

— дискретный, 526

— с отставанием и опережением по фазе, 355–356

— с отставанием по фазе:

— аналоговый, 234, 338

— дискретный, 521

— цифровой, 426, 518

Регулятор-наблюдатель, 397

Резонанс, 264

Робастность, 382

Ряд Тейлора, 63, 87, 165, 571

Ряд Фурье, 548

Свободное движение, 115, 145

Седло, особая точка, 583

Сервопривод, 46

Сигнал отклонения, 147

Сигнальный граф, 31

Синтез:

— аналитический:

— аналоговых регуляторов, 229, 234, 241, 346, 364

— дискретных регуляторов, 520–527

— наблюдателя, 394

— в частотной области:

— дискретных систем, 517

— непрерывных систем, 327

— методами современной теории управления, 383

— методом корневого годографа

— дискретных систем, 533

— непрерывных систем, 225

— наблюдателей состояния, 394, 401

— нелинейных систем, 566

— ПИД-регуляторов:

— аналоговых, 238, 241, 359, 364

— дискретных, 529, 533

— путем размещения полюсов, 383

— регуляторов с опережением по фазе:

— аналоговых, 228, 343

— дискретных, 526

— регуляторов с отставанием и опережением по фазе, 355

— регуляторов с отставанием по фазе:

— аналоговых, 234, 338

— дискретных, 521

— цифровых систем управления, 517

Система посадки самолета, см. Система управления

Система с единичной обратной связью, 147–148

Система с переменными параметрами, 443

Система управления:

— антенной радиолокатора, 48, 199, 205,

236, 242, 335, 342, 349, 353, 357, 365, 366

— генератором постоянного тока, 241

— курсом корабля, 215, 218, 308

— паровой машиной, 21

— пером плоттера, 197, 256, 377, 489, 537, 541

— положением стержней ядерного реактора, 379

— посадкой самолета, 17

— приводом компакт-диска, 173

— прокатным станом, 79, 81, 279

— ракетой, 255, 326

— роботом, 59, 70, 196, 257, 378, 488, 491, 502, 512, 542

— сервоприводом, 123, 147

— скоростью автомобиля, 107, 197, 376

— скоростью электродвигателя, 173, 417

— содержанием углекислого газа, 488, 540

— спутником, 43, 107, 110, 141, 225, 231, 323, 378, 384, 388, 394, 404, 405, 409, 413, 414, 421–425, 577, 580

- температурой, 13, 19, 53, 107, 148, 155, 160, 175, 177, 224, 254, 375, 487, 536, 538
- уровнем (водяные часы), 20
- Система управления ракетой, см. Система управления
- Системы второго порядка, 118, 305
 - временные характеристики, 118
 - расположение полюсов, 124
 - стандартная форма передаточной функции, 118
 - частотные характеристики, 129
- Системы высокого порядка, 134
- Системы первого порядка, 114
 - временные характеристики, 115
 - частотные характеристики, 127
- Системы при наличии входных воздействий, 411
- Скачкообразный резонанс, 546
- След матрицы, 590
- Следящая система, 14
 - с наблюдателем, 414
 - с ПИ-регулятором, 416
- Собственная частота колебаний, 119
- Собственные векторы, 591
- Собственные значения, 591
- Современная теория управления, 382
- Состояние равновесия, 573
- Стационарная система, 545
- Структурная схема, 31
- Субгармоника, 546
- Схемы моделирования:
 - дискретных систем, 438
 - непрерывных систем, 75
- Тахогенератор, 51**
- Тейлор Б., 22
- Тип системы, 163–165
- Тормозная система автомобиля, 40
- Точки отрыва, 209
- Точность в установившемся режиме, 162
- Траектория движения системы, 574
- Трансформатор, 57
- Требования при синтезе систем:
 - к временным характеристикам, 121
 - к частотным характеристикам, 131–132

- Уатт Дж., 21**
- Угловой критерий, 202, 246
- Узел, особая точка, 581
- Управляемость, 408
- Уравнения синтеза, см. Синтез аналитический
- Уравнения состояния:
 - линейных систем:
 - дискретных, 443
 - импульсных, 478
 - непрерывных, 74
 - нелинейных систем, 570
 - решение:
 - для дискретных систем, 443
 - для непрерывных систем, 82
 - связь с передаточной функцией:
 - для дискретных систем, 446
 - для непрерывных систем, 88
- Условная устойчивость, 367
- Установившаяся ошибка, 162, 515
- Устойчивость:
 - в большом, 576
 - в малом, 576
 - глобальная, 576
 - граница, 151
 - дискретных систем, 494
 - исследование моделированием, 192
 - нелинейных систем, 545
 - непрерывных систем, 150
 - по Ляпунову, 574
 - предельных циклов, 564
 - типа «ограниченный вход – ограниченный выход», 150
- Устойчивость по Ляпунову:
 - асимптотическая, 574
 - определение, 574
 - первая теорема, 575
- Фазовая плоскость, 576**
- Физическая система, 23
- Фильтр, 13
- Фокус, особая точка, 582
- Формула Мейсона, 33
- Формы программирования, 451
- Фундаментальная матрица, 82
- Функция чувствительности, 153

Характеристики:

- временные, 114
- замкнутой системы, 312–314, 396
- частотные, 260
- Характеристические векторы, см. Собственные векторы
- Характеристические числа, см. Собственные значения
- Характеристический полином, 152
- Характеристическое уравнение, 150–152, 605
- корни, 191
- Хевисайд О., 22

Центр, особая точка, 584

- Цифроаналоговый преобразователь, 426, 470
- Цифровые системы управления, 15, 490
- Цифровые фильтры, 470

Частота излома, 265

- Частотная функция, 261
- Частотные характеристики, 126, 261
- амплитудные и фазовые, 263
- Боде диаграммы, см. Диаграммы Боде
- в полярных координатах, 262
- диаграмма Найквиста, 284

- замкнутой системы, 171, 312
- разомкнутой системы, 287, 328
- Частотный спектр, 461
- Численное дифференцирование, 530
- Численное интегрирование:
- метод прямоугольников, 97, 450
- метод трапеций, 450
- метод Эйлера, 96, 434
- Чувствительность, 153, 330

Эванс У.Р., 22

- Экспоненциальная функция матрицы, 87
- Экстраполятор нулевого порядка, 455
- Электрические цепи, 24–30
- метод полного сопротивления, 28
- Электродвигатель постоянного тока, 46
- Электромеханические системы, 44

Якобиан, 573**w-плоскость, 510****z-преобразование:**

- обратное, 436
- определение, 428
- таблицы, 437, 609
- теоремы, 430

Серия «Технический университет»

Филлипс Ч., Харбор Р.
Системы управления с обратной связью

Художник Н. Лозинская

Компьютерная верстка В. Носенко

Подписано в печать 31.05.01. Формат 70х100¹/₁₆.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 49,7. Тираж 3000 экз. Заказ 2768

Издательство «Лаборатория Базовых Знаний»
Адрес для переписки: 103473, Москва, а/я 9
Телефон (095)955-0398, E-mail: lbz@aha.ru

Лицензия на издательскую деятельность №066140
от 12 октября 1998 г.

Отпечатано с готовых диапозитивов в полиграфической фирме «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.